SPT 21世纪高等院校教材　　工科类

工科数学分析

下册

丁晓庆　编

科学出版社

21世纪高等院校教材(工科类)

工科数学分析

下册

丁晓庆 编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书讲述微积分学的基本理论.本书分上下两册.上册内容是:极限论、一元函数微分学、一元函数积分学;下册内容是:多元函数微分学、多元函数积分学、广义积分、级数理论、常微分方程.本书的主体部分接近理科数学专业对“数学分析”的要求,提出了新观点,得到了新结论;本书尽量从初学者和研究者的立场出发、用简洁朴素的语言、以螺旋上升的方式,阐述数学理论的本质.

本书编写了较多典型例题,对一般理工科专业学习“高等数学”的学生,可作为进一步提高或做题方法方面的课外读物.本书偏重于理论,适合于对数学要求高的理工科专业.本书可作为理科数学专业的教学参考书,也可供数学教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析.下册/丁晓庆编.—北京:科学出版社,2002.9

(21世纪高等院校教材(工科类))

ISBN 7-03-010757-8

Ⅰ.工… Ⅱ.丁… Ⅲ.工科数学分析-高等学校-教材 Ⅳ.O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第063236号

责任编辑:胡华强 陈玉琢/责任校对:刘小梅

责任印制:安春生 /封面设计:黄华斌 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年9月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2002年9月第一次印刷 印张:29 1/4

印数:1-3 000 字数:537 000

定价:62.00元(上、下册)

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)

目　　录

第四部分　多元函数微分学

第五部分 多元函数积分学

第六部分 广义积分

第七部分 级 数

第八部分 微分方程

第四部分　多元函数微分学

多元函数,就是有多个自变量的函数;对应于这个说法,只有一个自变量的函数叫**一元函数**.我们将看到,一元函数的微分理论可以推广到多元函数;但这不是简单的推广,不仅有许多新问题,而且有许多新结论.(出现这种情况的一个原因是:变量的个数越多,问题就越复杂.)

为了研究多元函数,下面先介绍常见点集的结构和点列的极限.

第十章　点集的结构　点列的极限

§10.1　平面点集的结构　2维空间 $\mathbf{R}^2$

在平面上建立直角坐标系 Oxy.通过坐标系,平面上的点就可以用有次序的两个实数来表示.这些**有序数组**组成一个集合,叫做**2维空间**,记做 $\mathbf{R}^2$:

$$\mathbf{R}^2 = \{(x, y): x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}.$$

它在几何上表示 xy 平面.

下面介绍平面点集的有关概念.

§10.1.1　两点间的距离

在平面上取两点 P_1, P_2,把它们连起来得到一条线段 P_1P_2,这条线段的长度叫这两点的**距离**,记做 $|P_1P_2|$.

距离的坐标表达式　假设点 P_1, P_2 的坐标是

$$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2),$$

那么这两点的距离公式是

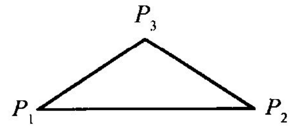
$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

距离有三个基本性质:

(i) 两点距离为零⇔这两点重合:$|P_1P_2| = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$;

(ii) 对称性:$|P_1P_2| = |P_2P_1|$;

(iii) 三角形不等式:$|P_1P_2| \leqslant |P_1P_3| + |P_3P_2|$.

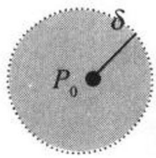


§ 10.1.2　邻域

设 P_0 是一点，δ 是正数.与点 P_0 的距离小于 δ 的点组成一个集合，记做

$$U(P_0, \delta) = \{P: |PP_0| < \delta\}.$$

这个集合叫点 P_0 的 **δ 邻域**，P_0 叫邻域的**中心**，δ 叫邻域的**半径**.



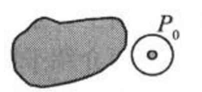
在几何上，这样的邻域表示开圆盘：不含圆周，圆心在点 P_0，半径等于 δ.

直观地说，点 P_0 的邻域是由 P_0 邻近的点组成的集合.使用“邻域”这个说法就意味着：我们在一点的邻近考虑某个问题，半径是某个比较小的正数.由于这个原因，我们就用记号“$U(P_0)$”表示点 P_0 的某个邻域.

§ 10.1.3　点集的孤点、聚点

设 D 是非空点集，P_0 是一点(它可以属于 D，也可以不属于 D).现在我们关心的是：在 P_0 的邻近，集合 D 有多少个元素.

如果在点 P_0 的某个邻域内，只有 P_0 属于 D，其他点都不属于 D，则称 P_0 是 D 的**孤点**.



P_0 是 D 的孤点.

如果在点 P_0 的任何邻域内，都有无穷多个点属于 D，则称 P_0 是 D 的**聚点**.

直观地说，孤点就是这样的点：它是点集 D 的元素，但在它的邻近，只有它自己孤零零地是 D 的元素.恰恰相反，聚点是这样的点：它可以属于 D，也可以不属于 D，但在它的邻近，聚集着点集 D 的无穷多个点.

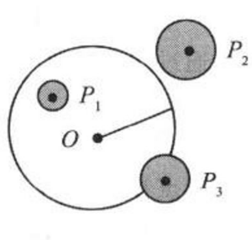
§ 10.1.4　点集的内点、外点、边界点

先看一个具体的点集.用 D_0 表示**单位圆**——圆心在原点，半径等于 1：

$$D_0 = \{P: |PO| < 1\}.$$

在圆周“里面”取一点 P_1、在圆周“外面”取一点 P_2、在圆周“上”取一点 P_3，那么这些点有下面的特性：

- 对于点 P_1，存在某个邻域 $U(P_1) \subset D_0$，因此把 P_1 叫 D_0 的**内点**；



• 对于点 P_2,存在这样的邻域 $U(P_2)$,它的元素都不是 D_0 的元素,因此把 P_2 叫 D_0 的**外点**.

• 对于点 P_3,在它的任何邻域内,既有 D_0 的元素,又有"不是 D_0 的元素",因此把 P_3 叫 D_0 的**边界点**.

一般概念　设 D 是非空点集,P_0 是一点(可以属于 D,也可以不属于 D).

如果存在点 P_0 的某个邻域 $U(P_0)\subset D$,则称 P_0 是点集 D 的**内点**;

如果在点 P_0 的某个邻域 $U(P_0)$内,所有点都不是 D 的元素,则称点 P_0 是点集 D 的**外点**;

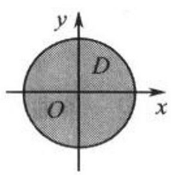
如果在点 P_0 的任何邻域内,既有 D 的元素,又有不属于 D 的元素,则称点 P_0 是点集 D 的**边界点**.

根据这些定义,我们可以这样说:关于一个已知点集 D:

- 任何一点要么是内点,要么是外点,要么是边界点;
- D 的任何一点,要么是内点,要么是边界点;
- D 的任何边界点,要么是聚点,要么是孤点.

§ 10.1.5　点集的内部、外部、边界

设 D 是非空点集.关于点集 D,全体内点组成的集合叫 D 的**内部**,记做 D°.



全体外点组成的集合叫 D 的**外部**.

全体边界点组成的集合叫 D 的**边界**,记做∂D.

例 1　对于集合 $D=\{P:|PO|\leqslant 1\}$,

它的内部是 $D^\circ=\{P:|PO|<1\}$.

它的外部是集合$\{P:|PO|>1\}$.

它的边界是$\partial D=\{P:|PO|=1\}$.

例 2　在 xy 平面上,一条线段 AB 可以看成一个点集.它没有内点,也没有孤点;它的每个点都是边界点,也是聚点.

§ 10.1.6　开集与闭集

如果点集 D 的每个元素都是它的内点,则称点集 D 是**开集**.如果点集 D 含有它的每个边界点,则称点集 D 是**闭集**.

说明　为了理论上方便,空集既算做开集,又算做闭集.另外,全平面 $\mathbf{R}^2$

没有一个边界点，我们还是把它算做闭集.

通过聚点概念，可以刻画闭集的特征.

定理 10.1.1　一个点集是闭集⇔它的每个点都是它的聚点.

证明　对于一个点集 D 来说，它的每个边界点要么是聚点，要么是孤点；但是孤点都属于 D，因此"点集 D 含有它的每个边界点"等价于"点集 D 含有它的每个聚点". 所以说，定理 10.1.1 成立.

例 1　考虑两个点集：

$$D_1 = \{P : |OP| < 1\},$$
$$D_2 = \{P : |OP| \leqslant 1\}.$$

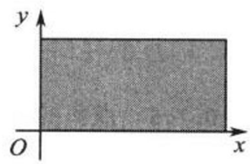
点集 D_1 的每个点都是它的内点，因此它是开集；点集 D_2 含有它的每一个边界点，因此它是闭集.

例 2　在 xy 平面上，一条线段上的点都是它的边界点，因此线段都是闭集. 同样，一条直线是闭集，一条射线也是闭集.

例 3　在 xy 平面上，第一象限连同它的边界组成集合

$$D = \{(x, y) : x \geqslant 0, y \geqslant 0\}.$$

这是一个闭集.（因为这个集合含有它的每个边界点.）



§10.1.7　平面上的连续曲线

1. 概述

假设 $x(t), y(t)$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数；它们可以确定一条曲线 C，参数方程是

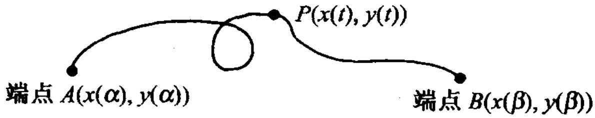
$$C : x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta].$$

这种曲线叫**连续曲线**，变量 t 叫**参变量**（也叫参数），区间 $[\alpha, \beta]$ 叫**参数区间**.

在这种情况下，参数值和曲线上的点有下面的对应关系：

- 对于区间 $[\alpha, \beta]$ 上的每个参数值 t，在曲线 C 上都有惟一的点 $P(x(t), y(t))$ 和它对应，并且区间 $[\alpha, \beta]$ 的端点分别对应于曲线 C 的**端点**.
- 当参变量 t 从值 α 连续变到值 β 时，对应点 $P(x(t), y(t))$ 就从曲线的一端"连续移动"到另一端.

在这样的对应关系中，如果曲线上有一点 P_0 对应于不同的参数值，那么曲线就会通过 P_0 两次或两次以上，因此把 P_0 叫曲线的**重点**.

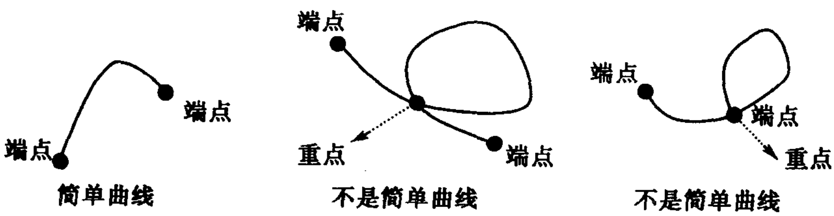


2. 简单曲线

如果一条连续曲线的两个端点重合，就叫**封闭曲线**. 如果封闭曲线除端点外再没有重点，就叫**简单闭曲线**，也叫**约当曲线**.（约当是法国数学家.）

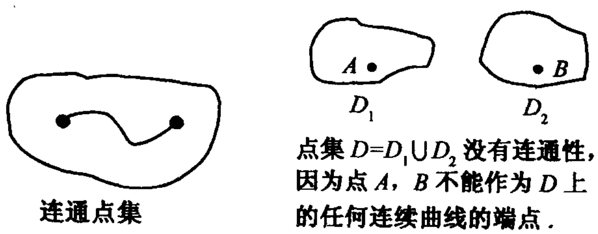
没有重点的不封闭的曲线叫**不封闭的简单曲线**.

封闭的简单曲线和不封闭的简单曲线统称为**简单曲线**.

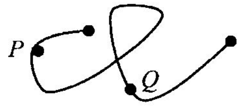


§ 10.1.8 点集的连通性

如果点集 D 中任意两个不同的点都是 D 中连续曲线的端点，则称 D 是**连通点集**.（所谓"D 中的连续曲线"是指：曲线上的每个点都是 D 的元素.）



例 作为一个点集，一条连续曲线是连通的.



§10.1.9　区域　闭区域

连通的开集叫**区域**. 一个区域和它的边界一起组成的点集叫**闭区域**.

例　考虑两个点集, $G=\{P:1<|PO|<2\}$, $F=\{P:1\leqslant|PO|\leqslant2\}$.

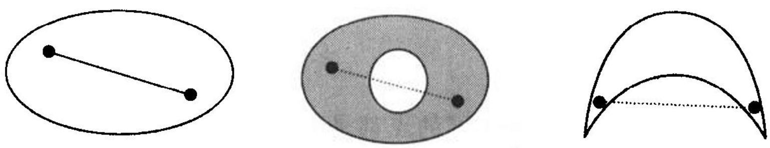
点集 G　　　　点集 F

点集 G 是连通的, 又是开集, 所以它是区域. 点集 F 是由区域 G 和它的边界组成的集合, 所以点集 F 是闭区域.

§10.1.10　凸集

在很多情况下, 我们希望一个点集 D 有这样的特点: 在 D 上任取两点, 连接这两点的线段都包含于 D. 具有这个特点的点集叫**凸集**.

在下面的图中, 第一个点集是凸集; 第二个和第三个点集都不是凸集.



例　圆盘、椭圆盘都是凸集. 长方形、梯形也是凸集; 但是, 在圆盘上挖一个"洞", 甚至在内部去掉一个点, 得到的点集就不是凸集.

§10.1.11　点集的有界性

如果一个点集 D 包含于原点的某个邻域, 则称 D 是**有界集**.

例 1　椭圆盘 $\left\{(x,y):\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}<1\right\}$ 是一个有界集.

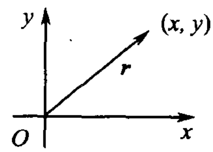
例 2　假设 $x(t), y(t)$ 都是区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数, 考虑连续曲线

$$C: x=x(t), y=y(t), t\in[\alpha,\beta].$$

作为平面上的点集,连续曲线是有界集.另外,它还是一个闭集.因此作为 xy 平面上的点集,连续曲线是有界闭集.

§ 10.1.12　2 维向量空间

一个 2 维数组 (x,y),除了表示平面上的一点,还可以表示平面上的向量 $\boldsymbol{r}=(x,y)$.这样一来,2 维空间 $\mathbf{R}^2$ 也表示 2 维向量的全体,所以叫 **2 维向量空间**.



在向量空间里,可以定义加减运算、数乘运算、内积运算等.例如

- 加法运算:$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$;
- 数乘运算:$\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y)$;
- 点积运算:$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=x_1x_2+y_1y_2$.

习　题　10.1

1. 给定三点 $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$,用这些点的坐标表示三角形不等式:$|P_1P_2|\leqslant|P_1P_3|+|P_3P_2|$.

2. 关于某个非空点集 D,回答下述问题:

(1) 聚点与内点有什么关系?

(2) 孤点与边界点有什么关系?

(3) 聚点与边界点有什么关系?

3. 用 D 表示单位圆 $\{P:|PO|<1\}$.求出它的内部 D°、外部和边界 ∂D.

4. 在 xy 平面上,把线段 AB 看成点集,求其内部、外部和边界;

5. 在平面上画出下列点集,然后逐一指出每个点集是否为开集?是否为闭集?是否为区域?是否为闭区域?是否为凸集?

(1) $D_1=\{(x,y):x^2<y^2\}$.　　(2) $D_2=\{(x,y):0<x^2+y^2<1\}$.

(3) $D_3=\{(x,y):|x|+|y|<1\}$.　(4) $D_4=\{(x,y):0<x<1,x\leqslant y\leqslant x+1\}$.

(5) $D_5=\{(x,y):xy=1\}$.

6. 回答问题:

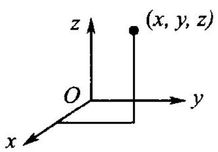
(1) 圆周是不是凸集,为什么?

(2) 在闭圆盘 $\{P:|OP|\leqslant1\}$ 的圆周上去掉一点 $(0,1)$,得到的点集是不是凸集?说明理由.

(3) 在闭圆盘 $\{P:|OP|\leqslant1\}$ 上去掉圆心 O,得到的点集是不是凸集?说明理由.

§10.2　空间点集的结构　3 维空间 $\mathbf{R}^3$

§10.1 研究了平面点集的结构；在那里引出的概念、得到的结论，都适合于空间点集. 为了加深理解，下面叙述有关概念和结论.



在空间建立直角坐标系 $Oxyz$. 通过坐标系，空间里的点就可以用有次序的三个实数来表示. 这些"有序数组"的全体组成一个集合，叫做 **3 维空间**，记做 $\mathbf{R}^3$：

$$\mathbf{R}^3 = \{(x, y, z): x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{R}\}.$$

它在几何上表示整个空间.

下面讨论空间点集的有关概念.

§10.2.1　两点间的距离

在空间取两点 P_1, P_2，把它们连接起来得到一条线段，这条线段的长度叫这两点的**距离**，记做 $|P_1P_2|$.

距离的坐标表达式　假设点 P_1, P_2 的坐标是

$$P_1(x_1, y_1, z_1), \quad P_2(x_2, y_2, z_3),$$

那么这两点的距离公式是

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

距离有三个基本性质：

(i) 两点距离为零⇔这两点重合：$|P_1P_2| = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$；

(ii) 对称性：$|P_1P_2| = |P_2P_1|$；

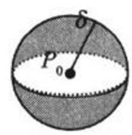
(iii) 三角形不等式：$|P_1P_2| \leqslant |P_1P_3| + |P_3P_2|$.

§10.2.2　邻域

设 P_0 是一点，δ 是正数. 与 P_0 的距离小于 δ 的点组成一个集合，记做

$$U(P_0, \delta) = \{P: |PP_0| < \delta\}.$$

这个集合叫点 P_0 的 δ **邻域**，P_0 叫邻域的**中心**，δ 叫邻域的**半径**.



从几何上看，这样的邻域是一个开球：不含球面，球心在点 P_0，半径等于 δ. 我们往往用符号"$U(P_0)$"表示点 P_0 的某个邻域.

§10.2.3 点集的孤点、聚点

设 Ω 是非空的点集，P_0 是一点（这个点可以属于 Ω，也可以不属于 Ω）.

孤点 如果在点 P_0 的某个邻域内，只有 P_0 属于 Ω，其他点都不属于 Ω，则称 P_0 是 Ω 的**孤点**.

聚点 如果在点 P_0 的任何邻域内，都有无穷多个点属于 Ω，则称 P_0 是 Ω 的**聚点**.

§10.2.4 点集的内点、外点、边界点

设 Ω 是非空点集，P_0 是一点.

如果存在点 P_0 的某个邻域 $U(P_0)\subset\Omega$，则称 P_0 是 Ω 的**内点**.

如果在 P_0 的某个邻域 $U(P_0)$ 内，每一个点都不属于 Ω，则称 P_0 是 Ω 的**外点**.

如果在点 P_0 的任何邻域内，既有 Ω 的点，又有不属于 Ω 的点，则称 P_0 叫 Ω 的**边界点**.

§10.2.5 点集的内部、外部、边界

设 Ω 是非空点集.关于点集 Ω：

- 全体内点组成的集合叫点集 Ω 的**内部**，记做 Ω°；
- 全体外点组成的集合叫点集 Ω 的**外部**；
- 全体边界点组成的集合叫点集 Ω 的**边界**，记做$\partial\Omega$.

例如，对于集合 $\Omega=\{P:|PO|\leqslant 1\}$，

- Ω 的内部是$\Omega^\circ=\{P:|PO|<1\}$——单位球；
- Ω 的外部是集合$\{P:|PO|>1\}$；
- Ω 的边界是$\partial\Omega=\{P:|PO|=1\}$——单位球面.

§10.2.6 开集 闭集

如果 Ω 的每个元素都是Ω 的内点，则称 Ω 是**开集**.如果 Ω 含有它的每一个边界点，则称 Ω 是**闭集**.

说明 为了理论上方便，空集既算做开集，又算做闭集.另外，整个空间 $\mathbf{R}^3$ 是开集；尽管它没有边界点，还是把它算做闭集.所以它既是开集，又是闭集.

通过聚点概念，可以刻画闭集的特征.

定理 10.2.1 一个点集是闭集$\Leftrightarrow$它的每个点都是它的聚点.

例 考虑两个点集：

$$\Omega_1 = \{P: |PO| < 1\}, \Omega_2 = \{P: |PO| \leqslant 1\}.$$

点集 Ω_1 的每个点都是它的内点，因此它是开集. 点集 Ω_2 含有它的每一个边界点，因此它是闭集.

§10.2.7 连续曲线

1. 概述

假设 $x(t), y(t), z(t)$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数；它们可以确定一条曲线 Γ，参数方程是

$$\Gamma: x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha, \beta].$$

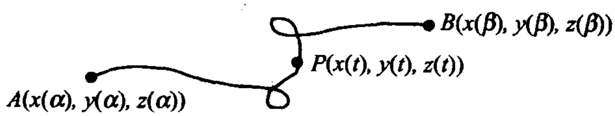
这种曲线叫**连续曲线**，变量 t 叫**参变量**(也叫参数)，区间 $[\alpha, \beta]$ 叫**参数区间**.

在这种情况下，参数值和曲线上的点有下面的对应关系：

• 对于区间 $[\alpha, \beta]$ 上的每个参数值 t，在曲线 C 上都有惟一的点 $P(x(t), y(t))$ 和它对应，并且区间 $[\alpha, \beta]$ 的端点分别对应于曲线 C 的**端点**.

• 当参变量 t 从值 α 连续变到值 β 时，对应点 $P(x(t), y(t))$ 就从曲线的一端"连续移动"到另一端.

在这样的对应关系中，如果曲线上有一点 P_0 对应于不同的参数值，那么曲线就会通过 P_0 两次或两次以上，因此把 P_0 叫曲线的**重点**.



2. 简单曲线

如果一条连续曲线的两个端点重合，就叫**封闭曲线**. 如果封闭曲线除端点外再没有重点，就叫**简单闭曲线**，也叫**约当曲线**.

没有重点的不封闭的曲线叫**不封闭的简单曲线**.

封闭的简单曲线和不封闭的简单曲线统称为**简单曲线**.

§10.2.8 点集的连通性

设 Ω 是非空点集. 如果 Ω 中任意两个不同的点都是 Ω 中连续曲线的端点，则称 Ω 是**连通集**. (所谓"Ω 中的连续曲线"是指：曲线上的每个点都是 Ω 的元素.)

§ 10.2.9　区域　闭区域

连通的开集叫**区域**.一个区域和它的边界一起组成的集合叫**闭区域**.

§ 10.2.10　凸集

设 Ω 是非空点集.如果对于 Ω 上的任意两点,连接它们的线段都包含于 Ω,则称 Ω 是**凸集**.

例　椭球体、球体都是凸集.长方体、四面体都是凸集;在球体的内部挖一个“洞”得到的点集不是凸集.

§ 10.2.11　点集的有界性

如果点集 Ω 包含于原点的某个邻域 $U(O)$,则称 Ω 是**有界集**.

例 1　椭球

$$\Omega = \left\{(x,y,z):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<1\right\}$$

是有界集.

例 2　第一卦限 $\{(x,y,z):x>0,y>0,z>0\}$ 不是有界集.

例 3　单位闭球 $\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$ 是有界闭区域.

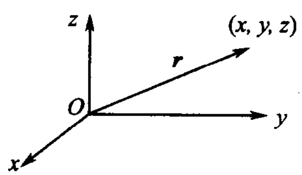
例 4　设 $x(t),y(t),z(t)$ 是区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数.考虑连续曲线:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in [\alpha,\beta].$$

作为空间里的点集,这样的连续曲线是闭集,还是有界的,因此是有界闭集.

§ 10.2.12　3 维向量空间

一个 3 维数组 (x,y,z),除了表示空间里的点,还可以表示空间里的向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$.



这样一来,3 维空间 $\mathbf{R}^3$ 也表示 2 维向量的全体,因此叫**3 维向量空间**.

在向量空间上,可以定义加法运算、数乘运算、点积运算、叉积运算等:

加法运算:$(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$;