

# 全国大学生数学建模竞赛 优秀论文汇编

(1992—2000)

全国大学生数学建模竞赛组委会编

中国物价出版社

登录号	206870
分类号	O141.4-53
种次号	001

# 全国大学生数学建模竞赛

## 优秀论文汇编

(1992—2000)

全国大学生数学建模竞赛组委会编

中国物价出版社

ISBN 7-80122-391-8  
 中国物价出版社  
 北京

1. 全... 2. 全... 3. 全...  
 17.022-23

出版发行：中国物价出版社  
 地址：北京  
 电话：63996111  
 经销：新华书店  
 印刷：北京市兴林印刷厂  
 开本：787×1092毫米  
 版本：2002年3月第1版  
 印数：4200册  
 书号：ISBN 7-80122-391-8  
 定价：43.00元

字千 000 00 小 第  
 幅印

# 全国大学生数学建模竞赛优秀论文集

## 图书在版编目(CIP)数据

全国大学生数学建模竞赛优秀论文汇编:1992~2000/全国大学生  
数学建模竞赛组委会编.—北京:中国物价出版社,2002.3

ISBN 7-80155-391-8

I.全... II.全... III.数学模型—建立模型—高等学校—文集  
IV.022-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 011510 号

出版发行/中国物价出版社(邮政编码:100837)

地址:北京市西城区月坛北小街2号院3号楼

电话:读者服务部 68022950 发行部 68033577)

经销/新华书店

印刷/北京市兴怀印刷厂

---

开本/787×1092毫米 16开

印张/38.5

字数/800 000千字

版本/2002年3月第1版

印次/2002年3月第1次印刷

---

印数/4500册

书号/ISBN 7-80155-391-8/G·16

定价/43.00元

中国物价出版社

## 前 言

1987年我国数学教育界的老师获悉1985年美国出现了一个名为 Mathematical Competition in Modeling(1988年改名为 Mathematical Contest in Modeling, 缩写为 MCM) 的大学生数学建模竞赛, 经过初步了解认为这种竞赛形式对于培养学生、促进数学建模的教学以及推动大学数学教育改革都是有益的, 应该鼓励大学生参加这样的通讯竞赛。1989年我国大学生开始参加美国大学生数学建模竞赛, 参赛同学的反映很好。1990年10月中国工业与应用数学学会(CSIAM)成立, CSIAM 下属的数学模型专业委员会开始考虑创办我国自己的大学生数学建模竞赛。1990年10月上海市工业与应用数学学会举办了“上海市大学生(数学类)数学模型竞赛”, 1991年6月又举办了“上海市大学生(非数学类)数学模型竞赛”。1992年4月陕西省数学教育界举办了“西安市第一届大学生数学模型竞赛”。这些地方性的竞赛为举办全国的竞赛创造了条件。1992年11月27日到29日由CSIAM 数学模型专业委员会组织举办了“1992年全国大学生数学模型联赛”, 10个城市79所院校的314个队参加, 从此我国有了自己的大学生数学建模竞赛(China Undergraduate Mathematical Contest in Modeling, 缩写为 CUMCM)。1992年和1993年的竞赛不仅受到参赛同学和指导教师的欢迎, 而且引起教育行政领导部门的重视。1993年12月教育部(前国家教委)高教司正式发文, 要求在全国普通高等工业学校中陆续开展电子设计、数学建模、机械设计和结构设计竞赛, 并且于1994年3月成立了由教育部高教司和CSIAM 成员共同组成的第一届全国大学生数学建模竞赛组委会, 于是从1994年开始, CUMCM 成为教育部高教司和中国工业与应用数学学会共同主办、每年一届的、面向全国高等院校学生的一项课外科技竞赛活动。

在教育部的领导和指导下, 全国组委会按照“扩大受益面、保证公正性、推动教育改革”方针努力工作, 广大参赛学生以发扬创新意识、团队精神、重在参与、公平竞争的宗旨参加竞赛。在各级教育行政领导部门、各赛区组委会、广大教师和学生的组织、指导、和参与下, 10年来 CUMCM 的规模每年平均以20%以上的速度健康发展, 到2001年有27省市529所院校的3861队参赛, 成为目前全国高校中规模最大的课外科技活动。

通过竞赛不仅培养了一大批既富有创新意识和具体实现能力, 又具有合作观念和拼搏精神的优秀学生, 还造就了一批既有坚实理论基础和用数学建模方法及计算机技术解决实际问题的能力, 又任劳任怨、不计名利、热爱学生、献身祖国教育事业的优秀教师, 这项竞赛对于我国大学数学教育改革也起着很大的推动作用。

数学建模竞赛的出现和发展是有深刻背景的。近几十年来, 数学科学迅速向自然科学、工程、经济、管理和社会科学等各个领域渗透, 在许多方面发挥着越来越重要的作用, 在不少情况下起着举足轻重、甚至是决定性的影响; 数学建模和与之相伴的计算正在成为工程设计中的关键工具, 数学科学与计算机技术结合, 形成了一种普遍的、可以实现的关键技术——数学技术, 并已经成为当代高新技术的一个重要组成部分。“高技术本质上是一种数学技

术”已为越来越多的人所认同。而要用数学方法解决各类问题或实施数学技术,首先要求将所考虑的问题数学化,即建立数学模型,这就使数学建模日益显示其关键作用,成为现代应用数学的一个重要领域。因此,为培养高质量、高层次人才,就不能不重视数学建模这一必备的技能 and 素质的培养,对理工、经济、管理、农林、医学等学科,甚至一些人文、社会学科的学生都应该提出这方面的要求。正是在这样的大背景下大学生数学建模竞赛就应运而生了。

数学建模竞赛不是纸上谈兵,它的赛题是从实际问题中提炼出来的。解决这些问题,从建立数学模型开始,到选择求解途径、方法以及分析计算结果,往往没有现成的方法可以套用。参赛同学必须像参加一个实际的科研项目那样,不仅要发挥个人主观能动性和创造力,而且要全队密切配合、协同作战,才能尽善尽美地作出解答。这可以使同学们亲身体验一下用数学方法去解决实际问题的创造和发现过程,培养他们的创新意识和能力,取得在课堂里和书本上难以得到的宝贵经验,同时也有助于培养他们的团队意识和协作精神。

参加竞赛的同学们的成果充分体现在他们递交给组委会以供评阅的论文中,全国组委会为了让更多的大学生、教师以及关心这项竞赛的人们了解这些成果,给准备参加竞赛的同学以适当引导,每年都根据全国评阅专家组的意见选编、发表部分优秀论文。为庆祝我国大学生数学建模竞赛十周年,全国组委会决定把历年来发表的这些优秀论文汇编成本书,供广大师生及关心这项竞赛的人们参考。这里我们仅作以下说明:

从1992年到2000年每年按A题,B题的顺序编排,1999年开始设大专组的竞赛,赛题为C题和D题;

每道赛题按题目、同学们的论文、命题人和评阅人的文章的顺序编排;

1992年、1993年全国没有统一评阅,所以1992年只有赛题,而1993年只有两篇获北京赛区特等奖的论文和两篇命题人的文章(发表在《数学的实践与认识》1994年第2期上),从1994年开始全国统一评阅,1994年的优秀论文是全国组委会印刷出版的,1995年到2000年的优秀论文均发表在《数学的实践与认识》次年第1期上;

为保持文章原貌,这次汇编只作了符号和文字上的订正,未对已发表的论文进行大的改动,由于同学们的论文是在三天时间内完成的,不可避免地存在着相当多的缺点甚至错误,请读者谅解。

全国大学生数学建模竞赛组委会

2002年2月

# 目 录

1. 施肥效果分析(CUMCM 1992 年 A 题) .....	(1)
2. 实验数据分解(CUMCM 1992 年 B 题) .....	(2)
3. 非线性交调的频率设计(CUMCM 1993 年 A 题) .....	(3)
4. 足球队排名次(CUMCM 1993 年 B 题) .....	(17)
5. 逢山开路(CUMCM 1994 年 A 题) .....	(28)
6. 锁具装箱(CUMCM 1994 年 B 题) .....	(57)
7. 一个飞行管理问题(CUMCM 1995 年 A 题) .....	(84)
8. 天车与冶炼炉的作业调度(CUMCM 1995 年 B 题) .....	(112)
9. 最优捕鱼策略(CUMCM 1996 年 A 题) .....	(145)
10. 节水洗衣机(CUMCM 1996 年 B 题) .....	(190)
11. 零件的参数设计(CUMCM 1997 年 A 题) .....	(220)
12. 截断切割(CUMCM 1997 年 B 题) .....	(276)
13. 投资的收益和风险(CUMCM 1998 年 A 题) .....	(327)
14. 灾情巡视路线(CUMCM 1998 年 B 题) .....	(369)
15. 自动化车床管理(CUMCM 1999 年 A 题) .....	(410)
16. 钻井布局(CUMCM 1999 年 B 题) .....	(441)
17. 煤矸石堆积(CUMCM 1999 年 C 题) .....	(477)
18. 钻井布局(CUMCM 1999 年 D 题) .....	(494)
19. DNA 序列分类(CUMCM 2000 年 A 题) .....	(495)
20. 钢管订购和运输(CUMCM 2000 年 B 题) .....	(538)
21. 飞越北极(CUMCM 2000 年 C 题) .....	(574)
22. 空洞探测(CUMCM 2000 年 D 题) .....	(595)

# 1. 施肥效果分析(CUMCM 1992 年 A 题)

某地区作物生长所需的营养素主要是氮(N)、钾(K)、磷(P)。某作物研究所在该地区对土豆与生菜做了一定数量的实验,实验数据如下列表格所示,其中 ha 表示公顷,t 表示吨,kg 表示公斤。当一个营养素的施肥量变化时,总将另两个营养素的施肥量保持在第七个水平上,如对土豆产量关于 N 的施肥量做实验时,P 与 K 的施肥量分别取为 196 kg/ha 与 372 kg/ha。

试分析施肥量与产量之间关系,并对所得结果从应用价值与如何改进等方面作出估价。

土豆: N

施肥量 (kg/ha)	产量 (t/ha)
0	15.18
34	21.36
67	25.72
101	32.29
135	34.03
202	39.45
259	43.15
336	43.46
404	40.83
471	30.75

P

施肥量 (kg/ha)	产量 (t/ha)
0	33.46
24	32.47
49	36.06
73	37.96
98	41.04
147	40.09
196	41.26
245	42.17
294	40.36
342	42.73

K

施肥量 (kg/ha)	产量 (t/ha)
0	18.98
47	27.35
93	34.86
140	38.52
186	38.44
279	37.73
372	38.43
465	43.87
558	42.77
651	46.22

生菜: N

施肥量 (kg/ha)	产量 (t/ha)
0	11.02
28	12.70
56	14.56
84	16.27
112	17.75
168	22.59
224	21.63
280	19.34
336	16.12
392	14.11

P

施肥量 (kg/ha)	产量 (t/ha)
0	6.39
49	9.48
98	12.46
147	14.38
196	17.10
294	21.94
391	22.64
489	21.34
587	22.07
685	24.53

K

施肥量 (kg/ha)	产量 (t/ha)
0	15.75
47	16.76
93	16.89
140	16.24
186	17.56
279	19.20
372	17.97
465	15.84
558	20.11
651	19.40

(叶其孝提供)

## 2. 实验数据分解 (CUMCM 1992 年 B 题)

组成生命蛋白质的若干种氨基酸可以形成不同的组合。通过质谱实验测定分子量来分析某个生命蛋白质分子的组成时,遇到的首要问题就是如何将它的分子量  $X$  分解为几个氨基酸的已知分子量  $a[i]$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 之和。某实验室所研究的问题中:

$n = 18$ 。  
 $a[1:18] = 57, 71, 87, 97, 99, 101, 103, 113, 114, 115, 128, 129, 131, 137, 147, 156, 163, 186$ 。

$X$  为正整数  $\leq 1000$ 。

要求针对该实验室拥有或不拥有微型计算机的情况,对上述问题提出你们的解答,并就你所研讨的数学模型与方法在一般情形下进行讨论。

(俞文鲑 谭永基提供)

一切科学和工程技术人员的教育必须包括数学和计算科学的更多的内容。数学建模和与之相伴的计算正在成为工程设计中的关键工具。科学家正日益依赖于计算方法,而且在选择正确的数学和计算方法以及解释结果的精度和可靠性方面必须具有足够的经验。对工程师和数学家的数学教育需要变革以反映这一新的现实。(原文: The education of technical personnel of all branches of science and engineering must include increased exposure to the mathematical and computational sciences. Mathematical modeling and associated computations are being critical tools in the engineering design process. Scientists rely increasingly on computational methods and must have sufficient experience in mathematical / computational methods and reliability of the results. The mathematical education of engineers and scientists needs to change to reflect this new reality.)

A. Friedman, J. Glimm, J. Lavery, The mathematical and computational sciences in emerging manufacturing technologies and management practices - SIAM Report on Issues in the Mathematical Sciences - SIAM, 1992, pp. 62 - 62.



### 3. 非线性交调的频率设计 (CUMCM 1993 年 A 题)

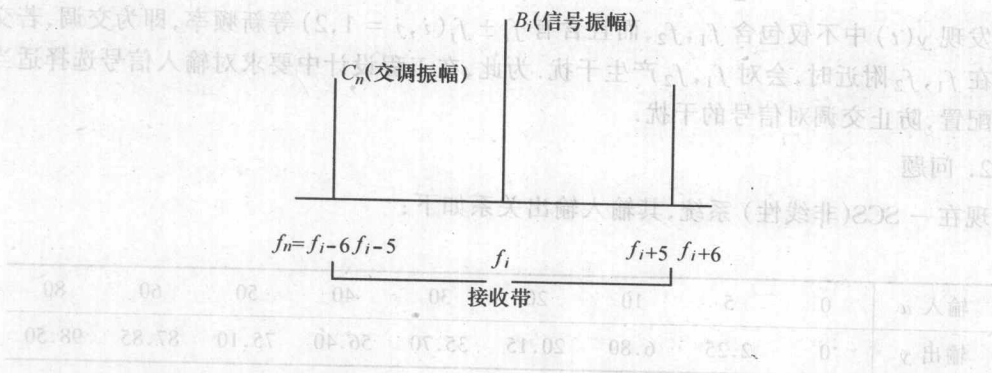
如果一非线性器件的输入  $u(t)$  与输出  $y(t)$  的关系是  $y(t) = u(t) + u^2(t)$  (其中  $t$  是时间), 那么当输入是包含频率  $f_1, f_2$  的信号  $u(t) = \cos 2\pi f_1 t + \cos 2\pi f_2 t$  时, 输出  $y(t)$  中将不仅包含输入信号  $f_1, f_2$ , 而且还会出现  $2f_1, f_1 \pm f_2$  等新的频率成分, 这些新的频率称为交调. 如果交调出现在原有频率  $f_1, f_2$  的附近, 就会形成噪声干扰, 因此工程设计中对交调的出现有一定的要求.

现有一 SCS (非线性) 系统, 其输入输出关系由如下一组数据给出:

输入 $u$	0	5	10	20	30	40	50	60	80
输出 $y$	0	2.25	6.80	20.15	35.70	56.40	75.10	87.85	98.50

输入信号为  $u(t) = A_1 \cos 2\pi f_1 t + A_2 \cos 2\pi f_2 t + A_3 \cos 2\pi f_3 t$ , 其中  $A_1 = 25, A_2 = 10, A_3 = 45$  是输入信号的振幅. 对输入信号频率  $f_1, f_2, f_3$  的设计要求为:

- 1)  $36 \leq f_1 \leq 40, 41 \leq f_2 \leq 50, 46 \leq f_3 \leq 55$ .
- 2) 输出中的交调均不得出现在  $f_i \pm 5$  的范围内 ( $i = 1, 2, 3$ ), 此范围称为  $f_i$  的接收带 (参看下图).
- 3) 定义输出中的信噪比  $\text{SNR} = 10 \lg \frac{B_i^2}{C_n^2}$  (单位: 分贝), 其中  $B_i$  是输出中对应于频率为  $f_i$  的信号的振幅,  $C_n$  是某一频率为  $f_n$  的交调的振幅. 若  $f_n$  出现在  $f_n = f_i \pm 6$  处 ( $i = 1, 2, 3$ ), 则对应的 SNR 应大于 10 分贝 (参看下图).



4)  $f_i$  不得出现在  $f_j$  的接收带内 ( $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$ ).

5) 为简单起见,  $f_i$  只取整数值, 且交调只需考虑二阶类型 (即  $\{f_i \pm f_j\}, i, j = 1, 2, 3$ ) 和三阶类型 (即  $\{f_i \pm f_j \pm f_k\}, i, j, k = 1, 2, 3$ ).

试按上述要求设计输入信号频率  $f_1, f_2, f_3$ .

(北京大学 谢衷洁 提供)

# 非线性交调的频率设计

檀晋轩 邢毅春 郝燕

(首都师范大学数学系, 北京 100037)

指导教师 王尚志 张怡慈 汤玉东

**摘要** 本文讨论了 A 题给出的一类非线性交调的频率设计问题. 首先根据题中给出的数据用最小二乘法求出适合本题要求的输入输出函数, 设计出一种简洁算法用计算机求出了适合要求的解, 然后对解的稳定性进行了讨论. 本文的最后一部分, 对解的各种数学性质做了进一步讨论, 证明了本文主要结果: 给出了适合本题要求的解的充分必要条件(定理 1). 应用这一结果可以直接求出适合本题的频率约束的解.

## 一、问题的提出

### 1. 背景

在信号的输入输出工作过程中, 人们往往遇到噪声干扰问题, 干扰一方面来自系统的外部, 另一方面可能来自非线性系统输出过程中产生的新频率, 称之为交调, 为直观起见我们看一个例子.

设有一非线性器件, 其输入  $u(t)$  与输出  $y(t)$  的关系是:  $y(t) = u(t) + u^2(t)$  ( $t$  为时间), 当输入是包含频率  $f_1, f_2$  的信号  $u(t) = \cos 2\pi f_1 t + \cos 2\pi f_2 t$  时, 输出信号

$$y(t) = 1 + \cos 2\pi f_1 t + \cos 2\pi f_2 t + \frac{1}{2} \cos 4\pi f_1 t + \frac{1}{2} \cos 4\pi f_2 t + \cos 2\pi(f_1 + f_2)t + \cos 2\pi(f_1 - f_2)t.$$

我们发现  $y(t)$  中不仅包含  $f_1, f_2$ , 而且含有  $f_i \pm f_j$  ( $i, j = 1, 2$ ) 等新频率, 即为交调, 若交调出现在  $f_1, f_2$  附近时, 会对  $f_1, f_2$  产生干扰. 为此, 在工程设计中要求对输入信号选择适当的频率配置, 防止交调对信号的干扰.

### 2. 问题

现在一 SCS(非线性) 系统, 其输入输出关系如下:

输入 $u$	0	5	10	20	30	40	50	60	80
输出 $y$	0	2.25	6.80	20.15	35.70	56.40	75.10	87.85	98.50

输入信号:  $u(t) = A_1 \cos 2\pi f_1 t + A_2 \cos 2\pi f_2 t + A_3 \cos 2\pi f_3 t$ .

其中  $A_1 = 25, A_2 = 10, A_3 = 45$  是输入信号的振幅.

对输入信号的频率设计要求为

1) 输入信号频率范围  $36 \leq f_1 \leq 40, 41 \leq f_2 \leq 50, 46 \leq f_3 \leq 53$ .

2) 输出中的交调均不得出现在  $f_i \pm 5$  的范围内, ( $i = 1, 2, 3$ ), 此范围称做  $f_i$  的接收带, 若交调出现在  $f_i \pm 6$  的范围之外, 其影响忽略不计.

3)  $f_i$  不能出现在  $f_i$  的接收带内 ( $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$ ).

4) 定义信噪比  $SNR = 10 \lg \frac{B_i^2}{C_n^2}$  (单位: 分贝).

其中  $B_i$  为输出中对应于  $f_i$  的信号的振幅 ( $i = 1, 2, 3$ ),  $C_n$  为某一频率为  $f_n$  的交调的振幅.

当  $f_n$  出现在  $f_n = f_i \pm 6$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 处, 它已不在  $f_i$  的接收带内. 由于距  $f_i$  的接收带很近, 此时要通过信噪比对  $f_n$  进行讨论. 当  $SNR > 10$  分贝时, 我们认为  $f_n$  对  $f_i$  产生的干扰可忽略不计, 否则  $f_n$  仍对  $f_i$  有干扰.

5) 在实际工作中,  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 的取值是一切可能的非负实数, 对于不同的输入, 输出关系也会有不同的交调类型. 为简化过程, 本问题只取  $f_i$  的整数数值, 且交调只考虑二阶类型 (即  $\{f_i \pm f_j\}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ) 和三阶类型 (即  $\{f_i \pm f_j \pm f_k\}$ ,  $i, j, k = 1, 2, 3$ ). 现在我们的目的就是根据上述要求设计  $f_1, f_2, f_3$  的取值.

## 二、问题的分析

首先要确定输入、输出函数, 一般情况下总是先选取多项式函数来描述输入、输出关系的. 我们基于以下两点确定多项式函数最高次数的. 第一, 从输入的形式  $u(t)$  可以看出, 交调是由于对  $u(t)$  进行乘方运算而产生的,  $u^k(t)$  可能产生某些  $\leq k$  阶类型的交调. 而问题仅要求我们考虑二阶和三阶类型的交调, 最高次数一定是  $\geq 3$  的; 第二, 当我们选用  $\geq 4$  次多项式函数进行拟合时,  $\geq 4$  次项的系数非常小, 以致不会对结果产生影响, 这一点可以从后面稳定性分析中确切地体现出来. 故我们确定输入、输出函数关系为

$$y(t) = b_0 + b_1 u(t) + b_2 u^2(t) + b_3 u^3(t).$$

根据题中数据用最小二乘法便可以确定的系数.

## 三、模型假设

1. 我们认为系统外的干扰忽略不计.
2. 对于  $u(t)$  次数大于等于 4 时带来的交调影响忽略.
3. 对于拟合出的多项式, 对自变量为负的部分也是正确的.

## 四、模型的建立与问题的解

1. 输出函数系数的确定

根据前面分析, 输出函数为以下形式

$$y(t) = b_0 + b_1 u(t) + b_2 u^2(t) + b_3 u^3(t).$$

从实际所给的数据, 可以得出  $y(0) = 0$ . 因此上式可化简为

$$y(t) = b_1 u(t) + b_2 u^2(t) + b_3 u^3(t), \quad (1)$$

为确定 (1) 式的系数, 分别视  $u(t), u^2(t), u^3(t)$  为三个变量,  $X_1(t), X_2(t), X_3(t)$ , 用最小二乘估计对  $y(t)$  进行三元回归.

令

$$\varphi = \sum_{i=1}^9 (y_i - b_1 x_{i1} - b_2 x_{i2} - b_3 x_{i3})^2 \quad (2)$$

$\varphi$  对  $b_1, b_2, b_3$  分别求偏导, 得到  $b_1, b_2, b_3$  使(2) 最小.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^9 y_i x_{i_1} - b_1 \sum_{i=1}^9 x_{i_1}^2 - b_2 \sum_{i=1}^9 x_{i_1} x_{i_2} - b_3 \sum_{i=1}^9 x_{i_1} x_{i_3} = 0, \\ \sum_{i=1}^9 y_i x_{i_2} - b_1 \sum_{i=1}^9 x_{i_1} x_{i_2} - b_2 \sum_{i=1}^9 x_{i_2}^2 - b_3 \sum_{i=1}^9 x_{i_1} x_{i_3} = 0, \\ \sum_{i=1}^9 y_i x_{i_3} - b_1 \sum_{i=1}^9 x_{i_1} x_{i_3} - b_2 \sum_{i=1}^9 x_{i_2} x_{i_3} - b_3 \sum_{i=1}^9 x_{i_3}^2 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

由所给数据解方程组(3), 得出系数  $b_1, b_2, b_3$ :

$$\begin{cases} b_1 = 0.237897, \\ b_2 = 0.0455449, \\ b_3 = -0.00041445, \end{cases} \quad (4)$$

故

$$y(t) = 0.237897u(t) + 0.0455449u^2(t) - 0.00041445u^3(t). \quad (5)$$

(5) 式即为  $y(t)$  的表达式. 同时, 我们又用 Mathematica 软件对题中数据进行函数拟合, 所得结果与上式精度十分接近, 可见(5) 式是较精确的.

## 2. 交调频率

(5) 式确定了  $y(t)$  与  $u(t)$  的关系及有关的交调频率, 为此, 可以将  $u(t)$  的具体表达式  $u(t) = \sum_{i=1}^3 A_i \cos 2\pi f_i t$  代入(5). 在化简过程中, 出现了以下形式的频率和交调:

$$f_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad f_i \pm f_j, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad f_i \pm f_j \pm f_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

由题目所给条件(1) 可知  $f_i \pm f_j (i, j = 1, 2, 3), f_i + f_j - f_k (i, j, k = 1, 2, 3)$  及  $f_i - f_j - f_k (i, j, k = 1, 2, 3, j \neq k)$ , 都远离可能对  $f_i$  产生干扰的频带  $[30, 61]$ , 即它们对输入频率  $f_i (i = 1, 2, 3)$  不会产生干扰, 例如

$$61 < 36 + 41 < f_i + f_j < f_i + f_j + f_k \quad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

$$f_i - f_j - f_k \leq 55 - 36 - 36 < 30 (i, j, k = 1, 2, 3).$$

因此讨论时, 可不考虑含有这些形式的交调的项, 而只对出现在  $[30, 61]$  频带中的形如  $f_i + f_j - f_k (i, j, k = 1, 2, 3)$  的输入信号和交调项进行讨论, 这些交调分别为

$$\begin{aligned} & \textcircled{1} f_1 + f_2 - f_3, \quad \textcircled{2} f_1 + f_3 - f_2, \quad \textcircled{3} f_2 + f_3 - f_1, \\ & \textcircled{4} 2f_1 - f_2, \quad \textcircled{5} 2f_1 - f_3, \quad \textcircled{6} 2f_2 - f_1, \\ & \textcircled{7} 2f_2 - f_3, \quad \textcircled{8} 2f_3 - f_1, \quad \textcircled{9} 2f_3 - f_2. \end{aligned} \quad (6)$$

这样得到了  $y(t)$  中有用的各项的振幅.

① 含有频率  $f_i$  的振幅  $B_i (i = 1, 2, 3), B_i = b_1 A_i + \frac{3}{2} b_3 \sum A_i A_i^2$ .

② 含有三阶交调  $f_i + f_j - f_k (i, j, k = 1, 2, 3, i, j, k \text{ 互不相等})$  形式的振幅, 均为  $C = \frac{3}{2} b_3 A_1 A_2 A_3$ .

③ 含有三阶交调  $2f_i - f_j (i, j = 1, 2, 3, i \neq j)$  形式项的振幅为:  $\frac{3}{4} b_3 A_i^2 A_j$ .

### 3. 算法

为了确定所求的解,我们用条件 4) 中的信噪比进行挑选. 又由条件 5),  $f_i$  只取整数, 这样我们通过计算机得出其离散解. 按以下三步进行:

① 对  $f_1, f_2, f_3$  在互不影响的情况下进行穷举, 讨论所有可能的整数值.

② 对交调进行判断, 即使满足条件 ① 的  $f_i, f_j, f_k$  的形如(6) 式中形式的交调  $f_n$  不能进入任一个  $f_i (i = 1, 2, 3)$  的接收带.

	$f_1$	$f_2$	$f_3$
1.	36	42	55
2.	36	49	55
3.	36	42	54
4.	36	48	54
5.	37	43	55
6.	37	49	55

③ 运用第一节中条件 4), 即对满足以上条件且  $f_n = f_i \pm 6$  的交调, 用信噪比条件进行筛选.

于是得到如上表 6 组结果满足条件 ①②, 经过条件 4) 的筛选后, 只有两组解为最终结果, 即: ① 36, 42, 55 ② 36, 49, 55. 由结果看出,  $f_1, f_3$  均取其边界值, 而  $f_2$  的取值为分别距  $f_1, f_3$  为可能取到的最小距离.

## 五、稳定性分析

### 1. 函数系数的稳定性分析

这里我们讨论所拟合的多项式系数的波动对解的影响, 共有 6 组结果满足(6) 形式的交调, 其中 4 组不合乎信噪比的要求, 2 组是满足的. 即我们要确定各系数的变化范围, 使解仍是解, 非解仍是非解. 经过计算得到以下 3 组不等式组:

$$\begin{cases} 4\left(b_1 + \frac{3}{2}eb_3\right)^2 - 90b_3^2A_1^2A_2^2 > 0, \\ 4\left(b_1 + \frac{3}{2}eb_3\right)^2 - 90b_3^2A_2^2A_3^2 > 0, \\ 16\left(b_1 + \frac{3}{2}eb_3\right)^2 - 90b_3^2\left(\frac{A_1A_2^2}{A_3}\right)^2 \leq 0. \end{cases} \quad (I)$$

$$\begin{cases} 4\left(b_1 + \frac{3}{2}eb_3\right)^2 - 90b_3^2(A_1A_2)^2 > 0, \\ 4\left(b_1 + \frac{3}{2}eb_3\right)^2 - 90b_3^2(A_2A_3)^2 > 0, \\ 16\left(b_1 + \frac{3}{2}eb_3\right)^2 - 90b_3^2\left(\frac{A_2^2A_3}{A_1}\right)^2 \leq 0. \end{cases} \quad (II)$$

$$\begin{cases} 4\left(b_1 + \frac{3}{2}eb_3\right)^2 - 90b_3(A_1A_2)^2 > 0, \\ 4\left(b_1 + \frac{3}{2}eb_3\right)^2 - 90b_3^2(A_2A_3)^2 > 0, \\ 4\left(b_1 + \frac{3}{2}eb_3\right)^2 - 90b_3^2(A_1A_3)^2 \leq 0. \end{cases} \quad (\text{III})$$

其中  $e = \sum_{j=1}^3 A_j^2$ .

当  $\bar{b}_1 = 0.237897, \bar{b}_3 = -0.00041445$ ,

$b_1 = \bar{b}_1 + \delta_1, b_3 = \bar{b}_3 + \delta_3$  时,

上式中

$$\begin{aligned} \left(b_1 + \frac{3}{2}eb_3\right)^2 &= \left(\bar{b}_1 + \frac{3}{2}eb_3\right)^2 + 2\left(\bar{b}_1 + \frac{3}{2}eb_3\right)\left(\delta_1 + \frac{3}{2}e\delta_3\right) \\ &\quad + \left(\delta_1 + \frac{3}{2}e\delta_3\right)^2. \end{aligned}$$

上述  $\delta$  的区间,即为方程系数的波动范围.当系数在此范围内波动时,我们的结果是稳定的.

## 2. 关于输出函数中高次项不影响结果的分析

由于本题仅要求考虑二阶、三阶类型的交调,高于4次函数项亦可能产生这种类型的交调,但由于高于4次项的系数非常小(其量级  $\ll 10^{-5}$ ),故对于某个项要讨论的交调,由高于4次多项式输出函数所产生该交调的振幅,相对3次多项式输出函数所产生该交调的振幅的变化在我们讨论的稳定范围之内,所以仅考虑三次多项式函数是足够精确了.

## 3. 输入频率的微小波动不影响结果的分析

在本题中,我们所得到的输入频率的解都是整数解,但应该考虑到,在实际发射时,由于系统误差及偶然误差,很可能使输入的频率发生微小的变化,根据第六节中的定理1可知这些微小的变化对结果是没有影响的.也就是说,我们得到的这些解组是相当稳定的.

## 六、理论归纳与推广

### 1. 结果分析

我们从上面得到的一系列结果中发现了一些有趣的问题.例如:满足条件①②的频率组有六组

$$(36, 42, 55), (36, 49, 55), (36, 42, 54),$$

$$(36, 48, 54), (37, 43, 55), (37, 49, 55).$$

每一组频率中最大频率与最小频率之差是大于或等于18的,并且第一、二组,第三、四组,第五、六组分别是关于最大和最小频率的中间值对称的.如:(36, 42, 54)与(36, 48, 54)是关于  $\frac{36+54}{2} = 45$  对称的.

另外,我们在检验数据时还发现,求满足要求的频率组的各个限制条件不是彼此独立的,其中  $|f_i - f_j| \geq 6 (i \neq j)$ , 和  $|f_1 + f_3 - f_2 - f_2| \geq 6$  是关键的因素.为此,我们从理

论上做了深入的讨论.

2. 定义和定理

定义 1 以下集合中的元素

$$\{(f_1, f_2, f_3) : 36 \leq f_1 \leq 40, 41 \leq f_2 \leq 50, 46 \leq f_3 \leq 55, f_i \in \mathbf{Z}\}$$

称作可取频率组.

定义 2 以下各式统称交调条件:

$$|f_i - f_j| \geq \sigma (i \neq j), \quad (*)$$

$$|f_i - f_j - f_k| \geq \sigma (i \neq j), \quad (**)$$

$$|af_i + bf_j + cf_k - f_p| \geq \sigma. \quad (***)$$

式中  $i, j, k, p$  取  $1, 2, 3$ ;  $a, b, c$  分别可取  $\pm 1, \sigma = 6$ .

定义 3 称满足交调条件的可取频率组  $(f_1, f_2, f_3)$  为解组, 记作  $[f_1, f_2, f_3]$ .

定义 4 以下各条件统称有效交调条件:

$$|f_i - f_j| \geq \sigma (i \neq j), \quad (*)$$

$$|f_1 + f_3 - f_2 - f_i| \geq \sigma, \quad (I)$$

$$|f_1 + f_2 - f_3 + f_i| \geq \sigma, \quad (II)$$

$$|f_2 + f_3 - f_1 - f_i| \geq \sigma, \quad (III)$$

$$|2f_1 - f_2 - f_i| \geq \sigma, \quad (IV)$$

$$|2f_1 - f_3 - f_i| \geq \sigma, \quad (V)$$

$$|2f_2 - f_1 - f_i| \geq \sigma, \quad (VI)$$

$$|2f_2 - f_3 - f_i| \geq \sigma, \quad (VII)$$

$$|2f_3 - f_1 - f_i| \geq \sigma, \quad (VIII)$$

$$|2f_3 - f_2 - f_i| \geq \sigma, \quad (IX)$$

(其中  $i, j = 1, 2, 3; \sigma = 6$ )

从前面的分析, 很容易验证如下引理.

引理 1 若可取频率组满足有效交调条件, 则其满足交调条件.

定义 5 以下条件为基本交调条件.

$$|f_i - f_j| \geq \sigma (i \neq j), \quad (*)$$

$$|f_1 + f_3 - 2f_2| \geq \sigma. \quad (\star)$$

引理 2 若  $(f_1, f_2, f_3)$  是解组, 则  $f_1 < f_2 < f_3$ .

这可直接由  $36 \leq f_1 \leq 40, 41 \leq f_2 \leq 50, 46 \leq f_3 \leq 55$  推出. 故我们可以假设可取频率组  $(f_1, f_2, f_3)$  满足  $f_1 < f_2 < f_3$ .

引理 3 若  $(f_1, f_2, f_3)$  为可取频率组且满足基本交调条件, 则  $(f_1, f_2, f_3)$  为解组.

证 设  $(f_1, f_2, f_3)$  满足基本交调条件, 则我们可分别验证有效交调条件中的 I - IX.

先验 (I)

$$|f_1 + f_3 - f_2 - f_1| = |f_3 - f_2| \geq \sigma,$$

$$|f_1 + f_3 - f_2 - f_3| = |f_1 - f_2| \geq \sigma.$$

再验 (II)

$$|f_1 + f_2 - f_3 - f_k| = \begin{cases} |f_2 - f_3| \geq \sigma, & k = 1, \\ |f_1 - f_3| \geq \sigma, & k = 2, \\ |f_3 - f_2 + f_3 - f_1| \geq 2\sigma, & k = 3. \end{cases}$$

同理可验(III),对(IV) - (IX)来说

$$|2f_i - f_j - f_k| = \begin{cases} |f_i - f_j| \geq \sigma, & k = i, \\ 2|f_i - f_j| \geq 2\sigma, & k = j; k \neq i, k \neq j, \\ |f_i - f_j| + |f_i - f_k| \geq 2\sigma, & \begin{cases} i = \min\{i, j, k\} \\ \text{或 } i = \max\{i, j, k\}, \end{cases} \\ |f_1 + f_3 - 2f_2| \geq \sigma, & i \text{ 位于 } j, k \text{ 之间.} \end{cases}$$

从而 $(f_1, f_2, f_3)$ 满足有效交调条件,故有 $[f_1, f_2, f_3]$ .证毕.

**引理 4** (解组对称性). 若 $[f_1, f_2, f_3]$ ,且 $(f_1, f_1 + f_3 - f_2, f_3)$ 是可取频率组,则 $[(f_1, f_1 + f_3 - f_2, f_3)]$ .

**证** 事实上,仅须证明 $(f_1, f_1 + f_3 - f_2, f_3)$ 满足基本交调条件(\*)和(★).

(I) 设 $f'_2 = f_1 + f_3 - f_2$ .

(II) 由于 $|f'_2 - f_1| = |f_1 + f_3 - f_2 - f_1| = |f_3 - f_2| \geq \sigma$ ,

(III)  $|f'_2 - f_3| = |f_1 - f_2| \geq \sigma$ .

(VI) 故 $(f_1, f'_2, f_3)$ 满足(\*).

(V) 又因 $|f_1 + f_3 - 2f'_2| = |f_1 + f_3 - 2(f_1 + f_3 - f_2)| = |f_1 + f_3 - 2f_2| \geq \sigma$ ,从而 $(f_1, f'_2, f_3)$ 是解组.证毕.

**注** 由于 $[36 + 6, 55 - 6] \subseteq [41, 60]$ ,故本题中解组是成对出现的.

这样,我们可以得出本文中主要结果.

**定理 1** 设 $36 \leq f_1 \leq 40, 41 \leq f_2 \leq 50, 46 \leq f_3 \leq 55$ ,对任意 $f_1, f_3$ ,存在 $f_2$ 使 $(f_1, f_2, f_3)$ 为解组的充要条件是 $f_3 - f_1 \geq \sigma$ .

**证 充分性** 若 $f_3 - f_1 \geq 3\sigma$ ,又因为 $[f_1 + 6, f_3 - 6] \cap [41, 50] \neq \emptyset$ ,则可取 $f_2 = f_1 + \sigma$ .我们不难验证, $(f_1, f_1 + \sigma, f_3)$ 满足基本交调条件.

$$f_2 - f_1 = \sigma \geq \sigma, f_3 - (f_1 + \sigma) = f_3 - f_1 - \sigma \geq 3\sigma - \sigma > \sigma,$$

$$f_1 + f_3 - 2(f_1 + \sigma) = f_3 - f_1 - 2\sigma \geq 3\sigma - 2\sigma = \sigma.$$

**必要性** 设对任意的 $f_1, f_3$ 存在 $f_2$ ,使 $[f_1, f'_2, f_3]$ 成立.从而满足(\*)和(★),不妨假设: $f'_2 > f_2$ ,故

$$f_2 - f_1 \geq \sigma; |f_1 + f_3 - f_2 - f_2| = |f'_2 - f_2| = f'_2 - f_2 \geq \sigma; f_3 - f'_2 \geq \sigma.$$

$$\text{于是, } f_3 - f_1 = (f_3 - f'_2) + (f'_2 - f_2) + (f_2 - f_1) \geq 3\sigma.$$

这样,我们完成定理的证明.证毕

从这个定理可知,若 $f_3 - f_1 \geq 3\sigma$ ,即至少存在一个 $f_2$ ,使 $[f_1, f_2, f_3]$ 成立.下面的定理

将进一步给出集合 $\{f_2 \mid [f_1, f_2, f_3] \text{ 成立}\}$ 的刻划.由于解组是关于 $\frac{f_1 + f_2}{2}$ 对称的,故仅须讨论:

$$B_2 = \left\{ f_2 \mid [f_1, f_2, f_3] \text{ 成立}, f_2 < \frac{f_1 + f_2}{2} \right\}$$



**定理 2** 对任意  $f_1, f_3$ , 若  $f_3 - f_1 \geq 3\sigma$ , 则  $B_2 = \left[ f_1 + \sigma, \frac{f_1 + f_3 - \sigma}{2} \right]$ , 并且, 仅当  $f_2 = f_1 + \sigma$ , 或  $f_2 = \frac{f_1 + f_3 + \sigma}{2}$  时才须讨论 SNR.

证

1°  $\forall f_2 \in B_2$ .

$$\Leftrightarrow f_3 - f_1 \geq 3\sigma > \sigma, f_2 - f_1 \geq \sigma, f_3 - f_2 \geq \sigma, |f_1 + f_3 - 2f_2| \geq \sigma, f_2 < \frac{f_1 + f_3}{2}.$$

$$\Leftrightarrow f_2 - f_1 \geq \sigma, f_3 - f_1 \geq 3\sigma, f_1 + f_3 - 2f_2 \geq \sigma.$$

$$\Leftrightarrow f_3 - f_1 \geq 3\sigma, f_1 + \sigma \leq f_2 \leq \frac{f_1 + f_3 - \sigma}{2}.$$

$$\Leftrightarrow f_3 - f_1 \geq 3\sigma, f_2 \in \left[ f_1 + \sigma, \frac{f_1 + f_3 - \sigma}{2} \right].$$

2°  $\forall f_2 \in \left( f_1 + \sigma, \frac{f_1 + f_3 - \sigma}{2} \right)$ , 则  $f_2 - f_1 > \sigma$ .

$$f_3 - f_2 > f_3 - \frac{f_1 + f_3 - \sigma}{2} = \frac{f_3 - f_1}{2} + \frac{\sigma}{2} \geq 2\sigma > \sigma,$$

$$\text{又 } f_1 + f_3 - 2f_2 > f_1 + f_3 - 2 \cdot \frac{f_1 + f_3 - \sigma}{2} = \sigma.$$

从而  $[f_1, f_2, f_3]$  不需考虑信噪比 SNR. 证毕.

下面, 我们进一步讨论解组中  $f_1$  和  $f_3$  的取值范围. 设  $a \leq f_1 < f_2 < f_3 \leq b$ , 在本题中,  $a = 36, b = 55$ , 显然,  $b - a \geq 3\sigma$ . 由定理 1 可知, 当  $|f_3 - f_1| \geq 3\sigma$  时, 存在  $f_2$ , 使  $[f_1, f_2, f_3]$  成立.

设  $f_1 = a + m, f_3 = b - n$ , 其中  $m \geq 0, n \geq 0$ , 有  $0 \leq m + n \leq b - a - 3\sigma$ .

于是当  $f_1 \in [a, b - 3\sigma], f_3 \in [a + 3\sigma, b]$  时, 有  $f_3 - f_1 \geq 3\sigma$  能得到解组.

这样, 可以根据定理 1 和定理 2, 依如下步骤很快地找到所有解组.

1. 确定  $m, n, 0 \leq m + n \leq 35 - 36 - 18 = 1$ .

2. 确定  $f_1$  和  $f_3$ :

当  $f_1 = 36$  时,  $f_3 = 54$  或  $55$ . 当  $f_1 = 37$  时,  $f_3 = 55$ .

3. 根据每一组  $f_1, f_3$  确定出  $f_2$ :

当  $f_1 = 36, f_3 = 54$ , 则  $f_2 = 36 + 6 = 42$ , 或  $f_2 = 48$ .

当  $f_1 = 36, f_3 = 55$ , 则  $f_2 = 42$ , 或  $f_2 = 49$ .

当  $f_1 = 37, f_3 = 55$ , 则  $f_2 = 43$ , 或  $f_2 = 49$ .

这样结果与计算机运算结果完全一致.

最后, 我们还应指出定理 1, 定理 2 等结论不仅适用本题所规定的条件, 在一定条件下可以做为一一般的结果.