

吴德涛 主编

管理数学

下册

上海科学技术出版社

责任编辑 陈泽加

(沪)新登字第 305 号

管 理 数 学

下 册

吴德涛 主编

上海科学普及出版社出版

(上海曹杨路 500 号 邮政编码 200063)

新华书店上海发行所发行 上海长鹰印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 21.25 字数 514000

1991 年 11 月第 1 版 1991 年 11 月第 1 次印刷

印数 1—5000

ISBN 7-5427-0457-5/G·139 定价: 8.70 元

目 录

第十三章 行列式	1
§13-1 二阶与三阶行列式	1
§13-2 行列式的性质	4
§13-3 高阶行列式	8
§13-4 线性方程组求解的克莱姆法则	10
第十四章 矩阵	15
§14-1 向量	15
§14-2 矩阵及其运算	21
第十五章 线性方程组	35
§15-1 线性方程组解的个数	35
§15-2 线性方程组解的结构	39
第十六章 二次型与矩阵的特征值	47
§16-1 二次型和二次型标准形	47
§16-2 二次型的正定和负定	56
第十七章 随机事件及其概率	60
§17-1 随机事件和样本空间	60
§17-2 随机事件的概率	63
§17-3 条件概率	68
§17-4 事件的独立性	71
第十八章 随机变量及分布	78
§18-1 随机变量	78
§18-2 离散型随机变量的概率分布	79
§18-3 随机变量的分布函数	83
§18-4 连续型随机变量的概率密度	85
§18-5 随机变量的函数的分布	90
§18-6 二维随机变量及其分布	93
第十九章 随机变量的数字特征	108
§19-1 随机变量的数学期望	108
§19-2 随机变量的方差	115
§19-3 常用分布的数学期望和方差	118
§19-4 协方差和相关系数	122
§19-5 矩和协方差矩阵	125
第二十章 大数定律和中心极限定理	129
§20-1 大数定律	129

§20-2 中心极限定理	131
第二十一章 样本及其分布	135
§21-1 随机样本和统计量	135
§21-2 抽样分布	137
第二十二章 统计估计	146
§22-1 参数的点估计	146
§22-2 估计量的评选标准	151
§22-3 参数的区间估计	154
第二十三章 假设检验	162
§23-1 基本概念	162
§23-2 参数的假设检验	165
§23-3 分布的假设检验	173
第二十四章 方差分析和回归分布	181
§24-1 单因素方差分析	181
§24-2 双因素方差分析	191
§24-3 一元线性回归	200
§24-4 一元非线性回归	208
§24-5 多元线性回归	213
§24-6 多元非线性回归	216
第二十五章 随机过程简介	226
§25-1 随机过程的基本概念	226
§25-2 马尔可夫过程	230
§25-3 平稳随机过程	234
第二十六章 普通集合和模糊集合	238
§26-1 绪言	238
§26-2 普通集合及其运算	238
§26-3 模糊集合及其运算	242
第二十七章 模糊集合论的基础知识	251
§27-1 模糊集合隶属函数的确定方法	251
§27-2 模糊集合和普通集合的转化	262
§27-3 模糊关系	266
§27-4 模糊矩阵	272
§27-5 模糊概率	277
第二十八章 模糊数学的应用	283
§28-1 模糊综合评判	283
§28-2 模糊聚类分析	294
参考答案	307
附录	322

第十三章 行列式

本章先介绍二阶及三阶行列式的概念和性质,然后将其推广到 n 阶行列式,在此基础上讨论 n 阶线性方程组的克莱姆法则解法。

§13-1 二阶与三阶行列式

本节从讨论方程组着手,引入二阶及三阶行列式的概念。

一、二阶行列式

给定的一个二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (13-1)$$

$$(13-2)$$

用加、减消元法来解上述方程组,先以 b_2 乘第一个方程,以 b_1 乘第二个方程,然后两式相减,就能消去 y 。得到:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1 \quad (13-3)$$

以 a_2 乘第一个方程,以 a_1 乘第二个方程,然后两式相减,得到:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1 \quad (13-4)$$

设 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, 则由 (13-3) 和 (13-4) 得到原方程组的解为:

$$\begin{cases} x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{cases} \quad (13-5)$$

$$(13-6)$$

在上面解中,分母都是 $a_1b_2 - a_2b_1$, 可用以下记号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

来表示,即 $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

其中, a_1, a_2, b_1, b_2 叫做行列式的元素, a_1, b_1 在第一行, a_2, b_2 是第二行; 同样分别称 a_1, a_2, b_1, b_2 依次是第一列, 第二列 $a_1b_2 - a_2b_1$ 叫做行列式的展开式, 亦是此行列式的值。由于行列式 D 是由原方程组中未知数 x, y 的系数按原来的位置次序组成的, 故称 D 为这个方程组的系数行列式。

显见, (13-5) 式的分子是把 D 中的 a_1, a_2 依次换成 c_1, c_2 的结果;

同样, (13-6) 式的分子是把 D 中的 b_1, b_2 换成 c_1, c_2 的结果。于是 (13-5) (13-6) 两式的分子依次为两个二阶行列式。

$$D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

由 $D \neq 0$, 可得

$$x = \frac{D_1}{D}, \quad y = \frac{D_2}{D} \quad (13-7)$$

把(13-7)式中的 x, y 值代入原方程组, 可以验证 $x = \frac{D_1}{D}, y = \frac{D_2}{D}$ 是方程组的唯一的一组解.

例 13-1 解下列线性方程组

$$\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

[解] $\because D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 1 \times 4 = 2 \neq 0$

$$\therefore \begin{cases} x = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-5}{2} \\ y = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

二、三阶行列式

给出一个三元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = k_3 \end{cases} \quad (13-8)$$

仍采用加减消元法, 先从第一、第二两方程中消去 z , 再从第一、第三两方程中消去 z , 在所得的两个方程中, 再消去 y , 就可得到:

$$\begin{aligned} & (a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1)x \\ & = k_1b_2c_3 - k_1b_3c_2 + k_2b_3c_1 - k_2b_1c_3 + k_3b_1c_2 - k_3b_2c_1 \end{aligned} \quad (13-9)$$

我们把(13-9)式中 x 的系数叫做三阶行列式的展开式, 记为

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

三阶行列式有 9 个元素, 分别在三个行和三个列上, 它的展开式共有六项, 其中三个是正项, 三个负项, 而且每一项是不同的行与列的元素的乘积, 据此构造, 可得到三阶行列式的展开法如下:

在行列式 D 中, 另写第一行, 第二行, 则成

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

取在实线上的三个元素的积,加“+”号,取虚线上的三个元素之积,加“-”号,然后相加就得到这个三阶行列式的展开式

$$D = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

这种展开法叫做对角线展开法。应该注意的是,此法仅限于三阶行列式的计算。

反过来观察(13-9)式,容易看出,(13-9)式的右边刚好是 D 中的 a_1, a_2, a_3 分别换成 k_1, k_2, k_3 后的三阶行列式的展开式,即

$$D_1 = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

的展开式。

这样,(13-9)式就可写成

$$D_x = D_1$$

同样也可得到

$$D_y = D_2$$

$$D_z = D_3$$

这里的 D_2 是 D 中的 b_1, b_2, b_3 分别换以 k_1, k_2, k_3 所得到的一个三阶行列式。 D_3 是 D 中的 c_1, c_2, c_3 分别换以 k_1, k_2, k_3 所得到的三阶行列式。这样,当 $D \neq 0$ 时,则可得到:

$$\begin{cases} x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D} \\ y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{D} \\ z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{D_3}{D} \end{cases} \quad (13-10)$$

把(13-10)代入(13-8),可以验证它们是原三元线性方程组的唯一的一组解。

以上用行列式求解二元、三元线性方程组的方法也称为克莱姆法则。

例 13-2 计算下列行列式

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$$

【解】 用对角线展开法计算如下:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 6 + 6 - 18 - 1 - 8 = -11$$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0 + abc - abc - 0 - 0 - 0 = 0$$

例 13-3 利用行列式解下列线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

【解】 用对角线展开法,可求得系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

所以方程组有唯一解,同样,可计算得

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 11 \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

由克莱姆法则,得到方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = -\frac{11}{8}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{9}{8}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = -\frac{3}{4}$$

§13-2 行列式的性质

用对角线法计算行列式比较麻烦,因此,有必要研究行列式的性质,以简化行列式的计算。

为方便起见,用记号 a_{ij} 来表示行列式中第 i 行第 j 列的元素,这样,可把二阶、三阶行列式写成下面形式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

以下介绍的三阶行列式的各条性质,都可以用对角线展开法加以证明.

如果把行列式 D 的行列互换,而不改变各行各列的顺序,得到的行列式叫做 D 的转置行列式,记为 D' ,如

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

的转置行列式为

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 13-1 行列式转置后其值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

由此性质可知,对于行列式的行成立的性质,对于列也一定成立,反过来也一样.

性质 13-2 行列式的任意两行(列)互换,行列式仅改变符号.

例如,交换行列式中一、三两行,就有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

推论 如果行列式中某两行(列)的对应元素相同,则此行列式的值为零.

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 0$$

其中第三行与第二行相同.

性质 13-3 把行列式的某行(列)的所有元素乘上常数 k ,等于用 k 乘行列式.

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

推论 13-1 行列式中某一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 13-2 如果行列式中某一行(列)的元素都为零,则此行列式的值为零.

性质 13-4 如果行列式的某两行(列)的对应元素成比例,则此行列式的值为零.

例如,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

事实上,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0$$

性质 13-5 若行列式某一行(列)各元素是二项之和(差),则可将此行列式写成两个行

列式之和(差)。

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + a'_{21} & a_{22} + a'_{22} & a_{23} + a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 13-6 把行列式的某一行(列)的每个元素乘以常数 k 后加到另一行(列)的对应元素上去,行列式的值不变。

例如:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{12} & a_{23} + ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

事实上,由性质 4 和性质 5 直接可证得。

上述性质是简化行列式计算的最常用,最有效的性质。今后为简单起见,规定用记号 (i) 表示行列式的第 i 行,用 $[j]$ 表示行列式的第 j 列,而 $(i) + k(j)$ 表示第 j 行各元素乘以常数 k 后再加到第 i 行的对应元素上去, $[i] + k[j]$ 表示第 j 列的各元素乘以常数 k 后再加到第 i 列的对应元素上去。

例 13-4 利用性质计算行列式的值

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 12 & 7 & 7 \end{vmatrix}$$

[解] $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 12 & 7 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{(3) + (-2) \times (1)} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 15 \end{vmatrix} = 0$

在三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中,划去 a_{ij} 所在的行和列的元素,余下的元素按原来次序构成一个二阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式,称作 M_{ij} ,我们把 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 叫做 a_{ij} 的代数余子式,记作 A_{ij} ,例如在上式中, a_{23} 的余子式 M_{23} 为

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

a_{23} 的代数余子式 A_{23} 为

$$A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

又例如, a_{21} 的代数余子式及 a_{13} 的代数余子式分别为

$$A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

性质 13-7 行列式等于它的任意一行(列)中各元素与其对应的代数余子式乘积之和。

例如,行列式按第一行展开,就有

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

事实上,

$$\begin{aligned} D &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= (-1)^{1+1}a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \end{aligned}$$

不仅如此,行列式还可按其它行(列)展开,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} = \sum_{k=1}^3 a_{ik}A_{ik}, \quad i=1, 2, 3 \quad (13-11)$$

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} = \sum_{k=1}^3 a_{kj}A_{kj}, \quad j=1, 2, 3 \quad (13-12)$$

(13-11)式与(13-12)式分别叫做行列式 D 按第 i 行的展开式及按第 j 列的展开式,这个性质叫做行列式按行(列)展开性质,利用它可把任意一个三阶行列式化为二阶行列式来计算。

性质 13-8 在行列式 D 中,任一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + a_{i3}A_{j3} = \sum_{k=1}^3 a_{ik}A_{jk} = 0, \quad (i \neq j, i, j=1, 2, 3) \quad (13-13)$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + a_{3i}A_{3j} = \sum_{k=1}^3 a_{ki}A_{kj} = 0, \quad (i \neq j, i, j=1, 2, 3) \quad (13-14)$$

例 13-5 计算下列行列式的值

$$(1) \begin{vmatrix} 6 & 42 & 27 \\ 8 & -28 & 36 \\ 20 & 35 & 135 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & a+b & a+b+c \\ a & 2a+b & 3a+2b+c \end{vmatrix}$$

$$\text{解 } (1) \begin{vmatrix} 6 & 42 & 27 \\ 8 & -28 & 36 \\ 20 & 35 & 135 \end{vmatrix} = 3 \times 4 \times 5 \begin{vmatrix} 2 & 14 & 9 \\ 2 & -7 & 9 \\ 4 & 7 & 27 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \times 4 \times 5 \times 2 \times 7 \times 9 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\frac{(2)-1 \times (1)}{(3)-2 \times (1)} 3 \times 4 \times 5 \times 2 \times 7 \times 9 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \times 4 \times 5 \times 2 \times 7 \times 9 \times \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \times 4 \times 5 \times 2 \times 7 \times 9 \times (-3) = -22680$$

$$(2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & a+b & a+b+c \\ a & 2a+b & 3a+2b+c \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a+b & a+b+c \\ 1 & 2a+b & 3a+2b+c \end{vmatrix}$$

$$\frac{(2)-1 \times (1)}{(3)-1 \times (1)} a \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a & a+b \\ 0 & 2a & 3a+2b \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & a+b \\ 2a & 3a+2b \end{vmatrix} = a^3.$$

§13-3 高阶行列式

我们知道,三阶行列式按第一行展开的表达式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

这说明,三阶行列式可以由三个二阶行列式来定义,仿此,同样可以利用若干个三阶行列式来定义具有四行四列的四阶行列式,例如,四阶行列式可以定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

类似的,可以用若干低阶行列式通过归纳递推来定义高一阶的行列式,譬如,可以继续定义五阶、六阶…以至 n 阶行列式.

一般地, n ($n \geq 2$, n 是任意确定的正整数) 阶行列式可以用 n 个 $n-1$ 阶行列式来定义,如下有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$- a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix}$$

对于 n 阶行列式,我们作如下几点说明:

1. n 阶行列式是由 n^2 个元素按一定的次序构造而成,记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

它们展开式一共含有 $n!$ 个乘积项, 其中一半的项带“+”号, 一半的项带“-”号, 而每一乘积项中元素取自于行列式中不同的行与列。

2. 前面介绍过的三阶行列式具有的性质与推论, 对于三阶以上的行列式 (称为高阶行列式) 也都是成立的 (证明从略)。

例如性质 13-7 就可推广为, n 阶行列式等于它的任意一行 (列) 的各个元素与其对应的代数余子式的乘积之和, 若按第 i 行第 j 列展开, 就分别有

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (13-15)$$

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kj} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (13-16)$$

同样的, 性质 13-8 也可推广为: n 阶行列式的某一行 (列) 的各元素与另一行 (列) 对应元素的代数余子式的乘积之和为零。

按行的有

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk} = 0 \quad (i \neq j, \quad i, j=1, 2, \dots, n) \quad (13-17)$$

按列的有

$$a_{1s}A_{1t} + a_{2s}A_{2t} + \cdots + a_{ns}A_{nt} = \sum_{k=1}^n a_{ks}A_{kt} = 0 \quad (s \neq t, \quad s, t=1, 2, \dots, n) \quad (13-18)$$

高阶行列式的计算一般比较复杂, 随着阶数的增高, 计算工作量将成倍增加, 若能善于巧用行列式的性质, 计算工作将会大大减少。

例 13-6 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

[解]

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{[4]+1 \times [3] \\ [1]-2 \times [3]}} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2)+1 \times (1)} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 40$$

例 13-7 证明

$$\begin{vmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix} = (3a+b)(b-a)^3$$

[证明] 观察行列式的各行 (列) 的和都是 $3a+b$ 这个特点, 可把其余各行都加到第一

行上去,得到

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{(1)+(2) \\ (1)+(3) \\ (1)+(4)}} \begin{vmatrix} 3a+b & 3a+b & 3a+b & 3a+b \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix} \\
 &= (3a+b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix} = (3a+b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-a \end{vmatrix} \\
 &= (3a+b) \begin{vmatrix} b-a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & b-a \end{vmatrix} = (3a+b)(b-a)^3
 \end{aligned}$$

例 13-8 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

【解】 首先把 D 按第一列展开,得到

$$D = x \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} y \begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}$$

前一个行列式依次按第一列展开,后一个行列式依次按第一行展开最终可得:

$$D = x \cdot x^{n-1} + (-1)^{n+1} y \cdot y^{n-1} = x^n + (-1)^{n+1} y^n$$

§13-4 线性方程组求解的克莱姆法则

在 §13-1 中,我们曾用二阶、三阶行列式给了解二元线性方程组及三元线性方程组的公式。与此类似,对于 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (13-19)$$

它的解也同样可以用 n 阶行列式来表示,这就是解一般的 (n 阶) 线性方程组的克莱姆 (Gramer) 法则。

克莱姆法则: 如果线性方程组 (13-19) 的系数行列式不等于零,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

那末它有唯一的解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \quad \cdots \quad x_n = \frac{D_n}{D}$$

这里 $D_j (j=1, 2, \dots, n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式, 即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明: 用 D 中第 j 列元素的代数余子式 $A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{nj} (j=1, 2, \dots, n)$ 依次乘方程组(13-19)的第一个, 第二个...第 n 个方程然后把相乘后的各方程左、右两端分别相加, 得

$$\begin{aligned} & (a_{11}A_{1j} + a_{21}A_{2j} + \cdots + a_{n1}A_{nj})x_1 + (a_{12}A_{1j} + a_{22}A_{2j} + \cdots + a_{n2}A_{nj})x_2 + \cdots \\ & + (a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj})x_j + \cdots + (a_{1n}A_{1j} + a_{2n}A_{2j} + \cdots + a_{nn}A_{nj})x_n \\ & = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj} \quad (j=1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

根据代数余子式的重要性质(性质 13-7, 性质 13-8 的推广)可知, 上式中 x_j 的系数等于 D , $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ 的系数均等于零, 又等式右端即是 D_j , 于是有

$$Dx_j = D_j \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

由于 $D \neq 0$, 因此, 原方程组有唯一的解

$$\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D} \\ x_2 = \frac{D_2}{D} \\ \vdots \\ x_n = \frac{D_n}{D} \end{cases}$$

例 13-9 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 \quad \quad - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

[解]

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{(1)-2(2) \\ (4)-(2)}]{(1)-(2)} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{[1]+2[2] \\ [3]+2[2]}]{(1)-(2)} \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 27 \end{aligned}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

由此得 $x_1 = 3, x_2 = -4, x_3 = -1, x_4 = 1$

当 n 元线性方程组(13-19)的常数项 $b_1, b_2 \dots b_n$ 均为零时这时方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (13-20)$$

我们称方程组(13-20)为 n 元齐次线性方程组, 相应地有, 当方程组(13-19)的常数项不全为零时, 我们称它为 n 元非齐次线性方程组。

$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ 显然是上述方程组的解, 称为零解, 若此方程组除零解外, 还有 $x_1, x_2 \dots x_n$ 不全为零的解, 称为非零解。

当方程组(13-20)的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

时, 按克莱姆法则, 此方程组有唯一零解, 反之, 若方程组还有非零解, 那末它的系数行列式 D 必定等于零。

例 13-10 问 k 取何值时, 二元线性方程组

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + kx_2 = 0 \end{cases}$$

才能有非零解:

[解] 若原方程组有非零解, 则其系数行列式必有

$$\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = 0$$

即

$$k = 1 \text{ 或 } -1$$

所以, 当 k 取上面任一个值时, 方程组才能有非零解。

用克莱姆法则求解 n 元线性方程组需要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式, 其计算工作量是相当大的, 故在实用计算中往往改用它法。仅管如此, 克莱姆法则完整地给出了 n 元线性方程组的解(当 $D \neq 0$ 时), 而且行列式方法又是进一步学习线性代数的重要基础, 这一点需充分注意。

习题十三

1. 求下列行列式的值

$$(1) \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} a & ka \\ b & kb \end{vmatrix} \quad (4) \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$$

2. 用对角线展开法, 求下列行列式的值:

$$(1) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} a & b & o \\ c & o & b \\ o & c & a \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} a & ka & x \\ b & kb & y \\ c & kc & z \end{vmatrix}$$

3. 用行列式解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{5}y = 6 \\ \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}y = -4 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 60I_1 - 20I_2 - 120 = 0 \\ -20I_1 + 80I_2 + 65 = 0 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} 2x - 3y = 9\lambda \\ 4x - y = 8\lambda \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \quad (5) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases} \quad (6) \begin{cases} ax + by = c \\ by + cz = a \\ ax + cz = b \end{cases} \quad (a, b, c \neq 0)$$

4. 利用行列式性质计算:

$$(1) \begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 15 & 12 & 3 \\ 20 & 32 & 12 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} a & o & c \\ a & b & o \\ o & b & c \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} \quad (4) \begin{vmatrix} 1 + \cos \alpha & 1 + \sin \alpha & 1 \\ 1 - \sin \alpha & 1 + \cos \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

5. 利用行列式性质证明:

$$(1) \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3 \quad (2) \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} = -4(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$(3) \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & x_1z_1 \\ x_1y_1 & y_1y_2 + y_2y_3 & y_1z_1 + y_2z_2 \\ x_1z_1 & y_1z_1 + y_2z_2 & z_1y_2 + z_2y_3 + z_3y_2 \end{vmatrix} = x_{21}y_{22}z_{23}$$

6. 解下列方程

$$(1) \begin{vmatrix} x^2 & 4 & -9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2) \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -3 \\ -2 & x-1 & -3 \\ -3 & -3 & x-6 \end{vmatrix} = 0$$

7. 计算下列行列式的值

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 10 \\ 6 & 0 & 4 & 0 \\ 9 & 6 & 1 & 30 \\ 12 & 4 & 8 & 20 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \quad (4) \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$