

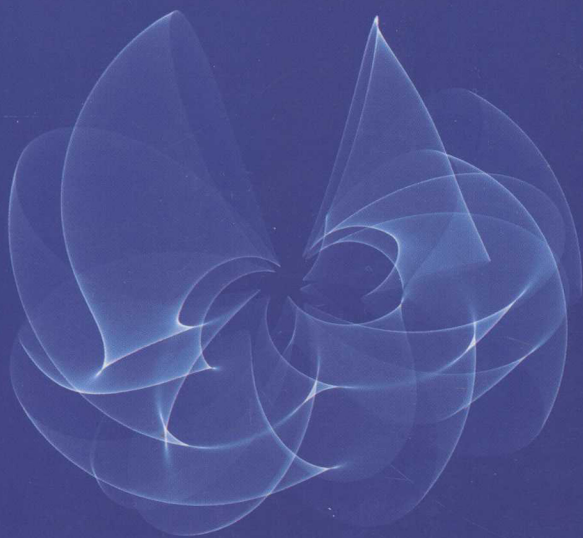
普通高等教育“十二五”重点规划教材

高等数学

(下册)

第三版

上海交通大学数学系 编



GAODENG SHUXUE



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”重点规划教材

高等数学(下册)

(第三版)

上海交通大学数学系编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书内容包括:多元函数的微分法及其应用、重积分及其应用、曲线积分与曲面积分、级数、常微分方程.

本书着重对基本概念、基本理论、基本方法的准确阐述,不过于强调技巧,更有利于提高读者的分析问题和解决问题的能力.这次再版,删减了传统的繁琐、冗长的推导内容,不再列举繁杂的、特殊技巧的例题.

书中文字叙述力求通俗易懂、可读性强、使用面更广,可作为一般本科高等院校非数学专业《高等数学》(微积分)的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/上海交通大学数学系编. —3版.

—上海:上海交通大学出版社,2012

ISBN 978-7-313-00066-8

I. 高... II. 上... III. 高等数学—高等学校—教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 154827 号

高等数学(下册)

(第三版)

上海交通大学数学系 编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 951 号 邮政编码 200030)

电话:64071208 出版人:韩建民

上海颀辉印刷厂印刷 全国新华书店经销

开本:787mm×960mm 1/16 印张:20.25 字数:378千字

1986年6月第1版 2012年8月第3版 2012年8月第13次印刷

ISBN 978-7-313-00066-8/O 定价:33.00元

版权所有 侵权必究

告读者:如发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系
联系电话:021-57602918

第三版前言

高等数学内容之一的微积分学产生于 17 世纪,它是以运动变化的观点认识客观世界,以有限的形式去认识无限的事物.由于高等数学知识在物理、天文、航空、化工、电机、医药、金融、管理、生命科学、社会科学等领域中有着广泛的应用,因此,高等数学是高等院校一门重要的基础理论课程.它不仅是学好其他专业课程的有力工具,而且对于培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力和解决实际问题的能力起着重要的作用.正如 2003 年“工科本科数学教学基本要求”所指出的那样:“数学不仅是一种工具,而且是一种思维模式;不仅是一种知识,而且是一种素养;不仅是一种科学,而且是一种文化.”把我国建设成一个文化强国,离不开数学教学对人才的培养.

在学校里学习的高等数学主要内容是微积分,它是人类思维的伟大成果之一,其基本概念、基本理论和方法已十分成熟,不需要也不应该去改变它.因此,本书将对微积分的内容按照传统的叙述介绍给读者.

本书是在 2009 年上海交通大学数学系编写的《高等数学》(第二版)的基础上由李重华和贺才兴教授两人重新编写修订而成.本书中语言力求通俗简炼,由浅入深;定义、定理要求表述严谨.对原书有些繁冗内容进行删除,对例题和习题中的证明较难及技巧性较高的题目也进行删除,并补充和更换一些新题目.为了便于授课教师布置课后练习,把原先附在每一章后面的习题都分解到每一小节后面.

本书分上、下两册,上册内容包括一元函数微积分、空间解析几何与向量代数;下册内容包括多元函数微积分及其应用、重积分及其应用、曲线积分与曲面积分、级数、常微分方程.本书可作为广大高等院校非数学专业《高等数学》(微积分)的教材或参考书.

本书的编写得到上海交通大学数学系孙薇荣、景继良教授和王承国、王铭副教授的支持,在此仅表示诚挚的感谢.限于编者水平,书中有不当之处,望同仁及读者批评指正.

李重华 贺才兴

2012 年 2 月于上海交通大学

目 录

8 多元函数的微分法及其应用	1
8.1 多元函数的概念	1
习题 8-1	5
8.2 二元函数的极限与连续	6
习题 8-2	9
8.3 偏导数	9
习题 8-3	14
8.4 复合函数的微分法	15
习题 8-4	21
8.5 全微分及其应用	22
习题 8-5	27
8.6 隐函数及其微分法	27
习题 8-6	33
8.7 方向导数与梯度	34
习题 8-7	41
8.8 在几何上的应用	41
习题 8-8	46
8.9 多元函数的极值和二元函数的泰斯公式	47
习题 8-9	63
9 重积分及其应用	64
9.1 二重积分的概念与性质	64
习题 9-1	68
9.2 二重积分的计算	69
习题 9-2	85
9.3 三重积分及其计算	88
习题 9-3	93

9.4	利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分	95
	习题 9-4	102
9.5	重积分应用举例	103
	习题 9-5	116
10	曲线积分与曲面积分	119
10.1	第一类曲线积分	119
	习题 10-1	125
10.2	第二类曲线积分	126
	习题 10-2	134
10.3	格林定理	135
	习题 10-3	140
10.4	平面曲线积分与路线无关 全微分求积	140
	习题 10-4	147
10.5	两类曲面积分及其计算	148
	习题 10-5	159
10.6	高斯定理 斯托克斯定理	160
	习题 10-6	164
10.7	散度与旋度	165
	习题 10-7	169
11	级数	170
11.1	无穷级数的概念及基本性质	170
	习题 11-1	176
11.2	正项级数及其敛散性的判别法	177
	习题 11-2	188
11.3	任意项级数	189
	习题 11-3	194
11.4	函数项级数	194
	习题 11-4	197
11.5	幂级数的收敛半径 幂级数的性质	197
	习题 11-5	206
11.6	泰勒级数	207
	习题 11-6	218

11.7 幂级数的应用	218
习题 11-7	223
11.8 复数项级数 欧拉公式	223
习题 11-8	226
11.9 三角级数 欧拉-傅里叶公式	227
11.10 傅里叶级数	229
11.11 定义在任意区间上的函数的傅里叶级数	235
11.12 傅里叶级数的复数形式	239
习题 11-12	240
12 常微分方程	242
12.1 一般概念	242
习题 12-1	246
12.2 一阶微分方程	246
习题 12-2	260
12.3 高阶微分方程的降阶法	262
习题 12-3	268
12.4 线性微分方程解的结构	269
习题 12-4	275
12.5 常系数线性微分方程	275
习题 12-5	287
12.6 微分方程幂级数解法举例	287
习题 12-6	289
12.7 常系数线性微分方程组	290
习题 12-7	292
习题答案	293

8 多元函数的微分法及其应用

前面介绍了一元函数的微积分及其应用. 下面几章要介绍多于一个自变量的函数即所谓多元函数的微积分以及它们的应用. 本章介绍多元函数的微分法及其应用. 在许多方面, 多元函数的概念和结论是一元函数相应的概念和结论的直接推广. 但是, 需要特别注意的是研究二元函数时, 会出现一些在本质上不同于一元函数的特殊的结论, 至于一般多元函数的情形则与二元函数相类似, 因此本章将较多地研究二元函数.

8.1 多元函数的概念

8.1.1 多元函数的定义

在实际问题中, 经常会遇到多于两个变量之间存在着依赖关系. 先观察一些例题.

例 1 设圆柱体的底半径为 r , 高为 h , 则其体积为

$$V = \pi r^2 h.$$

对于变量 r 和 h 的每一对数值, 对应着 V 的一个确定的数值. V 是 r 和 h 的函数.

例 2 设炮筒与水平面的倾角为 α , 假定空气阻力不计, 则以初速度为 v 发射的炮弹的射程

$$s = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g},$$

其中 g 是重力加速度.

对于变量 α 和 v 的每一对数值, 对应着 s 的一个确定的数值. s 是 α 和 v 的函数.

例 3 理想气体的体积 V 与绝对温度 T 成正比, 与压强 p 成反比, 故有

$$V = \frac{RT}{p},$$

其中 R 是常数.

对于变量 T 和 p 的每一对数值, 对应着 V 的一个确定的数值. V 是 T 和 p 的函数.

例4 单摆的长度 l 、周期 T 和重力加速度 g 三者之间的关系为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

通过对单摆长度 l 及周期 T 的测定,利用上式可求得重力加速度

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

对于变量 l 和 T 的每一对数值,对应着 g 的一个确定的数值. g 是 l 和 T 的函数.

从上面这些例子抽出它们的共性,去掉变量的具体意义,就得到以下二元函数的定义.

定义 设有一平面点集 E ①. 如果对于 E 中每一点 $P(x, y)$ 所对应的一对有序数 x, y , 根据一个确定的法则 f , 有另一个变量 z 的唯一确定的值和它们相对应, 则称变量 z 为变量 x 和 y 的**二元函数**, 或称变量 z 为点 $P(x, y)$ 的**函数**, 记作

$$z = f(x, y) \quad \text{或} \quad z = f(P).$$

其中, x, y 称为**自变量**, z 称为**因变量**. 点集 E 称为函数的**定义域**. 函数值构成的数集 Z 称为函数 $z = f(x, y)$ 的**值域**.

当 $x=a$ 及 $y=b$ 时, 函数 z 的对应值记为

$$z \Big|_{\substack{x=a \\ y=b}} \quad \text{或} \quad f(x, y) \Big|_{\substack{x=a \\ y=b}} \quad \text{或} \quad f(a, b).$$

如果不考虑函数解析式中变量所表示的实际意义时, 那么它的定义域就由解析式子本身来确定. 在实际问题中函数的定义域还要考虑到变量的具体意义. 一般说来, 实际问题的定义域通常比函数解析式的定义域要小.

容易把二元函数的定义推广到 n 元函数, 这只要把平面点集换成 n 维空间的点集. n 维空间是二维空间和三维空间的一种推广与抽象. 把 n 个有序的数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为 n 维空间的点 P 的 n 个(直角)坐标, 记作 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

仿照平面及空间直角坐标系中两点之间的距离, n 维空间中两点 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 、 $Q(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 之间的距离为

$$d = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

把 n 个变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的函数 u 记作

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{或} \quad u = f(p).$$

下面再举几个多元函数的例子.

例5 设三角形的三边为 a, b, c , 则其内角 A 可表示为

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

① 这里点集 E 的元素是平面上的点.

这里 $\cos A$ 是三个变量 a, b, c 的函数.

由于 $|\cos A| \leq 1$, 故应有

$$|b^2 + c^2 - a^2| \leq |2bc|.$$

又因为 a, b, c 为三角形的边长, 故 $a > 0, b > 0, c > 0$, 于是上式化为

$$-2bc \leq b^2 + c^2 - a^2 \leq 2bc,$$

由此得

$$a^2 \leq (b+c)^2 \quad \text{及} \quad (b-c)^2 \leq a^2,$$

故得

$$a \leq b+c, \quad -a \leq b-c \leq a,$$

即

$$a \leq b+c, \quad b \leq c+a, \quad c \leq a+b,$$

故知 $\cos A$ 的定义域为 $a \leq b+c, b \leq c+a, c \leq a+b$.

例 6 设 n 为正整数, 则 n 个数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的算术平均数

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

是一个 n 元函数, 它的定义域为 $x_i \in \mathbf{R} (i=1, 2, \dots, n)$.

可以用不同的符号来表示不同的函数. 例如 $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $v = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $w = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示三个不同的 n 元函数.

8.1.2 平面区域的有关概念

二元函数 $z = f(x, y)$ 的定义域通常是平面上的一个“区域”. 而区域的概念又是以邻域、内点、边界点等概念为基础的.

设 $P_0(x_0, y_0)$ 是平面上一点. 凡满足不等式 $|PP_0| < \delta$ 的点 P 的集合称为 P_0 的 δ 邻域, 用 $U(P_0, \delta)$ 来表示, 即

$$U(P_0, \delta) = \{P \mid |PP_0| < \delta\}.$$

不包含点 P_0 在内的邻域称为去心邻域, 记作

$$\dot{U}(P_0, \delta) = \{P \mid 0 < |PP_0| < \delta\}.$$

用坐标来表示, 则为

$$U((x_0, y_0), \delta) = \{(x, y) \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2\},$$

$$\dot{U}((x_0, y_0), \delta) = \{(x, y) \mid 0 < (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2\}.$$

从几何上看, 点 P_0 的 δ 邻域就是以 P_0 为圆心, δ 为半径的圆周内 (而不包括圆周本身) 的点的全体. 这种邻域称为圆邻域.

设有平面点集 E , 又 $P_0 \in E$. 如果存在 $\delta > 0$, 使 $U(P_0, \delta) \subset E$, 则称 P_0 是集 E 的一个内点.

如果集 E 的每一点都是它的内点,则称 E 为开集.

设 P_0 不属于 E ,记作 $P_0 \notin E$,如果存在 $\delta > 0$,使 $\dot{U}(P_0, \delta)$ 不再含有 E 中的点,则称 P_0 为 E 的外点.

设 P_0 为平面上一点, $P_0 \in E$ 或 $P_0 \notin E$. 如果存在 $\delta > 0$, P_0 的 δ 邻域既含有 E 中的点又含有不属于 E 中的点,则称 P_0 是 E 的边界点.

E 的边界点组成的集称为集 E 的边界.

例如,设集 E 为

$$E = \{P(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\},$$

则点 $(0, 0)$ 及圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 组成了集 E 的边界.

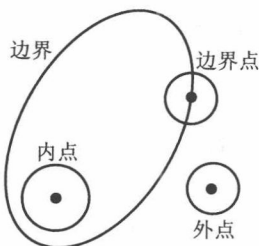


图 8-1

对集 E 的内点、外点、边界点、边界等概念的直观理解如图 8-1 所示.

现在给出区域的定义. 设 E 是一个开集, 又 E 的任意两点都可以用有限条直线所组成的折线连接起来, 而这条折线全部包含在 E 内, 则称 E 为开区域, 或简称区域. 这种可以用全部包含在 E 内的折线把 E 中任意两点连接起来的性质称为连通性, 因此区域是只含有内点的连通集. 一个区域和它的边界构成的集称为闭区域. 例如, 集 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ 是开区域, 又集 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 是闭区域, 而由不等式 $xy > 0$ 确定的点集就不是区域.

区域通常用 D 来表示, 闭区域用 $\bar{D}$ 来表示. 有时, 在不需要区分是开区域还是闭区域时, 仍用 D 表示它们.

如果存在 $K > 0$, 使集 E 全部包含在原点的 K 的邻域内, 即若 $E \subset U(0, K)$, 则称 E 为有界集. 当 E 为区域时称为有界(区)域; 当 E 为闭区域时称为有界闭(区)域. 如果不存在这样的正数 K , 则称 E 为无界集、无界(区)域.

一般说来, 二元函数 $z = f(x, y)$ 的定义域通常是平面上的一个或几个区域. 这些区域经常是由一条或若干条简单连续曲线所围成的. 设曲线用参数方程

$$x = x(t), y = y(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

给出, 其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 都是 t 的连续函数. 如果又有以下性质:

属于区间 $[a, b]$ 内的任意两个不同的 t 值 t_1 及 t_2 , 对应着曲线上不同的两个点, 则此曲线称为简单连续曲线.

例如, 椭圆 $x = a \cos t, y = b \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$, 星形线 $x = a \cos^3 t, y = b \sin^3 t (0 \leq t \leq 2\pi)$ 都是简单连续曲线, 但是曲线(称为环索线) $x = a \cos 2t, y = a \cos 2t \tan t (-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2})$ 就不是简单连续曲线, 因为当 $t = -\frac{\pi}{4}$ 及 $t = \frac{\pi}{4}$ 时, 对应着同一点

$(0,0)$ (图 8-2). 它的直角坐标方程为

$$y^2 = x^2 \frac{a-x}{a+x}.$$

对于三维空间以及 n 维空间来说, 也有类似于平面上的“邻域、内点、外点、边界点、开集、(开)区域、闭区域、有界域、无界域”等概念.

一般说来, 二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形是空间的一张曲面(图 8-3), 它在 xOy 平面的投影就是函数的定义域.

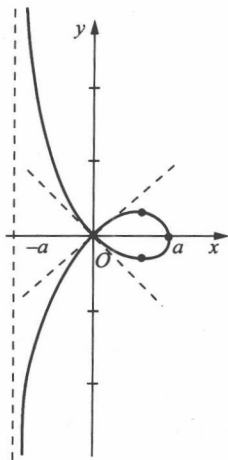


图 8-2

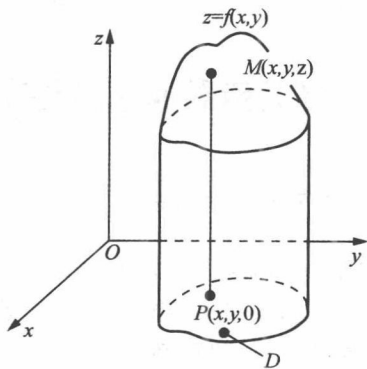


图 8-3

例 7 函数 $z=ax+by+c$ (其中 a, b, c 是常数) 的图形是不平行于 z 轴的一张平面.

例 8 函数 $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ (其中 a, b 是正常数) 的图形是顶点在原点, 开口向上的椭圆抛物面.

习题 8-1

1. 求下列函数的定义域, 并作图表示:

(1) $z = \arcsin \frac{x}{3} + \sqrt{xy}$;

(2) $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$;

(3) $z = x + \sqrt{y}$;

(4) $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$;

(5) $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}}$ ($R > r > 0$);

(6) $z = \frac{1}{\sqrt{\ln xy}}$.

2. 试用不等式表示由抛物线 $y=x^2$ 和 $y^2=x$ 所围成的区域(含边界).

3. 设 $f(x, y) = xy + \frac{x}{y}$, 求 $f(\frac{1}{2}, 3)$ 及 $f(1, -1)$.

4. 设 $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy \tan \frac{x}{y}$, 求 $f(tx, ty)$.

5. 设 $f(x+y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2$, 求 $f(x, y)$.

6. 设 $f(\frac{y}{x}) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} (x, y > 0)$, 求 $f(x)$.

7. 设 $z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - 1)$, 若当 $y=1$ 时 $z=x$, 求函数 f 和 z .

8.2 二元函数的极限与连续

8.2.1 二元函数的极限

所谓二元函数 $z=f(x, y)$ 的极限, 按通俗的讲法, 就是当自变量 x 趋于 x_0 和 y 趋于 y_0 时, 或者说, 当点 $P(x, y)$ 趋于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时, 函数 $z=f(x, y)$ 趋于定常数 A . 精确地说, 设函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的邻域内有定义(点 P_0 本身可以除外). 如果存在定常数 A , 对于任意给定的正数 ϵ , 存在正数 δ , 当

$$0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$$

时, 恒有不等式

$$|f(x, y) - A| < \epsilon$$

成立, 则称 A 为函数 $z=f(x, y)$ 当 $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ 时(或 $P \rightarrow P_0$ 时)的(二重)极限, 记作

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A \quad (1)$$

或

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A. \quad (2)$$

二元函数 $z=f(x, y)$, 当 $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ 时的极限为 A 的几何意义是: 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的去心邻域内的曲面 $z=f(x, y)$ 介于两平面 $z=A-\epsilon$ 与 $z=A+\epsilon$ 之间.

例1 试证 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sin \frac{x^3 + y^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.

证 由于 $\left| \sin \frac{x^3 + y^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| \leq \left| \frac{x^3 + y^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right|$

$$\leq \frac{|x|^3 + y^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} < \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (\text{当 } |x| < 1, |y| < 1).$$

因此,对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta = \min(1, \epsilon)$, 当

$$0 < x^2 + y^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 < \delta^2$$

时,有

$$\left| \sin \frac{x^3 + y^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| < \epsilon,$$

故知 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sin \frac{x^3 + y^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.

例 2 试证 $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} (x^2 + y^2) = 5$.

证 $|x^2 + y^2 - 5| = |(x^2 - 1) + (y^2 - 4)| \leq |x + 1||x - 1| + |y + 2||y - 2|$.

由于 $x \rightarrow 1, y \rightarrow 2$, 故不妨设 $|x - 1| < 1, |y - 2| < 1$, 从而知

$$|x + 1| < 3, |y + 2| < 5,$$

故

$$|x^2 + y^2 - 5| < 3|x - 1| + 5|y - 2| < 5[|x - 1| + |y - 2|].$$

对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta = \min\left(1, \frac{\epsilon}{10}\right)$, 当

$$|x - 1| < \delta, |y - 2| < \delta, (x, y) \neq (1, 2)$$

时,有

$$|x^2 + y^2 - 5| < \epsilon.$$

由此得 $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} (x^2 + y^2) = 5$.

例 3 试问当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, 函数 $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ 是否有极限?

解 函数 $f(x, y)$ 除点 $(0, 0)$ 外都有定义. 考察点 (x, y) 沿直线 $y = kx$ 趋于点 $(0, 0)$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow kx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{2k}{1 + k^2}.$$

这个极限与直线的斜率 k 有关, 它随着 k 取不同值而改变, 因此 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在.

从上述例题可知: 当点 $P(x, y)$ 沿着不同的直线趋于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时, $f(x, y)$ 有不同的极限, 从而断定 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 不存在.

8.2.2 二元函数的连续性

与一元函数的情形一样, 如果

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

或写成点函数的形式

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0),$$

则称函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 连续, 即 $z = f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 处的极限值等于 $f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 处的函数值 $f(x_0, y_0)$, 则 $f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 处连续.

倘若要用 $\epsilon - \delta$ 的术语来描述 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的连续性, 那就是:

对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$,

当

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$$

时, 有

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$$

或对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$,

当

$$|PP_0| < \delta$$

时, 有

$$|f(P) - f(P_0)| < \epsilon.$$

如果函数在点 P_0 不连续, 则称 P_0 为函数的间断点.

如果函数 $f(x, y)$ 在区域 D 的每一点连续, 则称函数在区域 D 连续. 例如, 函数 $\ln(1 - x^2 - y^2)$ 在区域 $D: x^2 + y^2 < 1$ 连续, 而函数 $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 在闭区域 $\bar{D}: x^2 + y^2 \leq 1$ 上连续.

二元连续函数有与一元连续函数相类似的性质.

定理 1(最大值最小值定理) 设函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 $\bar{D}$ 上连续, 则它在该区域上至少有一次取得最大值 M 以及最小值 m . 即至少存在一点 (ξ_1, η_1) 以及一点 (ξ_2, η_2) , 使

$$m = f(\xi_2, \eta_2); f(\xi_1, \eta_1) = M.$$

从这条定理可以推知, 如果函数 $f(x, y)$ 在有界闭域 $\bar{D}$ 上连续, 则它在 $\bar{D}$ 上必定有界. 也就是说, 存在 $K > 0$, 使

$$|f(x, y)| < K, \quad (x, y) \in \bar{D}.$$

定理 2(介值定理) 设函数 $f(x, y)$ 在有界闭域 $\bar{D}$ 上连续, 又若 μ 为介于最小值 m 及最大值 M 之间的任意一个数: $m < \mu < M$, 则至少存在一点 $P(\xi, \eta)$, 使

$$f(\xi, \eta) = \mu.$$

这条定理的特例是:

设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 连续, 又如果存在两点使 $f(x, y)$ 取得异号的值, 则

$f(x, y)$ 至少有一次取得零值. 也就是说, 存在 $P(\xi, \eta)$, 使

$$f(\xi, \eta) = 0.$$

连续函数的和、差、积、商(分母不为零时)仍为连续函数.

对于多元函数来说也有复合函数的概念.

设 $z = f(u, v, w)$, 而 $u = u(x, y), v = v(x, y), w = w(x, y)$, 则称变量 z 通过中间变量 u, v, w 为自变量 x 和 y 的复合函数.

连续函数的复合函数仍是连续函数.

与一元函数类似, 根据多元函数的和、差、积、商(分母不等于零)以及复合函数的连续性, 可以得到: 多元初等函数在其定义区域内的任何点都是连续的.

习题 8-2

求下列函数的间断点或间断线:

$$(1) z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$(2) z = \frac{1}{\sin \pi x} + \frac{1}{\sin \pi y};$$

$$(3) z = \frac{1}{y^2 - 2x};$$

$$(4) z = \frac{1}{x - y}.$$

8.3 偏导数

8.3.1 偏导数概念

设有一定义在区域 D 内的二元函数 $z = f(x, y)$, D 内一点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的函数值 $z_0 = f(x_0, y_0)$. 将 y 的值 y_0 固定, 然后让 x 得到增量 Δx , 点 $P(x_0 + \Delta x, y_0)$ 处的函数值为 $z = f(x_0 + \Delta x, y_0)$. 称

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 关于变量 x 的偏增量, 记作

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

类似地, 把

$$f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

称为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 关于变量 y 的偏增量, 记作

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

如果当 x, y 分别在 x_0, y_0 得到增量 $\Delta x, \Delta y$ 时, 则

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

称为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的全增量.

如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数,可以用下列符号之一来表示:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}, \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}, z'_x \Big|_{(x_0, y_0)}, \\ f'_x(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)}, z'_x(x_0, y_0), f'_x(x_0, y_0).$$

同理,如果

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

存在,则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 y 的偏导数,相应的符号为

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)}, \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)}, z'_y \Big|_{(x_0, y_0)}, \\ f'_y(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)}, z'_y(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0).$$

当点 $P_0(x_0, y_0)$ 变动时,就得到函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的偏导函数. 对 x 及 y 的偏导函数分别用下列符号之一来表示:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}; z'_x, z'_y; f'_x(x, y), f'_y(x, y).$$

在不致于发生混淆时,偏导函数简称为偏导数.

有时可把 $z'_x, z'_y, f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ 符号中的撇号省略而记作 $z_x, z_y, f_x(x, y), f_y(x, y)$.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的两个偏导数存在,则称函数在该点是可导的.

现在来看多元函数与一元函数的一个不同点:对于一元函数来说,可导必定连续;对于多元函数来说,这个结论不再成立. 例如,设函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 有

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0.$$

同理

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(0,0)} = 0.$$