



国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中外物理学精品书系

前沿系列 · 31

物理学中的分形

刘式达 刘式适 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS



国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中 外 物 理 学 精 品 书 系

前 沿 系 列 · 3 1

物理学中的分形

刘式达 刘式适 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

物理学中的分形/刘式达,刘式适编著. —北京:北京大学出版社,2014.7
(中外物理学精品书系·前沿系列)

ISBN 978-7-301-24524-8

I. ①物… II. ①刘… ②刘… III. ①分形学 IV. ①O415.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 158952 号

书 名: 物理学中的分形

著作责任者: 刘式达 刘式适 编著

责任编辑: 刘 啸

标准书号: ISBN 978-7-301-24524-8/O·0977

出版发行: 北京大学出版社 lib.bnu.edu.cn

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://www.pup.cn>

新浪微博: @北京大学出版社

电子信箱: zpup@pup.cn

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62752038

出版部 62754962

印 刷 者: 北京中科印刷有限公司

经 销 者: 新华书店

730 毫米×980 毫米 16 开本 20.75 印张 396 千字

2014 年 7 月第 1 版 2014 年 7 月第 1 次印刷

定 价: 57.00 元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话: (010)62752024 电子信箱: fd@pup.pku.edu.cn

“中外物理学精品书系”

编委会

主任：王恩哥

副主任：夏建白

编委：（按姓氏笔画排序，标*号者为执行编委）

王力军	王孝群	王牧	王鼎盛	石兢
田光善	冯世平	邢定钰	朱邦芬	朱星
向涛	刘川*	许宁生	许京军	张酣*
张富春	陈志坚*	林海青	欧阳钟灿	周月梅*
郑春开*	赵光达	聂玉昕	徐仁新*	郭卫*
资剑	龚旗煌	崔田	阎守胜	谢心澄
解士杰	解思深	潘建伟		

秘书：陈小红

序 言

物理学是研究物质、能量以及它们之间相互作用的科学。她不仅是化学、生命、材料、信息、能源和环境等相关学科的基础,同时还是许多新兴学科和交叉学科的前沿。在科技发展日新月异和国际竞争日趋激烈的今天,物理学不仅囿于基础科学和技术应用研究的范畴,而且在社会发展与人类进步的历史进程中发挥着越来越关键的作用。

我们欣喜地看到,改革开放三十多年来,随着中国政治、经济、教育、文化等领域各项事业的持续稳定发展,我国物理学取得了跨越式的进步,做出了很多为世界瞩目的研究成果。今日的中国物理正在经历一个历史上少有的黄金时代。

在我国物理学科快速发展的背景下,近年来物理学相关书籍也呈现百花齐放的良好态势,在知识传承、学术交流、人才培养等方面发挥着无可替代的作用。从另一方面看,尽管国内各出版社相继推出了一些质量很高的物理教材和图书,但系统总结物理学各门类知识和发展,深入浅出地介绍其与现代科学技术之间的渊源,并针对不同层次的读者提供有价值的教材和研究参考,仍是我国科学传播与出版界面临的一个极富挑战性的课题。

为有力推动我国物理学研究、加快相关学科的建设与发展,特别是展现近年来中国物理学者的研究水平和成果,北京大学出版社在国家出版基金的支持下推出了“中外物理学精品书系”,试图对以上难题进行大胆的尝试和探索。该书系编委会集结了数十位来自内地和香港顶尖高校及科研院所的知名专家学者。他们都是目前该领域十分活跃的专家,确保了整套丛书的权威性和前瞻性。

这套书系内容丰富,涵盖面广,可读性强,其中既有对我国传统物理学发展的梳理和总结,也有对正在蓬勃发展的物理学前沿的全面展示;既引进和介绍了世界物理学研究的发展动态,也面向国际主流领域传播中国物理的优秀专著。可以说,“中外物理学精品书系”力图完整呈现近现代世界

和中国物理科学发展的全貌,是一部目前国内为数不多的兼具学术价值和阅读乐趣的经典物理丛书。

“中外物理学精品书系”另一个突出特点是,在把西方物理的精华要义“请进来”的同时,也将我国近现代物理的优秀成果“送出去”。物理学科在世界范围内的重要性不言而喻,引进和翻译世界物理的经典著作和前沿动态,可以满足当前国内物理教学和科研工作的迫切需求。另一方面,改革开放几十年来,我国的物理学研究取得了长足发展,一大批具有较高学术价值的著作相继问世。这套丛书首次将一些中国物理学者的优秀论著以英文版的形式直接推向国际相关研究的主流领域,使世界对中国物理学的过去和现状有更多的深入了解,不仅充分展示出中国物理研究 and 积累的“硬实力”,也向世界主动传播我国科技文化领域不断创新的“软实力”,对全面提升中国科学、教育和文化领域的国际形象起到重要的促进作用。

值得一提的是,“中外物理学精品书系”还对中国近现代物理学科的经典著作进行了全面收录。20 世纪以来,中国物理界诞生了很多经典作品,但当时大都分散出版,如今很多代表性的作品已经淹没在浩瀚的图书海洋中,读者们对这些论著也都是“只闻其声,未见其真”。该书系的编者们在这方面下了很大工夫,对中国物理学科不同时期、不同分支的经典著作进行了系统的整理和收录。这项工作具有非常重要的学术意义和社会价值,不仅可以很好地保护和传承我国物理学的经典文献,充分发挥其应有的传世育人的作用,更能使广大物理学人和青年学子切身体会我国物理学研究的发展脉络和优良传统,真正领悟到老一辈科学家严谨求实、追求卓越、博大精深的治学之美。

温家宝总理在 2006 年中国科学技术大会上指出,“加强基础研究是提升国家创新能力、积累智力资本的重要途径,是我国跻身世界科技强国的必要条件”。中国的发展在于创新,而基础研究正是一切创新的根本和源泉。我相信,这套“中外物理学精品书系”的出版,不仅可以使所有热爱和研究物理学的人们从中获取思维的启迪、智力的挑战和阅读的乐趣,也将进一步推动其他相关基础科学更好更快地发展,为我国今后的科技创新和社会进步做出应有的贡献。

“中外物理学精品书系”编委会 主任

中国科学院院士,北京大学教授

王恩哥

2010 年 5 月于燕园

内 容 简 介

本书首先介绍了物理学中的分形现象,如连续相变、逾渗、随机游动、 $\frac{1}{f}$ 噪声、生长现象、异常扩散、湍流、气候等,进而引出标度对称性这一重要概念.之后,本书介绍了分数维的物理含义,如临界奇异性、间隙性、级联过程、层次结构等,特别是近代物理学所关注的记忆性.接下来,本书讲解了涉及分形的一些数理基础和概念,如标度变换、重正化变换、函数方程、自相似随机过程、小波变换、多重分形等.本书也介绍了分形在混沌、湍流、时间序列、自组织及自组织临界现象等问题中的研究进展.最后,本书还讲述了分数阶微积分及分数阶动力学.它们是非线性分形物理学的最新研究成果.

本书力求将分形概念物理化,并用直观和相对简单的方法去说明有关分形的概念,使读者能从应用数学的范畴去了解新的物理问题,以便应用于物理学的各个分支领域.

本书可作为理工科大学本科生、研究生的教材和参考书,也可供理工科大学教师及有关科研人员阅读参考.

前 言

自从 1982 年曼德布罗特发表专著 *The Fractal Geometry of Nature* 以来,分形在物理学中的研究蓬勃发展. 1989 年我们撰写的《非线性动力学和复杂现象》一书,就专门有一章介绍分形. 1993 年,我们又写了《分形和分维引论》一书,向国内读者介绍分形. 三十年过去了,能通过《物理学中的分形》一书向读者介绍分形及它在物理学中的研究成果,我们感到很是欣慰.

三十年来分形研究有什么进展呢?

(1) 它已经从几何学的领域扩展至多尺度系统的物理学、气候学、生物学、经济学、复杂网络等领域.

(2) 它已经从简单的维数是分数的概念扩展到研究物理学相变标度律、湍流的多种间隙模型、生物学和经济学等的多种标度关系等.

(3) 它已经从整数阶微积分扩展到分数阶微积分.

(4) 它已经从无记忆系统扩展到有长期记忆性的系统.

以上进展已经使以分形为主要内容的非线性物理学成为当代物理学的重要组成部分.

本书的特色是从物理学中常见的分形现象入手,从而使读者了解分形的物理含义. 本书对分形物理的基础部分——标度变换、迭代函数系统和小波变换等都做了详细的介绍,将物理学中的重正化群变换、湍流的间隙模型、自相似和随机过程、自组织临界现象等都紧密地和分形、分数维相联系.

本书还将分数阶微积分及分数阶动力学引进,以使读者对于这个非线性物理的最新进展有详细的了解.

本书共分为 12 章,第一章介绍物理学中的分形现象,包括相变、逾渗、湍流、地震、气候、异常扩散等. 第二章介绍分数维的物理意义. 除了多尺度的标记、间隙性的表现外,该章还介绍了处处不可微的奇异性及记忆性. 这在一般分形书中是少有的. 第三章介绍标度变换和迭代函数方程,说明幂函数是核心,还介绍了近十年来刚刚出现的分形时空观——尺度的“伽利略变换”和“洛伦兹变换”. 第四章介绍重正化群变换,特别将相变与分岔、突变的奇异性相联系. 第五章介绍宏观尺度和微观尺度分离的布朗运动,以及尺度不能分离的列维运动,从而论述从短程相关到长程相关的过程.

第六章介绍小波变换,着重说明小波变换和分形一样具有标度不变性. 哈尔标度函数由于可以尺度变换及平移,因而可以简洁地用来表示分形. 第七章介绍多重分形,用统计物理中的配分函数来解决物理量不均匀的分形问题. 第八章介绍混沌、湍流和分形、分数维的关系,从而使著名的湍流模型可以用分数维区分开来. 第九章介绍处处连续而不可微的时间序列如何用分形来重构相空间,特别介绍了长记忆性的时间序列. 第十章介绍自组织和自组织临界性以及自然界常见的分形结构. 这些结构都是源于自相似过程. 第十一章介绍分数阶导数的来源,着重从差分的极限入手说明常用的黎曼-刘维尔分数阶导数和积分的表达式是合理的,并特别说明了整数阶导数为零和分数阶导数为零的物理差异. 第十二章主要讲述将传统力学、电学、随机运动的有关动力学方程演变成分数阶的动力学方程的物理.

总之,这 12 章内容全部从物理学出发,数学工具也是为说明多尺度现象而引入,以使之更具体、更合理.

本书得到“中外物理学精品书系”编委会主任王恩哥院士及执行编委张酣教授的大力支持,我们在此表示衷心感谢!

刘式达 刘式适

2014 年 2 月

于北京大学

目 录

第一章 物理学中的分形现象	1
§ 1.1 相变和临界指数	1
§ 1.2 湍流涡旋	3
§ 1.3 逾渗(渗流)	4
§ 1.4 $\frac{1}{f}$ 噪声	6
§ 1.5 雪花形成及生长现象	7
§ 1.6 地震	10
§ 1.7 气候	11
§ 1.8 异常扩散	14
小结	17
第二章 分数维的物理意义	18
§ 2.1 多尺度系统的标记	18
§ 2.2 临界现象和奇异性的特征	23
§ 2.3 间歇(间隙)性的表现	25
§ 2.4 级联过程和自我复制	27
§ 2.5 分形层次结构	30
§ 2.6 处处不可微	35
§ 2.7 记忆性	38
小结	41
第三章 标(尺)度变换和迭代函数方程	42
§ 3.1 标度变换	42
§ 3.2 演化方程的标度变换	45
§ 3.3 物理学中的幂律函数	50
§ 3.4 与标度有关的函数方程	54
§ 3.5 迭代函数方程	57
§ 3.6 迭代变换的非线性物理	59
§ 3.7 尺度的“伽利略变换”和“洛伦兹变换”	63
§ 3.8 复杂结构的涌现	65
小结	66

第四章 重正化群变换	67
§ 4.1 重正化群变换的实质	67
§ 4.2 一维重正化群变换逾渗模型	69
§ 4.3 二维重正化群变换逾渗模型	73
§ 4.4 一维伊辛模型的重正化群	78
§ 4.5 简单生长过程的重正化群	83
§ 4.6 相变和分岔	86
§ 4.7 相变和突变	87
§ 4.8 突变和重正化群	90
小结	92
第五章 从布朗运动到列维运动	93
§ 5.1 布朗运动的概率密度分布	93
§ 5.2 布朗运动下的扩散方程和自相关函数	96
§ 5.3 自相似的随机过程	97
§ 5.4 分数维布朗运动	99
§ 5.5 方差、自相关函数、功率谱等标度指数的关系	104
§ 5.6 列维运动	105
§ 5.7 列维分布图像及应用	111
§ 5.8 广义列维分布	115
小结	118
第六章 小波(子波)变换	119
§ 6.1 傅里叶变换和小波变换描述自然界的异同	119
§ 6.2 小波变换的标度不变性	122
§ 6.3 常用的小波及卷积的含义	123
§ 6.4 小波变换检出 t_0 处信号的突变性	128
§ 6.5 哈尔标度函数	131
§ 6.6 随机函数的哈尔标度函数表示	132
§ 6.7 哈尔标度函数表示分形	138
§ 6.8 二维哈尔标度函数	139
§ 6.9 小波变换的最大值	142
小结	145
第七章 多重分形	146
§ 7.1 多重分形的来源及其描述方法	146
§ 7.2 两尺度康托尔集合的配分函数	151
§ 7.3 多重分形的物理意义	152

§ 7.4	人口分布的多分维过程	152
§ 7.5	均匀和不均匀的 $\tau(q)$	154
§ 7.6	求 $\tau(q)$, $\alpha(q)$ 和 $f(\alpha)$ 的较好方法	157
§ 7.7	二维面包师映射的多分维	160
§ 7.8	三标度的多重分形	161
§ 7.9	分层电阻网络和增长模型的多重分形	164
§ 7.10	混沌动力系统的多重分形	167
小结		170
第八章	混沌、湍流与分形	171
§ 8.1	费根鲍姆常数和两尺度康托尔集	171
§ 8.2	圆映射和标度律	176
§ 8.3	湍流及其统计描述	183
§ 8.4	对数正态分布和列维分布	188
§ 8.5	均匀各向同性湍流的科尔莫戈罗夫模型	191
§ 8.6	间歇湍流的 β 模型	197
§ 8.7	余湍流模型	201
§ 8.8	对数正态模型	202
小结		205
第九章	时间序列的分形	206
§ 9.1	相空间和相轨迹	206
§ 9.2	重构相空间的原因	209
§ 9.3	塔肯斯定理	210
§ 9.4	混沌和噪声	212
§ 9.5	延迟时间和时间序列长度	214
§ 9.6	李雅普诺夫特征指数和科尔莫戈罗夫熵	217
§ 9.7	经验模态分解	219
§ 9.8	长记忆性的时间序列	224
§ 9.9	去趋势涨落分析	226
小结		228
第十章	自组织、自相似和结构	229
§ 10.1	动力系统	229
§ 10.2	反应扩散系统中的斑图	232
§ 10.3	临界性和自组织临界性	236
§ 10.4	沙堆模型	239
§ 10.5	与斐波那契数有关的自相似螺旋结构	241

§ 10.6	由伸长、折叠、扭转而形成的多层次结构·····	246
§ 10.7	可激发系统的行波结构和孤波宽谱结构·····	250
§ 10.8	分形结构出现的原因·····	255
§ 10.9	熵和结构·····	260
小结	·····	261
第十一章	分数阶导数的物理来源及定义 ·····	262
§ 11.1	分数阶导数的物理来源·····	262
§ 11.2	常数的分数阶导数不为零,分数阶导数为零的 函数是幂函数·····	268
§ 11.3	将整数阶导数扩展到分数阶导数的定义·····	270
§ 11.4	分数阶导数的傅里叶和拉普拉斯变换·····	276
§ 11.5	和分数阶导数有关的几个新的函数·····	278
§ 11.6	从分数阶导数看记忆性·····	285
§ 11.7	分数阶微分方程·····	286
§ 11.8	分数阶积分和导数的标度不变性·····	289
小结	·····	290
第十二章	分数阶动力学 ·····	291
§ 12.1	湍流速度场的分数阶导数·····	291
§ 12.2	分数维布朗运动的朗之万方程的解·····	292
§ 12.3	等时降速的轨迹问题·····	293
§ 12.4	分数阶摩擦力和调和振荡·····	295
§ 12.5	分数阶弛豫过程·····	297
§ 12.6	分数维电学·····	300
§ 12.7	分形介质的流体力学方程组·····	300
§ 12.8	异常扩散方程·····	303
小结	·····	307
参考文献	·····	308
索引	·····	311

第一章 物理学中的分形现象

分形(fractal)这个词是 1982 年曼德布罗特(B. B. Mandelbrot)提出的,来自于拉丁文 fractus,意思是断裂和碎片. 所谓“断裂和碎片”,用现在的术语说就是系统有大大小小不同的“尺度”或“涨落”. 而且,这种大小的差别是跨量级的,通常称为无特征尺度现象. 这种情况在物理学中已出现过. 以铁磁相变为例,当温度降低到临界温度 T_c 时,涨落急剧增加,粒子磁矩之间的相互作用压倒了随机热运动,粒子之间的关联越来越强,从而形成了各种尺度的“集团”和“涨落”,见图 1.1. 图 1.1 中各种大小小“集团”磁矩的排列是基本有序的,但有些“集团”的取向仍是随机的. 这里的“尺度”就是指两个相邻磁矩间的距离. 在临界点处,这个距离小到晶格常数,大到无穷大,大大小小的尺度都有,所以是一种无特征尺度现象. 无特征尺度现象有什么特征呢? 简单地说,就是由于尺度跨越好多量级,许多物理量随尺度变化而变化,但却存在不随尺度变化的标度指数和标度律. 下面将以多种物理现象来说明.

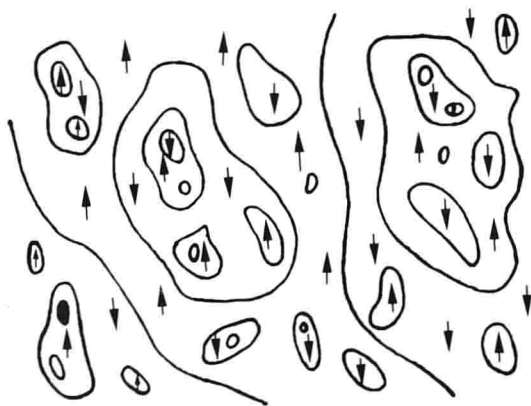


图 1.1 在临界温度 T_c 上磁矩(箭头)的各种“集团”

§ 1.1 相变和临界指数

物理学中的连续相变是大量粒子的集体效应,一块处于高温下的磁铁,由于热噪声,微观粒子的磁矩杂乱无章地排列着,在宏观上表现不出磁性. 但当温度下降到“居里点”的临界温度 T_c 时,突然沿某个方向出现了宏观磁矩,对称性从绕一切可能方向的转动对称,下降到沿宏观磁矩的一个方向的转动对称,出现了

本章开头所说的, 大大小小“集团”磁矩排列有序的磁化状态.

我们把铁磁相变看成是大量晶格上自旋相互作用的结果. 图 1.2(a) 是原来的晶格. 由于有大大小小的“集团”, 著名的伊辛 (Ising) 模型将原来每边两个自旋合起来组成一个小的“集团”的自旋块, 如图 1.2(b) 中方框所示. 这样就组成了四个小“集团”的自旋块, 见图 1.2(c). 类似地, 四个小“集团”还可以合起来构成一个较大的“集团”. 由于磁矩之间的相互作用完全取决于温度 T , 或温度 T

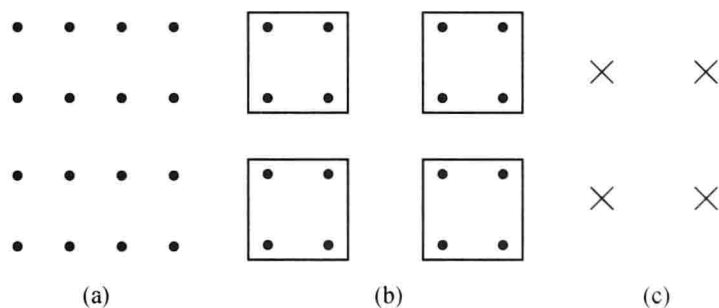


图 1.2 自旋集团模型

和临界温度 T_c 之差

$$T - T_c, \quad (1.1)$$

因此 $T - T_c$ 就是一把“尺子”.

现在图 1.2(c) 的小晶格“集团”之间的距离比原来晶格图 1.2(a) 大了一倍, 即尺子由原来的 $T - T_c$ 变成了 $\lambda(T - T_c)$, 相当于做了一个尺度变换

$$(T - T_c) \rightarrow \lambda(T - T_c), \quad \lambda = 2, \quad (1.2)$$

那么磁矩之间的关联程度就变弱了. 我们用 ξ 表示两个关联自旋的距离, 它称为关联长度.

“尺子”扩大到了 λ 倍, 关联长度却缩小到了原来的 $\lambda^{-\nu}$ (为 $\frac{1}{2}$), 即

$$\xi[\lambda(T - T_c)] = \lambda^{-\nu} \xi(T - T_c). \quad (1.3)$$

(1.3) 式说明, 在铁磁体中描述磁矩相互作用的物理量相干长度 ξ , 随着尺子 $(T - T_c)$ 长度的变化而变化. 这种“尺子”可以跨越好多量级. 到 $T = T_c$ 时, 关联长度为无穷大. 因此, 这一系统可以说是一个没有特征尺度的系统.

容易验证(1.3)式的解是

$$\xi(T) = (T - T_c)^{-\nu}, \quad (1.4)$$

其中 ν 称为临界指数.

由(1.3)式, 得到

$$\frac{1}{2} = \lambda^{-\nu}, \quad (1.5)$$

因此求得

$$\nu = \frac{\ln 2}{\ln \lambda}. \quad (1.6)$$

(1.6)式说明,关联长度 ξ 随尺子变化而变化,但无论尺子如何变,临界指数 ν 是不变的. 这就称为标度不变性. 式子(1.3)式称为标度律.

(1.4)式从物理上说明,在临界点 $T = T_c$ 处,关联长度 ξ 总是无穷大. 自旋为一种取向的“集团”连成一片,占有优势,铁磁体变成了磁体. 铁磁体则由自旋格子中取向的各向同性的对称,降低到有一个特定的方向取向. 这种过程称为对称破缺.

以上说明,相变现象中,在临界点处各种尺度的涨落都有,是一种无特征尺度的分形现象,关联长度 ξ 随尺子的长度变化而变化,但临界指数不变.

§ 1.2 湍流涡旋

大家知道,湍流现象中常伴有大大小小各种尺度的涡旋. 在对流滚滚的雷雨云中,小涡旋的尺度只有几厘米,而大涡旋的尺度可达数千米,尺度跨越 5~6 个量级. 和上节中的大大小小的磁矩“集团”类似,这也是一种无特征尺度现象. 我们设想一个大涡旋是一个单位正方形的旋涡,见图 1.3. 它在湍流中不断分裂出小涡旋. 如第一步它分成三个边长为 $\frac{1}{2}$ 的小正方形的涡旋,之后每个小涡旋又分成边长为 $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ 的三个更小的涡旋,这样的分裂过程一直持续下去,这种过程称为级联(cascade)过程.

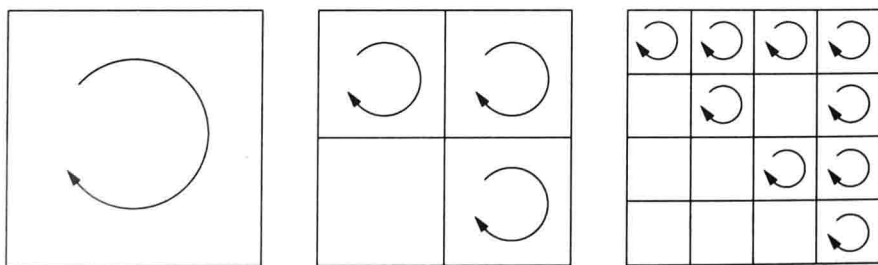


图 1.3 大涡旋分成小涡旋的级联过程

显然涡旋的个数随着尺度减小而增多. 但涡旋的总面积 S 则随着尺度 r 的减小而减小. 设涡旋面积 $S(r)$ 和尺度 r 的关系为

$$S(r) = r^\mu, \quad (1.7)$$

涡旋分裂 n 次后,由图 1.3 容易得到

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]^\mu. \quad (1.8)$$

将(1.8)式两边取对数,求得

$$\mu = 2 - \frac{\ln 3}{\ln 2}. \quad (1.9)$$

(1.9)式说明,尽管涡旋面积 S 随尺度变化而变化,但是指数 μ 不变.

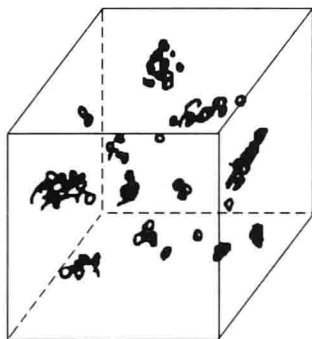


图 1.4 湍流的间歇性

由于随尺度的减小涡旋的面积也减小,表明小涡旋在单位正方形中的概率 $p(r)$ 也越来越小. 若将上面的结果推广到三维立方体,那么由于这种大涡旋分裂成小涡旋的级联过程,最后在三维空间中,就好像只在空间的某些点上有强度很大的涡旋,见图 1.4.

这种小涡旋并不充满空间的状态,称为湍流的间歇性. 第八章将仔细地讨论类似于相变临界指数的湍流能谱的科尔莫戈罗夫(Kolmogorov)指数.

这一节说明,湍流也是一种分形现象.

§ 1.3 逾渗(渗流)

当雨落到地面后,雨水要经过土壤中的土块才能渗透到较深的地下. 小土块只有细沙那样小,大土块可以很大到数十米,雨水只能慢慢地从大小土块的夹缝中逐渐流下去. 雨水向下流通的问题就好比图 1.5 的一个很大的方块,其中放上了一些导电的小黑球. 若放的很少,也就是说它占据方块的概率 p 很小,此时小黑球只能零散地占据着方块的各点. 但是随着方块中的小黑球的增多,方块中就出现了大大小小的黑球“集团”,就如同自旋晶格的“集团”. 当小黑球占据的概率 p 超过一个临界值 p_c 后,黑球有的地方开始连通,就好比水开始渗透到较深的地下了.

图 1.5(a), (b), (c) 分别是大方格中黑球的占据概率 $p=0.35 < p_c$, $p=p_c=0.5$ 和 $p=0.65 > p_c$ 的大小黑球“集团”.

导电的黑球随机地掺在白球中间,占据概率 p 由 0 增加到 1 的过程中,每个 p 对应一定的连通概率. 当 p 刚接近于 p_c 时,黑球连通的概率 P 很小,但是超过 p_c 的值较大时,连通概率 P 就增大很快. 通常黑球连通的概率 P 可表示为连通概率 $P \propto (p - p_c)^\beta$, 其中 β 也称为“临界指数”.

连通概率随 p 的变化,见图 1.6.