全国高职高专规划教材·计算机系列

JISUANJI SHUXUE

计算机数学

高世贵　王艳天◎主编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

全国高职高专规划教材·计算机系列

计算机数学

高世贵　王艳天　主　编

吴应斌　王玉华　副主编

赵　瑛　王中丹　马少帅　参　编

王小强　主　审

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书定位高职高专教育，密切结合专业需求，注重数学思想和方法的应用，语言表述通俗易懂、深入浅出、可读性强，便于学生对数学知识的理解和掌握。

本书的授课时数为84学时，共8章，主要内容包括：极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、微分方程、线性代数初步、集合。本书每节配有一定的习题，每章配有复习题；书后附有习题、复习题答案，供读者参考；书中带“*”号部分为选学内容。

本书可作为高职高专计算机应用和电子技术等各专业数学课程的教材，也可作为相关专业科技人员的学习参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

计算机数学/高世贵，王艳天主编. —北京：北京大学出版社，2011.8
（全国高职高专规划教材·计算机系列）
ISBN 978-7-301-19340-2

Ⅰ. ①计… Ⅱ. ①高…②王… Ⅲ. ①电子计算机—数学基础—高等职业教育—教材 Ⅳ. ①TP301.6

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第157850号

书　　　　名：计算机数学
著作责任者：高世贵　王艳天　主编
策 划 编 辑：温丹丹
责 任 编 辑：温丹丹　曹云姗
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-19340-2/O·0850
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　　　址：北京市海淀区成府路205号　100871
网　　　　址：http://www.pup.cn
电 子 信 箱：zyjy@pup.cn
电　　　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62765126　出版部 62754962
印　刷　者：河北滦县鑫华书刊印刷厂
787毫米×1092毫米　16开本　13.75印张　343千字
2011年8月第1版　2011年8月第1次印刷
定　　　　价：27.00元

前　　言

《计算机数学》是高职高专教育计算机应用、电子技术类等各专业必修的一门公共基础课，是进一步学习后续课程的数学基础。

本书根据《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，结合高职高专数学课程教学的特点，从必需、够用为度的原则出发编写而成。在构思和框架安排上，既有利于教师发掘、探讨和组织教学，又有利于学生的学习，易懂好教。本书的编写，适合当前对数学教学要求高、课时少的教学状况，在精心选择教学内容方面有独到之处，彰显出以数学为基础，以应用为目的的教学特点。

本书在注重数学基本概念和基本定理的同时，紧密结合计算机应用和电子技术类等专业的后续课程所必需的基本知识。编写本书的出发点，是根据学生的基础知识状况和学习特点，尽可能地体现对学生智力的开发和培养，使学生能够真正掌握所学知识。

本书在编写思路上，着重以掌握数学基础知识为基本点，以数学知识在计算机方面的应用为主线来确定教材内容。通过对人才培养目标的调研与分析，我们选出与计算机科学和电子技术等专业密切相关的数学问题，使学生通过学习数学知识，掌握解决问题的思想和方法，提高解决专业课中所涉及数学问题的能力，真正做到教师的“教”与学生的“学和用”结合起来，努力做到为后续课程的学习服务。

在本书的设计与编写过程中，我们对以往的教学内容进行了认真的探讨、大胆地改革。教学内容的安排能够突出以基本概念和基本计算为主，突出用数学基本概念分析和解决问题的能力，体现数学基础知识的融会贯通，使学生了解数学中的抽象思想与计算机科学实践之间的内在联系，从而能够获得运用这些思想去解决实际问题的能力。根据普通高职学生的学习状况，本书淡化了数学理论的推导，比较直观地讲解基本概念、基本定理、运算技巧，化难为易；便于提高学生应用数学知识解决问题的能力。

本书的编写彰显了如下三个方面的特点。

1. 数学内容难易适度，体现了数学教学的适用性和实用性。本着“必需”和“够用”的原则，淡化了数学理论的证明。在内容上注重基本概念的讲解和基本计算，突出培养计算能力和解决问题的能力。在教学设计上针对高职学生的特点，语言表述通俗易懂、深入浅出、可读性强。学生能够感觉数学知识不但可以学得懂，而且能够用得上，从而解决了数学为专业服务特色不明显的问题。

2. 体现数学思想为核心，重视数学思想的渗透与应用。例如，线性分析思想、定量定性分析、逻辑推理思想等，注重数学思想和方法在计算机科学领域中的应用，能够很好地启发学生学习的兴趣，发挥学生学习的积极性和主动性。

3. 本书适用面广，带“*”号的为选学内容。本书不仅可以作为高职教育的教材，而且从教学内容上，还可以满足各类职业技术院校不同专业的教学要求。教师在授课时还可以根据学生实际水平灵活选用教材内容。在通过例题点拨解题思路和方法方面，本书也

做了很好的积极探索。

本书由高世贵（辽宁装备制造职业技术学院）、王艳天（辽阳市职业技术学院）任主编，王小强（辽宁铁道职业技术学院）任主审，吴应斌、王玉华（辽宁装备制造职业技术学院）任副主编，马少帅、王中丹、赵瑛（辽宁广播电视大学）参加了本书的编写工作。王小强对本书进行了仔细的审阅，提出了许多有价值的建议和修改意见。本书的设计及统稿、定稿由高世贵完成。

北京大学出版社的编辑在本书的编排过程中提供了很大的帮助和支持。对以上编审人员的辛勤劳动深表敬意！对上述各兄弟院校领导的大力支持深表谢意！

由于编者水平所限和时间仓促，不妥和错误之处在所难免，恳请使用本书的广大教师和读者批评指正，我们将不胜感激。

编　者

2011 年 7 月

目　　录

第一章　极限与连续

函数描述了客观世界中量与量之间的依赖关系，是高等数学研究的主要对象. 极限揭示了函数的变化趋势，是数学中的一个重要概念，也是学习微积分的理论基础. 本章将在进一步加深理解函数概念的基础上，学习函数的极限及其运算法则，并利用极限讨论函数的连续性.

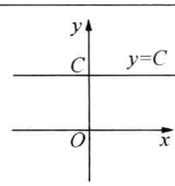
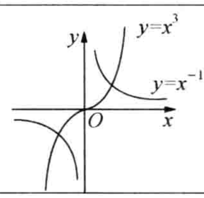
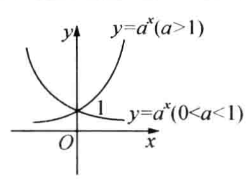
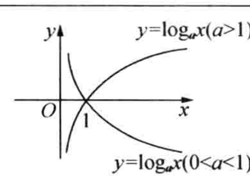
第一节　初等函数

一、基本初等函数

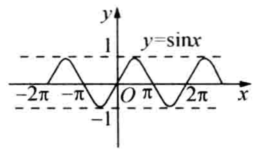
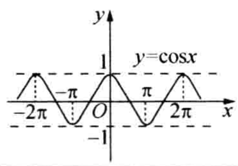
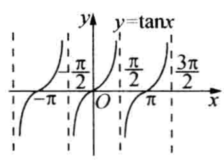
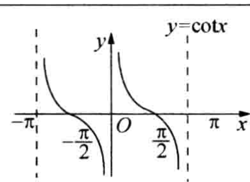
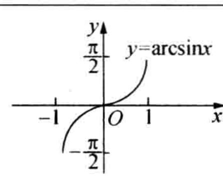
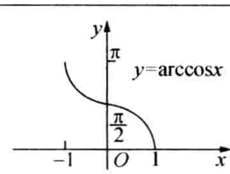
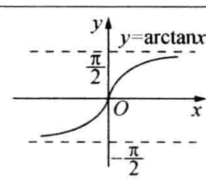
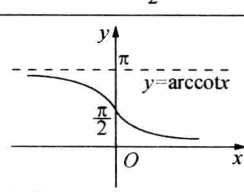
我们把常值函数、幂函数 $y=x^{a}\,(a\in\boldsymbol{R})$、指数函数 $y=a^{x}$ （$a>0$ 且 $a\neq1$）、对数函数 $y=\log_{a}x\,(a>0，a\neq1)$、三角函数和反三角函数，这六类函数统称为基本初等函数.

为了便于学生学习，基本初等函数的表达式、定义域、值域、图像和性质如表 1-1 所示。

表 1-1　基本初等函数表

函　数	定义域与值域	图　像	性　质
常值函数 $y=C$ （C 为常数， $C\in\boldsymbol{R}$）	$x\in(-\infty，+\infty)$ $y=C$		在 y 轴上的截距为 C 图像平行 x 轴
幂函数 $y=x^{a}$ （a 为常数， $a\in\mathbf{R}$）	当 a 取不同的值时，幂函数的定义域和值域可能不同，但在 $(0，+\infty)$ 内都有定义		过 $(1，1)$ 点 当 $a>0$ 时，函数在第一象限单调增加； 当 $a<0$ 时，函数在第一象限单调减少
指数函数 $y=a^{x}$ （$a>0，a\neq1$）	$x\in(-\infty，+\infty)$ $y\in(0，+\infty)$		过 $(0，1)$ 点 当 $a>1$ 时，单调增加； 当 $0<a<1$ 时，单调减少
对数函数 $y=\log_{a}x$ （$a>0，a\neq1$）	$x\in(0，+\infty)$ $y\in(-\infty，+\infty)$		过 $(1，0)$ 点 当 $a>1$ 时，单调增加； 当 $0<a<1$ 时，单调减少

续表

<table>
<tr><th colspan="2">函　数</th><th>定义域与值域</th><th>图　像</th><th>性　质</th></tr>
<tr><td rowspan="4">三角函数</td><td>正弦函数
$y=\sin x$</td><td>$x\in(-\infty,\ +\infty)$
$y\in[-1,\ 1]$</td><td></td><td>奇函数，周期为 2π，有界
在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 单调增加
在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 单调减少</td></tr>
<tr><td>余弦函数
$y=\cos x$</td><td>$x\in(-\infty,\ +\infty)$
$y\in[-1,\ 1]$</td><td></td><td>偶函数，周期为 2π，有界
在 $(2k\pi-\pi,\ 2k\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 单调增加
在 $(2k\pi,\ 2k\pi+\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 单调减少</td></tr>
<tr><td>正切函数
$y=\tan x$</td><td>$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$
$y\in(-\infty,\ +\infty)$</td><td></td><td>奇函数，周期为 π
在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 单调增加</td></tr>
<tr><td>余切函数
$y=\cot x$</td><td>$x\neq k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$
$y\in(-\infty,\ +\infty)$</td><td></td><td>奇函数，周期为 π
在 $(k\pi,\ (k+1)\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 单调减少</td></tr>
<tr><td rowspan="4">反三角函数</td><td>反正弦函数
$y=\arcsin x$</td><td>$x\in[-1,\ 1]$
$y\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$</td><td></td><td>奇函数，有界，单调增加</td></tr>
<tr><td>反余弦函数
$y=\arccos x$</td><td>$x\in[-1,\ 1]$
$y\in[0,\ \pi]$</td><td></td><td>有界，单调减少</td></tr>
<tr><td>反正切函数
$y=\arctan x$</td><td>$x\in(-\infty,\ +\infty)$
$y\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$</td><td></td><td>奇函数，有界，单调增加</td></tr>
<tr><td>反余切函数
$y=\operatorname{arccot} x$</td><td>$x\in(-\infty,\ +\infty)$
$y\in(0,\ \pi)$</td><td></td><td>有界，单调减少</td></tr>
</table>

二、复合函数、初等函数

1. 复合函数

在很多实际问题中，我们常常遇到由几个简单的函数构成一个较复杂函数的情况．例如质量为 m 的物体，以初速度 v_0 竖直上抛，由物理学知道，其动能 $E=\frac{1}{2}mv^2$，而 $v=v_0-gt$（不计空气阻力），于是得 $E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2$，这样就能把动能 E 通过速度 v 表示成了时间 t 的函数．类似的，由三角函数 $y=\sin u$ 与函数 $u=2x$ 可构成函数 $y=\sin 2x$．对于这样的函数，给出如下定义．

定义 1　如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $u=\varphi(x)$ 的值域包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域内，那么 y（通过 u 的关系）也是 x 的函数，我们把这样的函数叫做 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数．简称复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 叫做中间变量．

复合函数的概念可以推广到多个中间变量的情形．

例 1　指出下列各函数的复合过程：

（1）$y=\sqrt{x^2-2x+5}$；　　（2）$y=\cos^2 x$；

（3）$y=\lg(1-x)$；　　（4）$y=\sin\sqrt{1-x^2}$．

解　（1）$y=\sqrt{x^2-2x+5}$ 由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=x^2-2x+5$ 复合而成．

（2）$y=\cos^2 x$ 由 $y=u^2$ 与 $u=\cos x$ 复合而成．

（3）$y=\lg(1-x)$ 由 $y=\lg u$ 与 $u=1-x$ 复合而成．

（4）$y=\sin\sqrt{1-x^2}$ 由 $y=\sin u$，$u=\sqrt{v}$ 与 $v=1-x^2$ 复合而成．

注意：（1）并非任意两个函数都能构成复合函数，例如，$y=\arcsin u$ 与 $u=x^2+2$ 便不能复合成一个函数，因为 u 的值域为 $[2,+\infty)$，不包含在 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 内，因而不能复合．

（2）对复合函数进行分解时，每个层次都应是基本初等函数或常数与基本初等函数的四则运算式；当分解到常数与基本初等函数的四则运算式时，就不再分解了．

2. 初等函数

定义 2　由基本初等函数和常数，经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成的，并能用一个解析式表示的函数叫做初等函数．

例如，$y=\lg(x^2+\sin x)$、$y=\frac{\cos x}{1+x^2}$、$y=e^{2x}\ln x$、$y=\sqrt{x}+\tan 3x$ 等都是初等函数．初等函数是最常见的函数，它是微积分研究的主要对象．

分段函数 $y=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$，即 $y=\sqrt{x^2}=|x|$，它是由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=x^2$ 复合而成

的，因此它是一个初等函数．而分段函数$\begin{cases}2x+1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1-x^2, & x>0\end{cases}$不能用一个式子表示，因此它不是初等函数．

由初等函数的定义可知，任意一个初等函数都可以分解为基本初等函数的四则运算和复合运算．

例 2 将下列函数分解为基本初等函数的运算：

(1) $y=\cos^2(\sqrt{x}+1)$； (2) $y=2^{\tan\frac{1}{x}}$；

(3) $y=\sqrt{\ln\ln x}$； (4) $y=\dfrac{\sin^2 x}{1+e^{\sqrt{x}}}$.

解 (1) $y=u^2$，$u=\cos v$，$v=\sqrt{x}+1$

其中，y 是中间变量 u 的函数，u 是中间变量 v 的函数，都是基本初等函数，而 v 是幂函数与常数的和．

(2) $y=2^u$，$u=\tan v$，$v=\dfrac{1}{x}$

其中，y 是 u 的函数，而 u 是 v 的函数，v 是 x 的函数．

(3) $y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=\ln x$

其中，y 是 u 的函数，而 u 是 v 的函数，v 是 x 的函数．

(4) $y=\dfrac{u}{v}$，$u=t^2$，$t=\sin x$，$v=1+e^w$，$w=\sqrt{x}$

其中，y 是 u 与 v 的函数，而 u 是 t 的函数，t 是 x 的函数，v 是指数函数 e^w 与 1 的和，w 是 x 的函数．

三、建立函数关系举例

运用数学方法解决实际问题时，往往先要建立函数关系（或称建立数学模型），为此，需明确问题中的自变量与函数，然后根据题意建立等式，从而得出函数关系，并根据实际问题的要求，确立函数的定义域．

例 3 要建造一个容积为 V 的长方体水池，它的底为正方形，如池底的单位面积造价为侧面单位面积造价的 3 倍，试建立总造价与底面边长之间的函数关系．

解 设底面边长为 x，总造价为 y，侧面单位面积造价为 a．由已知条件可得水池深为$\dfrac{V}{x^2}$，侧面积为 $4x\dfrac{V}{x^2}=\dfrac{4V}{x}$，从而得

$$y=3ax^2+4a\frac{V}{x}\quad(0<x<+\infty).$$

例 4 某城市出租车起价为 8 元（3 km 以内），当路程超过 3 km 后，每增加 0.6 km 加收 1 元钱（不足 0.6 km 按 0.6 km 计算），求出租车费与路程之间的函数关系．

解 设 y 为出租车费（单位：元），x 为出租车行驶的路程（单位：km），根据题意有

$$y=\begin{cases}8, & x\in(0,\ 3]\\ \left.\begin{array}{ll}8+\dfrac{x-3}{0.6}, & 当\dfrac{x-3}{0.6}恰为整数时\\ 8+\left[\dfrac{x-3}{0.6}\right]+1, & 当\dfrac{x-3}{0.6}为小数时\end{array}\right\} & x\in(3,\ +\infty).\end{cases}$$

例 5 某工厂今年一、二、三月份的产品销售量分别为 1 万件、1.2 万件和 1.3 万件，呈上升趋势. 为了估测以后每个月的销量，拟选用二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 或指数函数 $y=ab^x+c$（a、b、c 均为常数）加以模拟. 后来四月份的销量是 1.37 万件，那么根据一、二、三月份销量所选定的两个模拟函数哪一个更好？

解 设 $f(x)=ax^2+bx+c$（x 是月份数，$f(x)$ 是销售函数），则

$$\begin{cases}f(1)=a+b+c=1\\ f(2)=4a+2b+c=1.2\\ f(3)=9a+3b+c=1.3\end{cases}$$

解得 $a=-0.05$，$b=0.35$，$c=0.7$

于是 $f(x)=-0.05x^2+0.35x+0.7$，且 $f(4)=1.3$.

设 $g(x)=ab^x+c$（x 是月份数，$g(x)$ 是销量函数），则

$$\begin{cases}g(1)=ab+c=1\\ g(2)=ab^2+c=1.2\\ g(3)=ab^3+c=1.3\end{cases}$$

解得 $a=-\dfrac{4}{5}$，$b=\dfrac{1}{2}$，$c=\dfrac{7}{5}$

于是 $g(x)=-\dfrac{4}{5}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+\dfrac{7}{5}$，且 $g(4)=1.35$.

从四月份的销量 1.37 看，$f(x)$ 和 $g(x)$ 比较起来，$g(x)$ 与 1.37 更接近，宜用 $g(x)$. 同时，$g(x)$ 是增函数，而 $f(x)$ 是先增后减函数，如果从销量呈上升趋势看也宜用 $g(x)$，所以采用 $g(x)=ab^x+c$ 为模拟函数较合理.

习题 1-1

1. 下列各题中，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是否表示同一函数？说明理由.

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$g(x)=1$；

(2) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，$g(x)=x+1$；

(3) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；

(4) $f(x)=x$，$g(x)=(\sqrt{x})^2$；

(5) $f(x)=\ln|x|$，$g(x)=\ln x$；

(6) $f(x)=\sqrt{(x-y)^2}$，$g(x)=|y-x|$.

2. 设 $f(x)=1+x^2$，$\varphi(x)=\sin 3x$，求 $f(0)$，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$，$f(t^2-1)$，$f[\varphi(x)]$，

$\varphi[f(x)]$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x\leqslant 0\\ 2, & x>0\end{cases}$，求 $f(0)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(-1)$，$f(1)$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}2+x, & x<0\\ 0, & x=0\\ x^2-1, & 0<x\leqslant 4\end{cases}$，求 $f(x)$ 的定义域及 $f(-1)$，$f(2)$的值，并作出它的函数图像.

5. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$； (2) $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$；

(3) $y=\lg\sin x$； (4) $y=\ln(x+2)+1$.

6. 将 $y=5-|2x-1|$ 用分段函数的形式表示，并作出函数图像.

7. 写出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=\sin^3(8x+5)$； (2) $y=\tan(\sqrt[3]{x^2+5})$；

(3) $y=e^{1-x^2}$； (4) $y=\ln(3-x)$；

(5) $y=\ln\cos^2(3x+1)$； (6) $y=\log_5\cot^3(5x^2+7)$.

8. 求单位圆内接正 n 边形的周长与边数 n 的函数关系.

9. 用铁皮做一个容积为 V 的圆柱形罐头筒，将它的全面积表示成底面半径的函数.

10. 某工厂有一水池，其容积为 100 m^3，原有水 10 m^3. 现在每 10 min 注入 0.5 m^3 的水，试将水池中水的体积 V 表示为时间 t 的函数，且问需多少分钟水池才能灌满？

11. 某公共汽车路线全长为 20 km，乘坐 5 km 以下收费 0.5 元，乘坐 5～10 km 收费 1.5 元，乘坐 10 km 以上收费 2 元. 试将票价表示成路程的函数.

12. 一边长为 a 的正方形铁皮，四个角各剪去一个相等的小正方形，然后折成一个无盖的盒子，试建立它的容积与剪去的小正方形边长之间的函数关系.

第二节 函数的极限

极限是研究在自变量的某一变化过程中函数的变化趋势，它是高等数学的重要概念之一. 在研究函数的极限之前，先讨论它的特殊情况.

一、数列的极限

我们来考察下面三个数列：

(1) $2, \dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{3}, \cdots, \dfrac{n+1}{n}, \cdots$

(2) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \cdots, \dfrac{1}{2^n}, \cdots$

(3) $2, \dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{3}, \cdots, \dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots$

为直观起见，将它们的前几项分别在数轴上表示出来（见图 1-1）

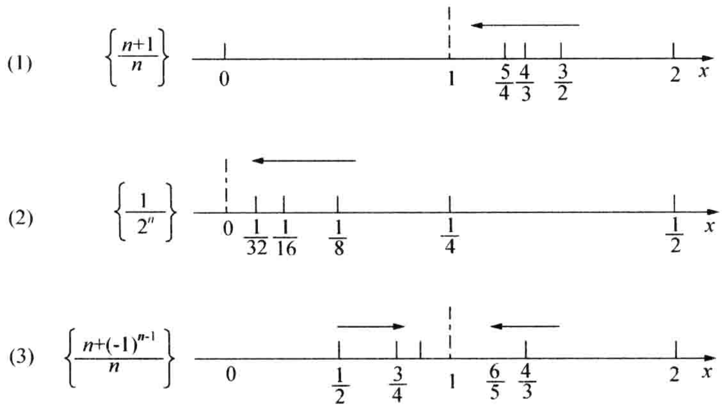


图　1-1

容易看出，当项数 n 无限增大时，数列（1）中的项无限接近于 1；数列（2）中的项无限接近于 0；数列（3）中的项是交错地排列的，从两侧无限地接近于 1.

上面三个数列的变化趋势说明，当项数 n 无限增大时，数列的项 x_n 无限地接近于某一个确定的常数 A. 对此我们给出如下定义：

定义 1　如果当项数 n 无限增大时（记为 $n\to\infty$），数列$\{x_n\}$的项 x_n 无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 叫做数列$\{x_n\}$的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A\ （或当\ n\to\infty 时，x_n\to A）$$

因此，数列（1）的极限是 1，记作$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$；数列（2）的极限是 0，记作$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$；数列（3）的极限是 1，记作$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$.

例 1　考察下面数列的变化趋势，写出它们的极限.

（1）$x_n=\frac{1}{n^2}$；　　（2）$x_n=2-\frac{1}{3^n}$；

（3）$x_n=(-1)^n\frac{1}{n}$；　　（4）$x_n=-5$.

解　列表考察这四个数列的前几项及当 $n\to\infty$时的变化趋势：

n	1	2	3	4	5	…	$\to\infty$
$\frac{1}{n^2}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$	…	$\to 0$
$2-\frac{1}{3^n}$	$2-\frac{1}{3}$	$2-\frac{1}{9}$	$2-\frac{1}{27}$	$2-\frac{1}{81}$	$2-\frac{1}{243}$	…	$\to 2$
$(-1)^n\frac{1}{n}$	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$	…	$\to 0$
$x_n=-5$	-5	-5	-5	-5	-5	…	$\to -5$

由上表中各数列的变化趋势，可知

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{3^n}\right)=2$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=0$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(-5)=-5$.

一般地，可得出以下几个结论：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$ （$|q|<1$）；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^a}=0$ （a 为大于 0 的实数）；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$. （$C$ 为常数）.

注意：并不是任何数列都有极限，有些数列就没有极限. 例如，数列 $x_n=2^n$，当 n 无限增大时，它不能无限接近于一个确定的常数，所以数列 $x_n=2^n$ 没有极限. 又如，数列 $x_n=(-1)^{n+1}$，当 n 无限增大时，x_n 在 1 和 -1 这两个数上来回跳动，而不能无限接近于一个确定的常数，所以数列 $x_n=(-1)^{n+1}$ 没有极限.

对于上述没有极限的数列，也说该数列的极限不存在.

二、函数的极限

数列是自变量只取正整数的特殊函数，即 $x_n=f(n)(n=1,2,3,\cdots)$. 下面将这种特殊函数的极限概念推广到以实数 x 为自变量的一般函数 $f(x)$.

1. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

$x\to\infty$ 表示自变量 x 的绝对值无限增大，它包括 x 取正值而无限增大（记为 $x\to+\infty$）及 x 取负值而绝对值无限增大（记为 $x\to-\infty$）两种情形. 下面考察当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的变化趋势.

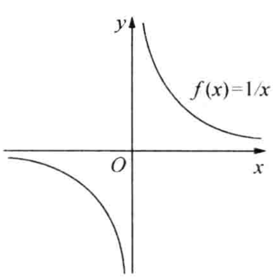


图　1-2

通过图 1-2 可以看出，当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的值无限接近于 0，同样地，当 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的值也无限接近于 0. 这就是说当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的值无限接近于 0，此时，我们称 0 为 $f(x)=\frac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时的极限.

一般地，有如下定义：

定义 2　如果当 x 的绝对值无限增大，即 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\ （或当\ x\to\infty\ 时，f(x)\to A）$$

由上述定义知，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

例 2　讨论函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 当 $x\to\infty$ 时的极限.