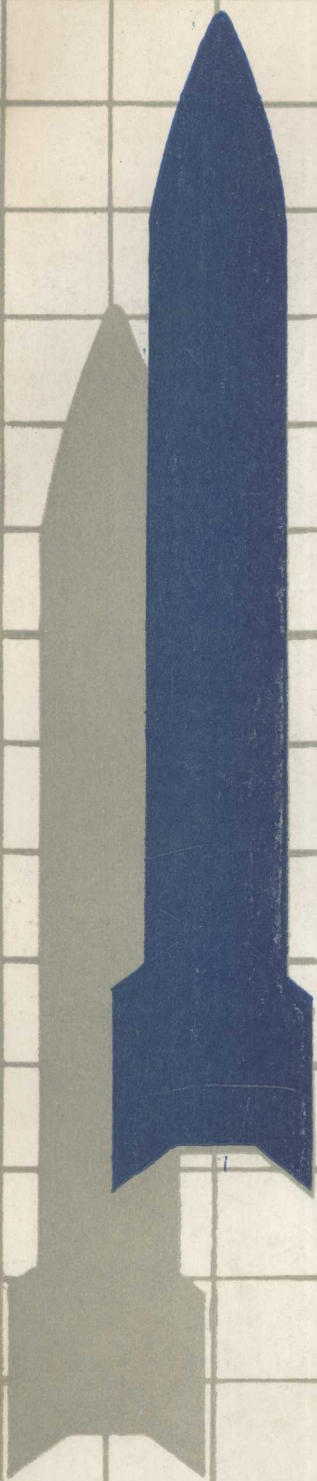


李名兴 主编

导弹 结构力学



北京工业学院出版社

√421
100)

导弹结构力学

李名兴 主编



271410

787.1 导弹结构力学 李名兴 主编 380页 * 16开
1988年3月第1版 1988年3月第1次印刷
ISBN 7-102-01018-7 11.00元

北京工业学院出版社

643230

导弹结构力学

内 容 简 介

本书主要包括：弹性力学基础知识；静定结构分析；静不定结构分析；薄壁壳体自由弯曲自由扭转理论；剪滞问题；板壳弯曲与稳定理论；结构的矩阵分析法；有限单元法简介；结构动力学基础及气动弹性问题简介。

本书可作为高等院校导弹设计专业教材，也可供从事导弹弹体设计、导弹发射架设计、飞机设计及其它工程结构设计的科技人员参考。



导 弹 结 构 力 学

李名兴 主编
北京工业学院出版社出版

＊

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
北京工业学院印刷厂印刷

＊

787×1092毫米 16开本 20.25印张 473千字
1988年6月第一版 1988年6月第一次印刷
ISBN 7-81013-013-7/TJ·2
印数：1-2100册 定价：3.40元

北京工业学院出版社

065810

前 言

本书是导弹设计专业的基础课教材。鉴于该专业一般不设弹性力学及结构动力学课程，故本书除主要讲述结构静力学内容外，在第一章中补充讲述了弹性力学的一些基本概念、基本方程、能量原理及平面问题，在第十一章至第十三章中讲述了结构动力学的一些基础理论及气动弹性问题。

考虑到本课程是为导弹设计专业学生开设的，因此在内容上着重于讲解结构力学的基本理论、基本概念及基本方法，而对结构力学的新发展，如有限单元法，只适当地给以介绍，其目的仅在于使学生对有限单元法有一基本概念的了解，并为使用有限单元法程序打下基础。

本书由李名兴同志主编，左世臣同志及宋浩同志参加了部分章节的编写工作。机械委计算机应用技术研究所宋国枢同志审阅了本书，并提出了许多宝贵意见。

由于编者水平有限，书中难免有错误与不当之处，敬请读者批评指正。

编 者

目 录

绪 论

第一章 弹性力学基础

- § 1-1 弹性力学中的几个基本概念..... (4)
- § 1-2 弹性力学的基本方程及边界条件..... (6)
- § 1-3 平面问题..... (14)
- § 1-4 能量原理..... (17)
- § 1-5 圣维南原理..... (27)
- § 1-6 叠加原理..... (28)
- § 1-7 位移互等定理..... (29)

第二章 静定系统

- § 2-1 几何不变性及不可移动性..... (31)
- § 2-2 静定桁架..... (32)
- § 2-3 静定薄壁结构..... (36)
- § 2-4 静定结构变形的计算、单位载荷法..... (42)

第三章 静不定系统

- § 3-1 引言..... (49)
- § 3-2 静不定系统的解法之一——力法..... (50)
- § 3-3 对称条件..... (54)
- § 3-4 基本系统的选择..... (58)
- § 3-5 静不定薄壁结构内力及位移的计算..... (60)
- § 3-6 静不定系统解法之二——位移法..... (62)
- § 3-7 利用余能原理求静不定系统的内力..... (65)

第四章 棱柱形薄壁壳体的自由弯曲及自由扭转理论

- § 4-1 引言..... (70)
- § 4-2 正应力的确定..... (71)
- § 4-3 开剖面弯曲剪应力的确定..... (76)
- § 4-4 开剖面的弯心..... (80)
- § 4-5 单闭室剖面壳体在弯曲和扭转时剪流的计算..... (81)
- § 4-6 单闭室剖面的弯心..... (84)
- § 4-7 限制扭转与限制弯曲的概念..... (85)

第五章 加劲壁板的剪切扩散

- § 5-1 引言..... (87)

§ 5-2	双等截面桁梁单桁条壁板的集中力扩散	(88)
§ 5-3	双等强度桁梁单桁条壁板的集中力扩散	(90)
§ 5-4	单等截面桁梁单桁条壁板的集中力扩散	(92)
§ 5-5	单等强度桁梁单桁条壁板的集中力扩散	(95)
第六章 板的弯曲理论		
§ 6-1	引言	(99)
§ 6-2	硬板在横向载荷作用下弯曲时的基本微分方程	(102)
§ 6-3	边界条件	(105)
§ 6-4	简支矩形板的解法	(107)
§ 6-5	圆形板的对称弯曲	(112)
§ 6-6	在横向载荷及中面内的力同时作用下板的弯曲微分方程	(117)
第七章 薄壳理论		
§ 7-1	引言	(121)
§ 7-2	圆柱壳的无矩理论	(121)
§ 7-3	旋转面壳的无矩理论	(124)
§ 7-4	圆柱壳在轴对称载荷作用下的有矩理论	(131)
§ 7-5	圆柱壳在非轴对称载荷作用下的有矩理论	(135)
§ 7-6	旋转面壳轴对称弯曲时的边缘效应方程	(143)
§ 7-7	半无限长圆柱形壳的边缘效应计算	(148)
§ 7-8	球形壳边缘效应的计算	(153)
第八章 板壳的稳定性		
§ 8-1	引言	(158)
§ 8-2	板的临界载荷计算	(160)
§ 8-3	薄壁杆的稳定性	(166)
§ 8-4	受压板失去稳定后的工作情况, 减缩系数的概念	(168)
§ 8-5	受剪板失稳后的工作情况	(173)
§ 8-6	圆柱壳与曲板的稳定性	(176)
第九章 结构分析的矩阵法		
§ 9-1	引言	(184)
§ 9-2	矩阵法	(184)
§ 9-3	矩阵位移法	(196)
第十章 有限单元法简介		
§ 10-1	引言	(219)
§ 10-2	平面应力问题的有限单元法	(219)
§ 10-3	SAP6 结构分析程序系统简介	(245)
第十一章 结构动力学基础		
§ 11-1	引言	(260)
§ 11-2	单自由度系统的振动	(260)

§ 11-3 多自由度系统的振动.....	(269)
§ 11-4 连续梁杆的振动.....	(272)

第十二章 结构动力特性计算法

§ 12-1 柔度系数和刚度系数.....	(283)
§ 12-2 集中质量法.....	(285)
§ 12-3 逐次接近法.....	(286)
§ 12-4 传递矩阵法.....	(288)

第十三章 飞行器结构的气动弹性问题

§ 13-1 升力面的扭转变形扩大.....	(297)
§ 13-2 结构弹性对控制面效率的影响——舵面的反操纵.....	(399)
§ 13-3 升力面的弯扭颤振.....	(302)

主要符号表.....	(309)
------------	---------

参考文献.....	(311)
-----------	---------

绪 论

一、导弹结构力学的研究对象与任务

为使工程结构能在各种使用条件下安全可靠地工作，就要求工程结构具有足够的强度、刚度和稳定性。所谓“强度”系指结构能承受载荷的能力，“刚度”系指以限定的变形抵抗载荷的能力，“稳定性”是指结构在载荷作用下维持一定平衡形状的能力。另一方面，为了提高工程结构的性能和经济性，又要求工程结构有较小的重量。显然，这两方面要求是相互矛盾的。为解决这一矛盾，需要解决许多有关问题，其中之一就是正确地计算结构在外载荷作用下产生的内力及变形问题。在结构设计中，如果这一问题解决不好，设计出的结构不是满足不了强度、刚度及稳定性的要求，就是设计出的结构有不必要的重量。导弹工程结构力学就是研究导弹工程结构的组成规律及其在外载荷作用下产生的内力及变形的一门科学。

结构力学是固体力学的一个分支，它与材料力学及弹性力学既有区别又有联系。它们的区别首先表现在研究对象上。材料力学的研究对象主要是单个的杆件，即长度大于宽度和高度的元件。弹性力学除研究杆件外，还研究板、壳及挡土墙、堤坝、地基等实体物。结构力学所研究的对象则是整个结构，如桁架、刚架等。另一方面，这几门学科在研究方法上也有所不同，材料力学采用较多的简化假设，而弹性力学则采用比较严格的假设和比较精确的计算方法，所得到的解答也比材料力学更加准确。在研究方法上，结构力学与材料力学比较接近。结构力学与材料力学、弹性力学之间也存在着密切的联系，后两者是前者的基础，甚至在船舶结构力学及飞行器结构力学中，往往将弹性力学中的一部分内容，如板壳中的一些问题也包括进去。特别应当指出的是，近几十年以来，有不少人曾致力于弹性力学与结构力学的综合应用，使得这两门科学越来越密切结合，例如近几十年发展起来的有限元法，把连续弹性体划分成有限大小的单元构件，然后用结构力学的位移法、力法和混合法求解，显示了弹性力学与结构力学综合应用的良好效果。

二、结构力学的计算模型

由于实际的结构一般都是由许多元件组成的复杂系统，在计算其内力及变形时，如果把影响计算结果的所有因素都考虑进去，往往是办不到的，同时也是不必要的。为了实际计算，常常把实际结构加以简化，忽略掉次要因素，只考虑主要因素，简化后的结构叫结构的计算模型。结构力学的研究对象就是结构的计算模型。

同一种结构由于所考虑的各种因素以及采用的计算工具不同，所选取的计算模型也有所差别。选取计算模型的原则是：

- (1) 抓住主要因素，忽略次要因素，尽量反映结构的实际特征；
- (2) 与采用的计算工具相适应，力求便于力学计算。

同一种结构由于具体情况不同，所选取的计算模型也有所区别。例如在结构的初步设计

阶段，可以采用比较简单的计算模型，而在最后设计中则可以选用较精确的计算模型。由于所使用的计算工具不同，选取的计算模型也不同，用手算的计算模型可取得简单些，而用电子计算机计算，就可以选取较精确的计算模型。

选取结构计算模型十分重要。正确地解决这个问题，要求有丰富的结构设计和力学知识，而且计算模型的选取问题主要是强度计算理论要解决的问题，不属于结构力学的范围。因此，只要求初学者了解选取计算模型的原则及常用的一些计算模型，至于如何确定一个具体结构的计算模型问题，需要在工作实践中，随着各方面知识的积累而逐渐解决。下面介绍在导弹工程结构力学中常用的几种计算模型。

对于导弹工程结构来讲，主要是薄壁结构，如导弹的弹身、弹翼等。薄壁结构是由横向骨架（弹身的隔框，弹翼的翼肋）、纵向骨架（弹身的桁梁、桁条，弹翼的翼梁、桁条）及蒙皮所组成。这种薄壁结构可以简化成杆板结构计算模型，即将横向和纵向骨架看成是在节点处铰接的杆系，这些杆件只承受轴向力，把镶在其间的蒙皮看成边界只受剪应力的板，并且把作用在薄壁结构上的分布载荷按静力等效原则简化成作用在节点上的集中力。这是一种比较经典的计算模型，利用电子计算机用有限单元法计算这种薄壁结构时，可以采用更精确的计算模型。

工程结构还有一些杆系结构，如导弹发动机架、操纵系统等。这类结构根据元件间连接方式及受力特点将它们简化成桁架或刚架计算模型。桁架是由直杆组成的受力系统，各杆之间均以无摩擦的铰链相连接，桁架只承受节点载荷。刚架各杆之间是刚性连接，即在变形过程中各杆件之间的夹角保持不变，刚架的杆件可以是曲杆，并且可以承受非节点载荷。弹身隔框常常也简化成刚架计算模型。

有些弹翼或安定面是整体结构，整体结构一般是由机械铣切或化学腐蚀加工而成的，这类整体结构可以简化为变厚度板计算模型。

三、结构力学的发展简史

与其它科学一样，结构力学也是随着生产的发展与社会的进步而发展起来的一门科学。在十九世纪前半叶，由于资本主义的发展，需要建立许多现代化的工厂建筑物、铁路，大型桥梁，逐渐地形成了一门力学的分支——结构力学。以后，随着资本主义商业贸易的发展，需要先进的交通运输工具，因此结构力学在机械、造船和飞机制造中又得到了进一步应用和发展。概括来说，十九世纪末到二十世纪初，结构力学主要研究梁、拱和桁架的计算理论。到本世纪的二十年代至三十年代，比较集中地研究了刚架计算理论，也就是说在本世纪三十年代以前的结构力学主要研究杆系结构的计算问题，即属于经典结构力学范畴。在这以后，由于船舰及飞机性能的不断提高，火箭导弹技术的出现和发展，人们大量地研究了板、壳及薄壁杆件的计算理论，相应地出现了船舶结构力学、飞机结构力学，这些结构力学是在经典结构力学基础上发展起来的，在这些结构力学中引进了板、壳及薄壁杆理论。

本世纪五十年代开始，由于电子计算机的出现，大大推动了结构力学的发展。对于过去许多无法解决的问题得到了解决，并且为结构力学提出了新的研究方向。特别是在广泛应用矩阵理论和有限单元法以后，在结构力学中开辟了数值解法的新领域，使结构力学发展

到了一个新阶段。

我国是历史悠久的国家,古代劳动人民在建筑和造船技术方面已有很高水平,对结构力学的发展作出过重要贡献。例如建于春秋战国时期的万里长城,建于一千多年前的赵州桥以及其它一些古代建筑。后来由于长期的封建统治和帝国主义的侵略,使我国的力学发展受到了阻碍。新中国成立后,我国在土木建筑、造船、航空与火箭技术各方面所取得的重大成就,都说明我国在结构力学方面又有了重大发展。

由于科学技术的不断发展,生产实践向力学工作者不断地提出一些新课题,如结构非线性问题、结构优化问题等,这些都是结构力学工作者应继续努力研究的问题。

四、结构力学所依据的基本规律

研究每一门科学都是以一些基本的客观规律作为依据的。结构力学(包括弹性力学等固体力学)研究的是可变形固体,它们在外载荷作用下产生的内力及变形应服从三个基本的客观规律,即所有力(包括惯性力)是平衡的;变形体应是连续的,即物体变形后既不断开又不重叠;应力应变存在着一定的反映材料特性的关系。这就是平衡条件、变形连续(或协调)条件及应力应变关系。



第一章 弹性力学基础

§ 1-1 弹性力学中的几个基本概念

为了确定结构元件在外力作用下产生的应力、应变和位移，就需要知道外力与应力的关系、应力与应变的关系以及应变与位移的关系，这些关系正是弹性力学所研究的问题。因此，在本章中将介绍一些弹性力学的基础知识，为讨论以后各章打下一个基础。

作用于物体的外力可以分为体积力和表面力，两者分别简称为体力和面力。

所谓体力，是分布在物体体积内的力，例如重力和惯性力。而所谓表面力，是分布在物体表面上的力，如流体压力和接触力。

物体受外力作用，或由于温度有所改变，其内部将产生内力。为了研究物体在某一点 P 处的内力，假想用经过 P 点的一个截面 mn 将该物体分为 A 和 B 两部分，而将 B 部分撤开，见图 1-1。撤开的部分 B 将在截面 mn 上对留下的部分 A 作用一定的内力。取这截面的一小部分，它包含着 P 点，其面积为 ΔA 。

设作用于 ΔA 上的内力为 ΔQ ，则内力的平均集度，即平均应力为 $\Delta Q/\Delta A$ 。命 ΔA 无限减小而趋于 P 点，假定内力为连续分布，则 $\Delta Q/\Delta A$ 将趋于一定的极限 S ，即

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = S$$

这个极限矢量 S 就是物体在截面 mn 上的、在 P 点的应力。因为 ΔA 是标量，所以应力 S 的极限方向就是 ΔQ 的极限方向。

与物体的应变及材料强度直接相关的是应力在其作用截面的法向和切向的分量，也就是正应力 σ 和剪应力 τ ，见图 1-1。

在物体内部同一点 P ，不同截面上的应力是不相同的。为了分析这一点的应力状态，即各个截面上的应力的大小和方向，在这一点从物体内部取出一微小的平行六面体，它的棱边平行于坐标轴而长度为 $PA = \Delta x$ 、 $PB = \Delta y$ 、 $PC = \Delta z$ ，如图 1-2 所示。将每一面上的应力分解为一个正应力和两个剪应力，分别与坐标轴平行。正应力用 σ 表示。为了表明这个正应力的作用面和作用方向，加上一个坐标角标。例如，正应力 σ_x 是沿着 x 轴方向作用在垂直于 x 轴的平面上。剪应力用 τ 表示，并加上两个角标，前一个角标表示作用面垂直于那一个坐标轴，后一个角标表示作用方向沿那一个坐标轴。例如，剪应力 τ_{xy} 是沿 y 轴方向作用在垂直于 x 轴的

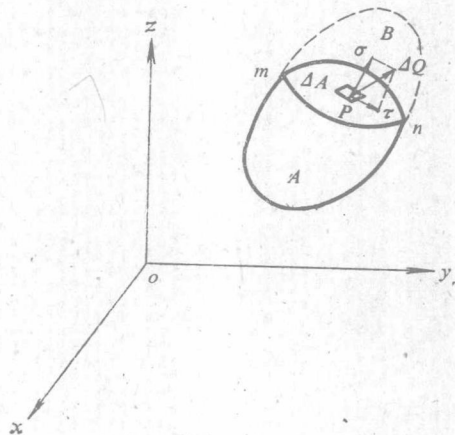


图 1-1

面上。

正应力和剪应力的正负号是这样规定的：如果某一个截面的外法线是沿坐标轴的正方向，这个截面就称为正面，在正面上的应力分量就以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。相反，如果某一个截面上的外法线是沿坐标轴的负方向，这个平面称为负面，负面上的应力就以沿坐标轴负方向为正，沿坐标轴正方向为负。

图 1-2 上所示的应力皆为正。

在图 1-2 中的六面体上有三个正应力分量 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 及六个剪应力分量 τ_{xy} 、 τ_{yx} 、 τ_{yz} 、 τ_{zy} 、 τ_{zx} 、 τ_{xz} 。

在下一节中可以证明，这六个剪应力分量存在下列关系

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

这就是剪应力互等关系，即作用在两个互相垂直的面上并且垂直于该两面交线的剪应力是互等的。因此，剪应力记号的两个角码可以对调。

可以证明，在物体內任意一点，如果已知 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 τ_{xy} 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} 这六个应力分量，就可以求得经过该点的任意截面上的正应力和剪应力。因此，上述六个应力分量完全可以确定该点的应力状态。

所谓应变，就是指物体形状的改变。物体的形状总可以用它各部分的长度和角度来表示。因此，物体的形状改变可以归结为长度和角度的改变。

为了分析物体某一点 P 的应变状态，在这一点沿坐标轴 x 、 y 、 z 的正方向取三个微小的线段 PA 、 PB 和 PC ，见图 1-2。物体变形以后，这三个线段的长度和它们之间的夹角（直角）一般都将有所改变。各线段的每单位长度的伸缩，称为正应变；各线段之间的直角改变称为剪应变。正应变用 ϵ 表示： ϵ_x 表示 x 方向的线段 PA 的正应变，余类推。正应变以伸长为正，缩短为负。剪应变用 γ 表示： γ_{xy} 表示 x 、 y 两方向的线段 PA 和 PB 之间的直角的改变，余类推。剪应变以直角变小为正，变大为负。

可以证明，在物体的任意一点，如果已知 ϵ_x 、 ϵ_y 、 ϵ_z 、 γ_{xy} 、 γ_{yz} 、 γ_{zx} 这六个应变分量，就可以求得经过该点的任一线段的正应变，也可以求得经过该点的任意两个线段之间的角度的改变。因此，这六个应变称为该点的应变分量，它可以完全确定该点的应变状态。

所谓位移，就是位置的移动。物体內任意一点的位移，用它在 x 、 y 、 z 三个坐标轴上的投影 u 、 v 、 w 表示，以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。这三个投影称为该点的位移分量。

一般来讲，弹性体内任意一点的应力分量、应变分量及位移分量都是随该点的位置而改

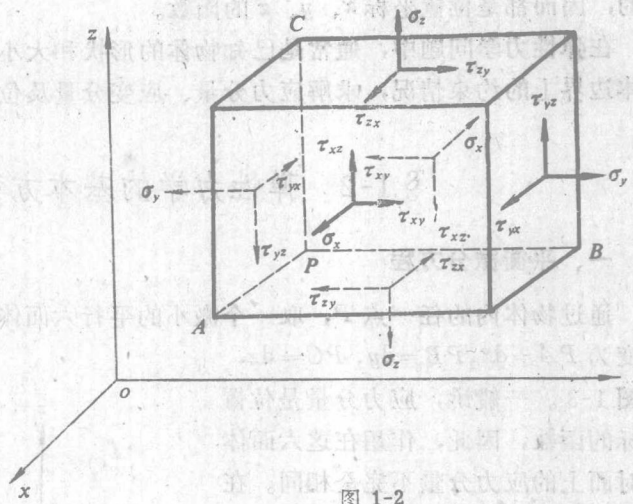


图 1-2

变的，因而都是位置坐标 x, y, z 的函数。

在弹性力学问题中，通常是已知物体的形状和大小、物体的弹性常数及物体所受的力和物体边界上的约束情况，求解应力分量、应变分量及位移分量。

§ 1-2 弹性力学的基本方程及边界条件

一、平衡微分方程

通过物体内的任一点 P ，取一个微小的平行六面体，它的六面垂直于坐标轴，其棱边的长度为 $PA=dx, PB=dy, PC=dz$ ，

见图 1-3。一般讲，应力分量是位置坐标的函数，因此，作用在这六面体两对面上的应力分量不完全相同。在六面体后面的正应力是

$$\sigma_x = f(x, y, z)$$

在六面体的前面，由于坐标 x 得到增量 dx ，因此，这面上的正应力是

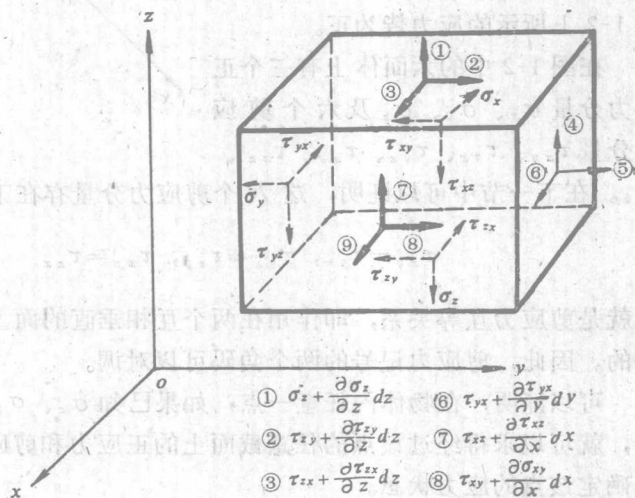
$$\sigma'_x = f(x+dx, y, z)$$

上式展成级数为

$$f(x+dx, y, z) = f(x, y, z)$$

$$+ \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{1}{1 \times 2} \cdot$$

$$\times \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} (dx)^2 + \dots$$



- ① $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} dz$
- ② $\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} dz$
- ③ $\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz$
- ④ $\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy$
- ⑤ $\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy$
- ⑥ $\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$
- ⑦ $\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dx$
- ⑧ $\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$
- ⑨ $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$

图 1-3

可以略去含有一阶以上的高阶微量的所有项，得

$$\sigma'_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$$

其它各应力分量均可依此类推。

首先，以连接六面体前后两面的中心线 ab 为矩轴，列出力矩平衡方程 $\sum M_{ab} = 0$ ，即

$$\begin{aligned} & (\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy) dx dz \frac{dy}{2} + \tau_{yz} dx dz \frac{dy}{2} \\ & - (\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz) dx dy \frac{dz}{2} - \tau_{zy} dx dy \frac{dz}{2} = 0 \end{aligned}$$

除以 $dx dy dz$ ，合并相同项，得

$$\tau_{yz} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy - \tau_{zy} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz = 0$$

略去微量以后，得

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

同样可得

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

这就证明了前面提到的剪应力互等定律。

其次，以 x 轴为投影轴，列出投影的平衡方程 $\Sigma F_x = 0$ ，即

$$(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) dydz - \sigma_x dydz + (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy) dzdx$$

$$- \tau_{yx} dzdx + (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz) dx dy$$

$$- \tau_{zx} dx dy + X dx dy dz = 0$$

由其余两个平衡方程即 $\Sigma F_y = 0$ ， $\Sigma F_z = 0$ ，可得出与此类似的两个方程。将这三个方程化简并除以 $dx dy dz$ ，得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

式中 X 、 Y 、 Z 是 P 点单位体积内的体积力在 x 、 y 、 z 方向的分量。

物体内任一点的六个应力分量都满足 (1-1) 式，该式即是平衡微分方程。

二、物体内任一点的应力状态、边界条件

假定物体在任一点 P 的六个应力分量 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 τ_{xy} 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} 为已知，试求经过 P 点任一斜面上的应力。为此，在 P 点附近取一平面 ABC ，平行于这一斜面，并与经过 P 点而平行于坐标面的三个平面形成一个微小的四面体 $PABC$ ，见图 1-4。当平面 ABC 趋近于 P 点时，平面 ABC 上的应力就成为经过 P 点的该斜面上的应力。

命平面 ABC 的外法线为 N ，其方向余弦为

$$\cos(N, x) = l, \quad \cos(N, y) = m, \quad \cos(N, z) = n$$

设三角形 ABC 的面积为 ΔS ，则三角形 BPC 、 CPA 、 APB 的面积分别为 $l\Delta S$ 、 $m\Delta S$ 、 $n\Delta S$ 。四面体 $PABC$ 的体积用 ΔV 代表。三角形 ABC 上的应力 S_N 在坐标轴上的投影用

X_N, Y_N, Z_N 代表。根据四面体的平衡条件 $\Sigma F_x=0$, 得

$$\begin{aligned} X_N \Delta S - \sigma_x l \Delta S - \tau_{yx} m \Delta S \\ - \tau_{zx} n \Delta S + X \Delta V = 0 \end{aligned}$$

上式除以 ΔS 并移项, 得

$$X_N + X \frac{\Delta V}{\Delta S} = l \sigma_x + m \tau_{yx} + n \tau_{zx}$$

当平面 ABC 趋近于 P 点时, 由于 ΔV 是比 ΔS 为更高一阶的微量, 所以, $\Delta V/\Delta S$ 趋近于零, 于是得到下面 (1-2) 式中的第一式。其余二式可分别由平衡方程 $\Sigma F_y=0$ 及 $\Sigma F_z=0$ 求得, 则

$$\left. \begin{aligned} X_N &= l \sigma_x + m \tau_{yx} + n \tau_{zx} \\ Y_N &= m \sigma_y + n \tau_{xy} + l \tau_{xz} \\ Z_N &= n \sigma_z + l \tau_{xz} + m \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

设三角形 ABC 上的正应力为 σ_N , 则由投影可得

$$\sigma_N = l X_N + m Y_N + n Z_N$$

将 (1-2) 式代入, 并分别用 $\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ 代替 $\tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$, 即得

$$\sigma_N = l^2 \sigma_x + m^2 \sigma_y + n^2 \sigma_z + 2mn \tau_{yz} + 2nl \tau_{zx} + 2lm \tau_{xy} \quad (1-3)$$

设三角形 ABC 上的剪应力为 τ_N , 则由于

$$S_N^2 = \sigma_N^2 + \tau_N^2 = X_N^2 + Y_N^2 + Z_N^2$$

而有

$$\tau_N^2 = X_N^2 + Y_N^2 + Z_N^2 - \sigma_N^2 \quad (1-4)$$

由公式 (1-3) 和 (1-4) 可见, 在物体内任意一点, 如果已知六个应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$, 就可以求得通过该点的任一斜面上的正应力和剪应力。因此, 可以说这六个应力分量完全决定了一点的应力状态。

在特殊的情况下, 如果 ABC 是物体的边界面, 则 X_N, Y_N, Z_N 成为面力在 x, y, z 方向的分量 X, Y, Z , 于是由公式 (1-2) 得

$$\left. \begin{aligned} l \sigma_x + m \tau_{yz} + n \tau_{zx} &= X \\ m \sigma_y + n \tau_{xy} + l \tau_{xz} &= Y \\ n \sigma_z + l \tau_{xz} + m \tau_{xy} &= Z \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

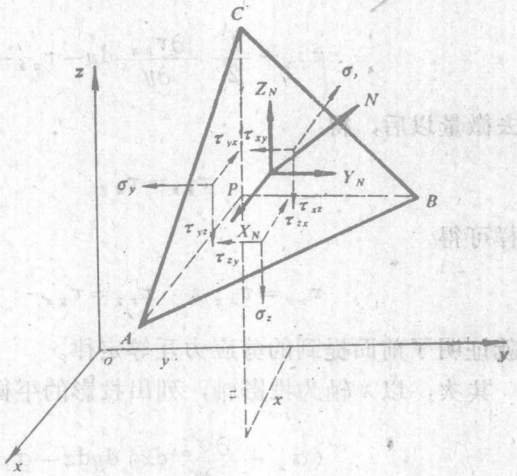


图 1-4

这就是弹性体的应力边界条件，它表示应力分量的边界值与面力分量之间的关系。

三、几何方程

一个弹性体在外载荷作用下，各点发生位移，位移的大小和方向随点的位置不同而不同。也就是说，一点的三个位移分量是所在点坐标的函数，即

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y, z) \\ v &= v(x, y, z) \\ w &= w(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

现在来研究弹性体内任一点的应变与位移的关系。

考虑弹性体中一个微正六面体，其各面的法线分别和坐标轴 x 、 y 、 z 的方向一致。正六面体在 xy 平面上的投影为长方形 $ABCD$ ，变形后的位置为 $A'B'C'D'$ ，见图 1-5。设 A 点的位移分量为 u 、 v 。由于 u 、 v 随点所在的位置

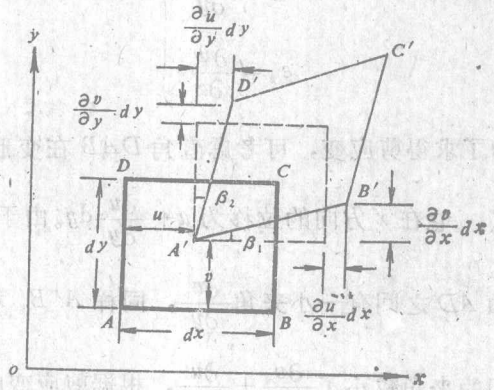


图 1-5

而变，可利用台劳级数在 A 点展开，则 B 点的位移可写为（略去二阶以上微量）

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

及

$$v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

因此， $A'B'$ 在 x 轴上的投影长度为 $dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ ，在 y 轴上的投影长度为 $\frac{\partial v}{\partial x} dx$ ，因此 $A'B'$ 的长度为

$$(A'B')^2 = \left[\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx \right)^2 \right] \quad (b)$$

AB 在 x 方向的正应变为

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB}$$

或

$$A'B' = (1 + \varepsilon_x) AB = (1 + \varepsilon_x) dx \quad (c)$$

将 (c) 式代入 (b) 式并用 $(dx)^2$ 通除，得

$$2\varepsilon_x + \varepsilon_x^2 = 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2$$

由于研究的是小变形，因此， ε 和 u 及 v 的导数以及它们的乘积或平方都是微量，和 ε 以及 $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$ 相比可以略去，于是可得

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

同理可得

为了求得剪应变，可考虑直角 DAB 在变形后的位置。当 A 点移到 A' 点时， D 点移到 D' 点，它在 x 方向的位移为 $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ 。由于 D' 点比 A' 点的在 x 方向的位移较大，所以 $A'D'$ 和 AD 之间有一小夹角 $\frac{\partial u}{\partial y}$ ，同样 $A'B'$ 和 AB 之间也有一小夹角 $\frac{\partial v}{\partial x}$ ，这样 AB 和 AD 之间的夹角减小了 $\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ ，根据剪应变的定义

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

同理

(1-6)及(1-7)两式就是几何方程。

四、形变连续方程

由于弹性体是连续的，变形后仍然保持连续，因此，位移分量 u 、 v 、 w 必须是连续的单值函数。又由几何方程可知六个应变分量是由三个位移分量所决定的，那么六个应变分量不能任意取值，它们之间必然有一定的关系，才能保证 u 、 v 、 w 是 x 、 y 、 z 的连续函数。六个应变分量之间的这种关系称形变连续方程或称为协调方程，推导如下：

将(1-7)第一式对 x 和 y 求导，得

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

由于 u 、 v 是连续函数，所以上式可写成

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (d)$$