厦门大学南强丛书

XIAMENDAXUE NANQIANG CONGSHU

【第五辑】

分数阶差分方程理论

程金发 / 著

厦门大学出版社 XIAMEN UNIVERSITY PRESS 国家一级出版社 全国百佳图书出版单位

厦门大学南强丛书
XIAMENDAXUE NANQIANG CONGSHU
【第五辑】

分数阶差分方程理论

程金发/著

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS
国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

图书在版编目(CIP)数据

分数阶差分方程理论/程金发著. —厦门:厦门大学出版社,2011.1
(南强丛书.第 5 辑)
ISBN 978-7-5615-3847-0

Ⅰ.①分… Ⅱ.①程… Ⅲ.①差分方程 Ⅳ.①O241.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 031934 号

厦门大学出版社出版发行
(地址:厦门市软件园二期望海路 39 号 邮编:361008)
http://www.xmupress.com
xmup @ public.xm.fj.cn
厦门集大印刷厂印刷
2011 年 3 月第 1 版 2011 年 3 月第 1 次印刷
开本:787×1092 1/16 印张:19 插页:3
字数:316 千字 印数:1～2000 册
定价:45.00 元

总　序

厦门大学由著名华侨领袖陈嘉庚先生于 1921 年创办，有着厚重的文化底蕴和光荣的传统，是中国近代教育史上第一所由华侨出资创办的高等学府。陈嘉庚先生所处的年代，是中国社会最贫穷、最落后、饱受外侮和欺凌的年代。陈嘉庚先生非常想改变这种状况，他明确提出：中国要变化，关键要提高国人素质。要提高国人素质，关键是要办好教育。基于教育救国的理念，陈嘉庚先生毅然个人倾资创办厦门大学，并明确提出要把厦大建成“南方之强”。陈嘉庚先生以此作为厦大的奋斗目标，蕴涵着他对厦门大学的殷切期望，代表着厦门大学师生的志向。

在厦门大学建校 70 周年之际，厦门大学出版社出版了首辑《南强丛书》，共 15 部学术专著，影响极佳，广受赞誉，为校庆 70 周年献上了一份厚礼。此后，逢五逢十校庆，《南强丛书》又相继出版数辑，使得《南强丛书》成为厦大的一个学术品牌。值此建校 90 周年之际，再遴选一批优秀之作出版，是全校师生员工的一个愿望。入选这批厦门大学《南强丛书》的著作多为本校优势学科、特色学科的前沿研究成果。作者中有资深教授，有全国重点学科的学术带头人，有新近在学界崭露头角的新秀，他们都在各自的学术领域中受到瞩目。这批学术著作的出版，为厦门大学 90 周年校庆增添了喜悦和光彩。

至此，本《丛书》已出版了五辑。可以说，每一辑都从一个侧面反映了厦大奋斗的足迹和努力的成果，丛书的每一部著作都是厦大发

展与进步的一个见证，都是厦大人探索未知、追求真理、为民谋利、为国争光精神的一种体现。我想这样的一种精神一定会一辑又一辑地往下传。

大学出版社对大学的教学科研可以起到推动作用，可以促进它所在大学的整个学术水平的提升。在90年前，厦门大学就把“研究高深学术，养成专门人才，阐扬世界文化”作为自己的三大任务。厦门大学出版社作为厦门大学的有机组成部分，它的目标与大学的发展目标是相一致的。学校一直把出版社作为教学科研的一个重要的支撑条件，在努力提高它的水平和影响力的过程中，真正使出版社成为厦门大学的一个窗口。厦门大学《南强丛书》的出版汇聚了著作者及厦门大学出版社所有同仁的心血与汗水，为厦门大学的建设与发展作出了一份特有的贡献，我要借此机会表示我由衷的感谢。我期望厦门大学《南强丛书》不仅在国内学术界产生反响，更希望其影响被及海外，在世界各地都能看到它的身影。这是我，也是全校师生的共同心愿。

厦门大学校长
《南强丛书》编委会主任 **朱崇实**

2011年2月26日

序 言

分数微积分与分数微分方程发端于 1695 年 Leibniz 和 L'hospital 的通信对话，亦即 315 年前已提出变元增量为非整数次幂时相关的极限问题. 所以，这里说的积分的次数与微分的阶数不一定是整数，而可以是任意实数甚至是复数的情形. 但此后到 1812 年的一百多年间，虽然有 Euler，Bernoulli 等一大批数学家的关注，分数微积分与分数微分方程仍然只是数学界的一些议论和猜测而已. 自从 1812 年 Laplace 用积分定义一个分数的导数开始到 1974 年间才有许多背景促进了陆陆续续的局部研究，并取得一些进展. 其中 Riemann 引入的定义沿用至今.

本分支系统而快速的发展是因为 1974 年以来由极其广泛的应用背景推动的. 这几十年涌现了大量的论文、专著，举行了多次分数微积分与分数微分方程理论和应用的国际会议. 美国“数学评论”(MR)的分类目录中已列出专项. 同时，由于它在物理学中的应用，还引起了对经典物理定律的杯葛和激烈辩论，呈现出一派欣欣向荣的兴旺局面，然而这一切基本上只限于分数微分方程，对与它相应的分数差分方程则鲜有学者问津. 我们相信广泛开展分数差分方程的研究是势在必行的，因为它对理论和应用都十分重要.

我们可以从两个不同的途径得到分数阶差分方程这一研究对象.

情形一，由已知的整数阶或分数阶微分方程离散化得到；

情形二，由应用问题得到的数据直接构建所要的差分方程.

对情形一来说，无论是整数阶差分方程还是分数阶差分方程，与原先的微分方程比较起来有时有明显的优点. 例如它更贴近应用背景的实际状况，而且易于运用先进的计算机求解手段. 有时在适当的条件下，差分方程解的性态与原先的微分方程解的性态十分接近. 对情形二则要求直接分析此差

分方程解的各种性态.

然而,迄今已有一系列分数微积分与分数微分方程的专著问世,而未见到分数差分方程的系统研究以及相应的专著出版.本书是作者一系列研究工作的总结,也是国内外这个课题的第一本专著.书中体现作者的开创性工作:从提出分数和分与分数差分概念开始,建立完善的分数差分方程概念,推广各种已知方法,到把它们运用到几类重要的分数差分方程基本理论上去,自成体系.事实上,由于所讨论问题很有难度,作者颇费心思,他沿着两个方向而进行工作:其一是推广经典的整数阶差分方程的已知概念与方法,其二是把分数微分方程用到的工具离散化,建立适用于分数差分方程的工具,如分数阶和分及分数阶差分的Z变换公式、离散的Mittag-Leffler函数、离散的Green函数等.

我们相信本书的出版必定会大大推动分数差分方程的各项研究工作.虽然作者在本书的"后记"中谦逊地表示"本书不是通常的严谨教科书",但我认为这是一本合适的研究生教材,阅读此书是涉足本领域的快捷办法.特地推荐给有志于此的青年读者,希望他们由此书出发,深入到分数阶差分方程的未来研究热点,如混沌、周期解与概周期解、稳定性与振动性等,期望能取得领先于国际同行的成绩.

郑祖庥

2010年6月于安徽大学

前 言

众所周知，对于通常的整数阶差分方程及微分方程，由于系统研究的时间相当早，加上诸多大数学家如莱布尼兹、伯努利、欧拉、拉格朗日等的参与，研究成果十分斐然，因而系统的著述也很多，许多经典内容都已经编进了大学本科的教科书中[1-6,18-21]. 并且知道，整数阶差分方程的许多结论都具有与微分方程十分相似的良好的可比性质. 然而关于分数阶常微分方程的探讨可能还是近一二十年前的事情. 例如，S. G. Samko，A. A. Kilbas，O. I. Marichev 在他们的百科全书式的著作[7]中就系统总结了分数阶微积分的成果，并提出了分数阶常微分方程解的存在唯一性等. 对分数阶常微分方程的解法做出本质贡献的，不得不提到 Miller，K. S.，Ross，B.，他们在书[8]中利用超越函数和 Laplace 变换，以及分数阶 Green 函数方法，娴熟而系统地研究了分数阶常系数微分方程，得到大量的精妙结果，极大地引起了数学家们的兴趣和关注. 之后又有两本分数阶微分方程的专著[10-11]相继出版，以及大量的相关文献[9,12-17,26-32]等.

我们自然要问：能不能建立相应的分数阶差分以及分数阶和分理论呢？相应的分数阶差分方程是什么呢？不少数学家致力于这方面的探索，如 S. G. Samko，A. A. Kilbas，O. I. Marichev 在书[7]中 20 节给出了一种分数差分的定义，这种定义对于分数阶微分方程数值解是十分有用的. 然而该定义也有局限性，例如，当 α 为负数时，无法保证其收敛. 另外，这种定义的无限差分形式，使得即使是最简单的

分数差分方程,理论上也无法取得突破求精确解,更不用说得到大家都期望的那样:分数阶差分方程理论也有与分数阶微分方程理论那样良好相似的可比性了. 郑祖庥教授也同样指出[23],对于分数微分方程来说,离散化或者问题提出时便是离散的分数差分方程是不可避免的,迄今只作为近似解计算的出发点,没有对分数差分方程的专门研究,因此,无论从理论还是应用的角度看,这都是极大的缺憾.

本书的目的和内容是:首次独立提出了一种新的分数阶差分、分数阶和分,以及分数阶差分方程的定义,建立了分数阶差分方程的系统理论. 需要特别指出的是,运用我们的这种定义,使得系统求解分数阶差分方程得以成功实现. 当我们把分数差分方程看作是整数差分方程的推广时,自然期望经典差分方程理论的一些重要结果都尽可能地推广到分数阶差分方程中去. 事实上,我们系统地完成了许多相应的工作.

最后四点说明:1. 分数阶和分以及分数阶差分的定义是我们的一种思想创新,随之而来的自然是分数阶差分方程理论的建立了,对此我们深入研究并总结了许多系统的研究成果,因而形成本书的主要内容. 2. 从方程的各种求解过程中我们看到,在许多不同定理的证明中,引入了我们建立的许多个特殊函数及其重要的性质,用到了向后分数阶差分的 Z 变换理论,以及特殊函数的逆 Z 变换的求法、复杂待定系数法、离散 Mittag-Leffler 函数、离散分数 Green 函数、Adomian 分解法等工具和技巧;特别是,对于线性常系数分数阶差分方程,它们的解都是些复杂的特殊函数,这点与通常的线性常系数差分方程的解为简单初等函数大为迥异,因此这种分数阶差分方程的求解也不是平凡的. 3. 当分数阶差分退化到整数阶时,很容易验证:我们的结果与相应的通常熟知的常差分方程结果是完全一致的. 4. 在实变量实步长的分数差分方程中,如果让步长趋于 0,则其极限即为连续型的分数微分方程. 因此,我们的这种具有探索性质的分数差分方程,实质上开辟了分数差分方程理论该领域的研究方向,对连续型

的分数微分方程的近似计算也能提供一些帮助，并希望有更多人参与到其中的深入探究中来.

程金发

2010 年 8 月于厦大海韵园

目录

第一章 分数阶差分及分数阶和分的概念及其性质，莱布尼兹公式

分数阶和分的定义是我们的一个重要首创. 以分数阶和分为出发点，然后再定义各种类型的分数阶差分. 本章研究分数阶差分及分数阶和分的基本性质，以及关于分数阶差分和分的莱布尼兹公式，它们是后续内容的基础.

§1 整数阶向后差分，整数阶和分

让我们以整数阶向后差分与和分为出发点，依此可推出许多相关的重要基本概念.

定义1.1: 设n为非负整数, 称

$$\nabla x(n) \triangleq x(n) - x(n-1)$$

为$x(n)$一阶向后差分, 定义

$$\nabla^k x(n) \triangleq \nabla \nabla^{(k-1)} x(n),$$

并称之为$x(n)$的k阶差分，这里k为正整数.

定义1.2: 称

$$\nabla^{-1} x(n) \triangleq \sum_{r=0}^{n} x(r)$$

为$x(n)$的一阶和分, 定义

$$\nabla^{-k} x(n) \triangleq \nabla^{-1} \nabla^{-(k-1)} x(n),$$

并称之为$x(n)$的k阶和分，这里k为正整数.

定义1.3: 定义

$$(x)^{(n)} \triangleq x(x+1)\cdots(x+n-1),$$

这里n是一个正整数，x是实数，所定义的函数称为上升阶乘函数. 定义：

$$\left[\begin{array}{c} x \\ n \end{array}\right] \triangleq \frac{x(x+1)\cdots(x+n-1)}{n!}.$$

由定义1.1和定义1.2易得

$$\begin{aligned}
\nabla\,\nabla^{-1}x(n) &= \nabla\Big(\sum_{r=0}^{n}x(r)\Big) \\
&= \sum_{r=0}^{n}x(r)-\sum_{r=0}^{n-1}x(r) \\
&= x(n) \triangleq \nabla^{0}x(n),
\end{aligned}$$

且熟知：当k_1为正整数, k_2为整数时, 成立

$$\nabla^{k_1}\nabla^{k_2}x(n) = \nabla^{k_1+k_2}x(n). \tag{1.1}$$

§2 分数阶和分及分数阶差分

在给出分数阶和分$\nabla^{-v}x(n), v>0$的定义之前，我们先看一下整数高阶和分：由定义1.2有：$\nabla^{-1}x(n)=\sum\limits_{r=0}^{n}x(r)$，从而

$$\begin{aligned}
\nabla^{-2}x(n) &= \nabla^{-1}(\nabla^{-1}x(n)) \\
&= \sum_{r=0}^{n}\nabla^{-1}x(r) = \sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{r}x(s) \\
&= \sum_{s=0}^{n}\sum_{r=s}^{n}x(s) = \sum_{s=0}^{n}(n-s+1)x(s),
\end{aligned}$$