

SPT 21世纪高等院校教材

工科类

工科数学分析

下 册

丁晓庆 编

科学出版社

21 世纪高等院校教材(工科类)

工科数学分析

下 册

丁晓庆 编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书讲述微积分学的基本理论. 本书分上下两册. 上册内容是: 极限论、一元函数微分学、一元函数积分学; 下册内容是: 多元函数微分学、多元函数积分学、广义积分、级数理论、常微分方程. 本书的主体部分接近理科数学专业对“数学分析”的要求, 提出了新观点, 得到了新结论; 本书尽量从初学者和研究者的立场出发、用简洁朴素的语言、以螺旋上升的方式, 阐述数学理论的本质.

本书编写了较多典型例题, 对一般理工科专业学习“高等数学”的学生, 可作为进一步提高或做题方法方面的课外读物. 本书偏重于理论, 适合于对数学要求高的理工科专业. 本书可作为理科数学专业的教学参考书, 也可供数学教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析. 下册/丁晓庆编. —北京: 科学出版社, 2002. 9

(21世纪高等院校教材(工科类))

ISBN 7-03-010757-8

I. 工… II. 丁… III. 工科数学分析-高等学校-教材 IV. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 063236 号

责任编辑: 胡华强 陈玉琢/责任校对: 刘小梅

责任印制: 安春生 /封面设计: 黄华斌 陈 敬

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

新 蕾 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年9月第 一 版 开本: 720×1000 1/16

2002年9月第一次印刷 印张: 29 1/4

印数: 1-3 000 字数: 537 000

定价: 62.00元(上、下册)

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈路通〉)

目 录

第四部分 多元函数微分学

第十章 点集的结构 点列的极限	1
§ 10.1 平面点集的结构 2 维空间 \mathbf{R}^2	1
§ 10.2 空间点集的结构 3 维空间 \mathbf{R}^3	8
§ 10.3 n 维空间 \mathbf{R}^n n 维空间点集的结构	12
§ 10.4 平面点列的极限	16
§ 10.5 点列的极限	21
第十一章 多元函数 极限 连续	23
§ 11.1 多元函数的概念	23
§ 11.2 多元函数的极限	27
§ 11.3 多元函数的累次极限 求极限的次序问题	33
§ 11.4 多元函数的连续性	37
§ 11.5 多元向量值函数 场的概念 空间点的柱面坐标和球面 坐标	42
§ 11.6 向量值函数的极限 连续 曲面的参数方程	48
§ 11.7 向量值连续函数的性质 不动点原理	56
第十二章 多元函数的偏导数 微分	62
§ 12.1 偏导数的概念和求法	62
§ 12.2 高阶偏导数	66
§ 12.3 多元函数的微分	72
§ 12.4 复合函数的求导法则 微分的形式不变性	78
§ 12.5 微分中值定理 泰勒公式	86
第十三章 向量值函数的微分 隐函数的求导法	90
§ 13.1 二元向量值函数的偏导向量 微分	90
§ 13.2 n 元向量值函数的偏导向量 微分	97
§ 13.3 开映射定理 局部反函数定理	104
§ 13.4 反函数存在的充分条件 反函数的性质	115
§ 13.5 由一个二元方程确定的隐函数	123
§ 13.6 由一个多元方程确定的隐函数	132

§ 13.7	由多元方程组确定的隐函数	137
§ 13.8	隐函数一般理论概述	143
第十四章	多元函数微分学的一些应用	150
§ 14.1	曲面的切平面和法向量曲线的切线	150
§ 14.2	方向导数与梯度向量	158
§ 14.3	多元函数的最值 费马原理 极值	164
§ 14.4	条件最值 条件极值 拉格朗日乘数法	169

第五部分 多元函数积分学

第十五章	曲线积分	180
§ 15.1	第一型曲线积分	180
§ 15.2	第二型曲线积分	190
§ 15.3	多元函数关于一个自变量的积分	196
第十六章	二重积分	205
§ 16.1	二重积分的概念	205
§ 16.2	积分运算的性质 积分中值定理	213
§ 16.3	二重积分的计算方法	215
§ 16.4	平面区域面积的求法	225
§ 16.5	二重积分的变量替换	233
§ 16.6	曲面的面积	239
第十七章	曲面积分	252
§ 17.1	第一型曲面积分	252
§ 17.2	第一型曲面积分的元素法及其应用	258
§ 17.3	第二型曲面积分的概念	262
§ 17.4	第二型曲面积分的计算方法	270
第十八章	三重积分	277
§ 18.1	三重积分的概念及其意义	277
§ 18.2	三重积分的计算方法	284
§ 18.3	三重积分的变量替换	288
第十九章	格林公式 高斯公式 斯托克斯公式	297
§ 19.1	格林公式	297
§ 19.2	积分与路径无关的条件 原函数问题	303
§ 19.3	高斯公式	309
§ 19.4	斯托克斯公式	316

§ 19.5 场论的几个概念	321
----------------------	-----

第六部分 广义积分

第二十章 广义积分	328
§ 20.1 广义积分的概念	328
§ 20.2 广义积分的收敛判定法	339

第七部分 级数

第二十一章 数项级数	351
§ 21.1 数项级数的概念和一般性质	351
§ 21.2 正项级数的收敛判定法	360
§ 21.3 一般级数的收敛判定法	365
第二十二章 函数项级数	373
§ 22.1 函数项级数的概念及其收敛性	373
§ 22.2 幂级数	381
§ 22.3 泰勒级数	388
§ 22.4 傅里叶级数	397

第八部分 微分方程

第二十三章 微分方程	409
§ 23.1 有关微分方程的概念	409
§ 23.2 常见一阶微分方程的解法	416
§ 23.3 求解高阶微分方程的降阶法	426
§ 23.4 线性微分方程的一般理论	430
§ 23.5 常系数齐次线性微分方程的解法	438
§ 23.6 二阶常系数非齐次线性微分方程的解法	441
§ 23.7 有关求解方法简介	447
汉英词汇对照表	457

第四部分 多元函数微分学

多元函数,就是有多个自变量的函数;对应于这个说法,只有一个自变量的函数叫**一元函数**.我们将看到,一元函数的微分理论可以推广到多元函数;但这不是简单的推广,不仅有许多新问题,而且有许多新结论.(出现这种情况的一个原因是:变量的个数越多,问题就越复杂.)

为了研究多元函数,下面先介绍常见点集的结构和点列的极限.

第十章 点集的结构 点列的极限

§ 10.1 平面点集的结构 2 维空间 \mathbf{R}^2

在平面上建立直角坐标系 Oxy .通过坐标系,平面上的点就可以用有次序的两个实数来表示.这些**有序数组**组成一个集合,叫做**2 维空间**,记做 \mathbf{R}^2 :

$$\mathbf{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}.$$

它在几何上表示 xy 平面.

下面介绍平面点集的有关概念.

§ 10.1.1 两点间的距离

在平面上取两点 P_1, P_2 ,把它们连起来得到一条线段 P_1P_2 ,这条线段的长度叫这两点的**距离**,记做 $|P_1P_2|$.

距离的坐标表达式 假设点 P_1, P_2 的坐标是

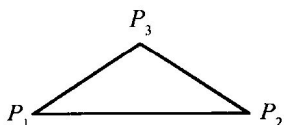
$$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2),$$

那么这两点的距离公式是

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

距离有三个基本性质:

- (i) 两点距离为零 \Leftrightarrow 这两点重合: $|P_1P_2| = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$;
- (ii) 对称性: $|P_1P_2| = |P_2P_1|$;
- (iii) 三角形不等式: $|P_1P_2| \leq |P_1P_3| + |P_3P_2|$.

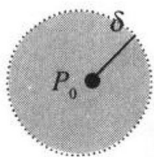


§ 10.1.2 邻域

设 P_0 是一点, δ 是正数. 与点 P_0 的距离小于 δ 的点组成一个集合, 记做

$$U(P_0, \delta) = \{P: |PP_0| < \delta\}.$$

这个集合叫点 P_0 的 δ 邻域, P_0 叫邻域的**中心**, δ 叫邻域的**半径**.



在几何上, 这样的邻域表示开圆盘: 不含圆周, 圆心在点 P_0 , 半径等于 δ .

直观地说, 点 P_0 的邻域是由 P_0 邻近的点组成的集合. 使用“邻域”这个说法就意味着: 我们在一点的邻近考虑某个问题, 半径是某个比较小的正数. 由于这个原因, 我们就用记号“ $U(P_0)$ ”表示点 P_0 的某个邻域.

§ 10.1.3 点集的孤点、聚点

设 D 是非空点集, P_0 是一点(它可以属于 D , 也可以不属于 D). 现在我们关心的是: 在 P_0 的邻近, 集合 D 有多少个元素.

如果在点 P_0 的某个邻域内, 只有 P_0 属于 D , 其他点都不属于 D , 则称 P_0 是 D 的**孤点**.



如果在点 P_0 的任何邻域内, 都有无穷多个点属于 D , 则称 P_0 是 D 的**聚点**.

直观地说, 孤点就是这样的点: 它是点集 D 的元素, 但在它的邻近, 只有它自己孤零零地是 D 的元素. 恰恰相反, 聚点是这样的点: 它可以属于 D , 也可以不属于 D , 但在它的邻近, 聚集着点集 D 的无穷多个点.

§ 10.1.4 点集的内点、外点、边界点

先看一个具体的点集. 用 D_0 表示**单位圆**——圆心在**原点**, 半径等于 1:

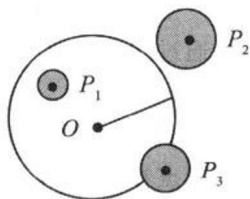
$$D_0 = \{P: |PO| < 1\}.$$

在圆周“里面”取一点 P_1 、在圆周“外面”取一点 P_2 、在圆周“上”取一点 P_3 , 那么这些点有下面的特性:

- 对于点 P_1 , 存在某个邻域 $U(P_1) \subset D_0$, 因此把 P_1 叫 D_0 的**内点**;

• 对于点 P_2 , 存在这样的邻域 $U(P_2)$, 它的元素都不是 D_0 的元素, 因此把 P_2 叫 D_0 的**外点**.

• 对于点 P_3 , 在它的任何邻域内, 既有 D_0 的元素, 又有“不是 D_0 的元素”, 因此把 P_3 叫 D_0 的**边界点**.



一般概念 设 D 是非空点集, P_0 是一点(可以属于 D , 也可以不属于 D).

如果存在点 P_0 的某个邻域 $U(P_0) \subset D$, 则称 P_0 是点集 D 的**内点**;

如果在点 P_0 的某个邻域 $U(P_0)$ 内, 所有点都不是 D 的元素, 则称点 P_0 是点集 D 的**外点**;

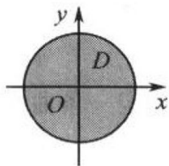
如果在点 P_0 的任何邻域内, 既有 D 的元素, 又有不属于 D 的元素, 则称点 P_0 是点集 D 的**边界点**.

根据这些定义, 我们可以这样说: 关于一个已知点集 D :

- 任何一点要么是内点, 要么是外点, 要么是边界点;
- D 的任何一点, 要么是内点, 要么是边界点;
- D 的任何边界点, 要么是聚点, 要么是孤点.

§ 10.1.5 点集的内部、外部、边界

设 D 是非空点集. 关于点集 D , 全体内点组成的集合叫 D 的**内部**, 记做 D° .



全体外点组成的集合叫 D 的**外部**.

全体边界点组成的集合叫 D 的**边界**, 记做 ∂D .

例 1 对于集合 $D = \{P : |PO| \leq 1\}$,

它的内部是 $D^\circ = \{P : |PO| < 1\}$.

它的外部是集合 $\{P : |PO| > 1\}$.

它的边界是 $\partial D = \{P : |PO| = 1\}$.



例 2 在 xy 平面上, 一条线段 AB 可以看成是一个点集. 它没有内点, 也没有孤点; 它的每个点都是边界点, 也是聚点.

§ 10.1.6 开集与闭集

如果点集 D 的每个元素都是它的内点, 则称点集 D 是**开集**. 如果点集 D 含有它的每个边界点, 则称点集 D 是**闭集**.

说明 为了理论上方便, 空集既算做开集, 又算做闭集. 另外, 全平面 \mathbf{R}^2

没有一个边界点,我们还是把它算做闭集.

通过聚点概念,可以刻画闭集的特征.

定理 10.1.1 一个点集是闭集 \Leftrightarrow 它的每个点都是它的聚点.

证明 对于一个点集 D 来说,它的每个边界点要么是聚点,要么是孤点;但是孤点都属于 D ,因此“点集 D 含有它的每个边界点”等价于“点集 D 含有它的每个聚点”.所以说,定理 10.1.1 成立.



例 1 考虑两个点集:

$$D_1 = \{P: |OP| < 1\},$$

$$D_2 = \{P: |OP| \leq 1\}.$$

点集 D_1 的每个点都是它的内点,因此它是开集;点集 D_2 含有它的每一个边界点,因此它是

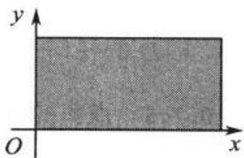
闭集.

例 2 在 xy 平面上,一条线段上的点都是它的边界点,因此线段都是闭集.同样,一条直线是闭集,一条射线也是闭集.

例 3 在 xy 平面上,第一象限连同它的边界组成集合

$$D = \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0\}.$$

这是一个闭集.(因为这个集合含有它的每个边界点.)



§ 10.1.7 平面上的连续曲线

1. 概述

假设 $x(t), y(t)$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数;它们可以确定一条曲线 C , 参数方程是

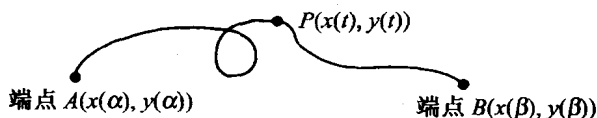
$$C: x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta].$$

这种曲线叫**连续曲线**, 变量 t 叫**参变量**(也叫参数), 区间 $[\alpha, \beta]$ 叫**参数区间**.

在这种情况下, 参数值和曲线上的点有下面的对应关系:

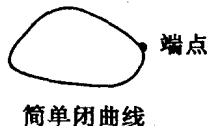
- 对于区间 $[\alpha, \beta]$ 上的每个参数值 t , 在曲线 C 上都有惟一的点 $P(x(t), y(t))$ 和它对应, 并且区间 $[\alpha, \beta]$ 的端点分别对应于曲线 C 的端点.
- 当参变量 t 从值 α 连续变到值 β 时, 对应点 $P(x(t), y(t))$ 就从曲线的一端“连续移动”到另一端.

在这样的对应关系中, 如果曲线上有一点 P_0 对应于不同的参数值, 那么曲线就会通过 P_0 两次或两次以上, 因此把 P_0 叫曲线的**重点**.



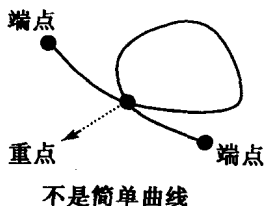
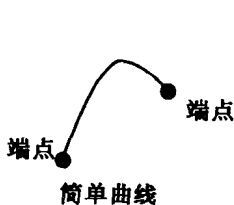
2. 简单曲线

如果一条连续曲线的两个端点重合, 就叫**封闭曲线**. 如果封闭曲线除端点外再没有重点, 就叫**简单闭曲线**, 也叫**约当曲线**. (约当是法国数学家.)



没有重点的不封闭的曲线叫**不封闭的简单曲线**.

封闭的简单曲线和不封闭的简单曲线统称为**简单曲线**.



§ 10.1.8 点集的连通性

如果点集 D 中任意两个不同的点都是 D 中连续曲线的端点, 则称 D 是**连通点集**. (所谓“ D 中的连续曲线”是指: 曲线上的每个点都是 D 的元素.)



点集 $D=D_1 \cup D_2$ 没有连通性, 因为点 A, B 不能作为 D 上的任何连续曲线的端点.

例 作为一个点集, 一条连续曲线是连通的.



§ 10.1.9 区域 闭区域

连通的开集叫**区域**. 一个区域和它的边界一起组成的点集叫**闭区域**.

例 考虑两个点集, $G = \{P: 1 < |PO| < 2\}$, $F = \{P: 1 \leq |PO| \leq 2\}$.

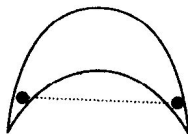
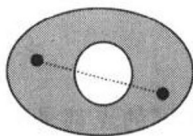
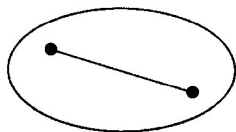
点集 G 点集 F

点集 G 是连通的, 又是开集, 所以它是区域. 点集 F 是由区域 G 和它的边界组成的集合, 所以点集 F 是闭区域.

§ 10.1.10 凸集

在很多情况下, 我们希望一个点集 D 有这样的特点: 在 D 上任取两点, 连接这两点的线段都包含于 D . 具有这个特点的点集叫**凸集**.

在下面的图中, 第一个点集是凸集; 第二个和第三个点集都不是凸集.



例 圆盘、椭圆盘都是凸集. 长方形、梯形也是凸集; 但是, 在圆盘上挖一个“洞”, 甚至在内部去掉一个点, 得到的点集就不是凸集.

§ 10.1.11 点集的有界性

如果一个点集 D 包含于原点的某个邻域, 则称 D 是**有界集**.

例 1 椭圆盘 $\{(x, y): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\}$ 是一个有界集.

例 2 假设 $x(t), y(t)$ 都是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数, 考虑连续曲线

$$C: x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta].$$

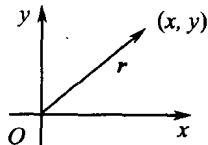
作为平面上的点集,连续曲线是有界集.另外,它还是一个闭集.因此作为 xy 平面上的点集,连续曲线是有界闭集.

§ 10.1.12 2 维向量空间

一个 2 维数组 (x, y) ,除了表示平面上的一点,还可以表示平面上的向量 $r = (x, y)$.这样一来,2 维空间 \mathbf{R}^2 也表示 2 维向量的全体,所以叫 2 维向量空间.

在向量空间里,可以定义加减运算、数乘运算、内积运算等.例如

- 加法运算: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;
- 数乘运算: $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$;
- 点积运算: $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$.



习 题 10.1

1. 给定三点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$,用这些点的坐标表示三角形不等式: $|P_1 P_2| \leq |P_1 P_3| + |P_3 P_2|$.

2. 关于某个非空点集 D ,回答下述问题:

- (1) 聚点与内点有什么关系?
- (2) 孤点与边界点有什么关系?
- (3) 聚点与边界点有什么关系?

3. 用 D 表示单位圆 $\{P: |PO| < 1\}$. 求出它的内部 D° 、外部和边界 ∂D .

4. 在 xy 平面上,把线段 AB 看成点集,求其内部、外部和边界:

5. 在平面上画出下列点集,然后逐一指出每个点集是否为开集? 是否为闭集? 是否为区域? 是否为闭区域? 是否为凸集?

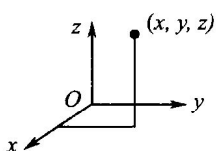
- (1) $D_1 = \{(x, y): x^2 < y^2\}$.
- (2) $D_2 = \{(x, y): 0 < x^2 + y^2 < 1\}$.
- (3) $D_3 = \{(x, y): |x| + |y| < 1\}$.
- (4) $D_4 = \{(x, y): 0 < x < 1, x \leq y \leq x + 1\}$.
- (5) $D_5 = \{(x, y): xy = 1\}$.

6. 回答问题:

- (1) 圆周是不是凸集,为什么?
- (2) 在闭圆盘 $\{P: |OP| \leq 1\}$ 的圆周上去掉一点 $(0, 1)$,得到的点集是不是凸集? 说明理由.
- (3) 在闭圆盘 $\{P: |OP| \leq 1\}$ 上去掉圆心 O ,得到的点集是不是凸集? 说明理由.

§ 10.2 空间点集的结构 3 维空间 \mathbf{R}^3

§ 10.1 研究了平面点集的结构;在那里引出的概念、得到的结论,都适合于空间点集.为了加深理解,下面叙述有关概念和结论.



在空间建立直角坐标系 $Oxyz$.通过坐标系,空间里的点就可以用有次序的三个实数来表示.这些“有序数组”的全体组成一个集合,叫做**3 维空间**,记做 \mathbf{R}^3 :

$$\mathbf{R}^3 = \{(x, y, z): x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{R}\}.$$

它在几何上表示整个空间.

下面讨论空间点集的有关概念.

§ 10.2.1 两点间的距离

在空间取两点 P_1, P_2 ,把它们连接起来得到一条线段,这条线段的长度叫这两点的**距离**,记做 $|P_1P_2|$.

距离的坐标表达式 假设点 P_1, P_2 的坐标是

$$P_1(x_1, y_1, z_1), \quad P_2(x_2, y_2, z_2),$$

那么这两点的距离公式是

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

距离有三个基本性质:

- (i) 两点距离为零 \Leftrightarrow 这两点重合: $|P_1P_2| = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$;
- (ii) 对称性: $|P_1P_2| = |P_2P_1|$;
- (iii) 三角形不等式: $|P_1P_2| \leq |P_1P_3| + |P_3P_2|$.

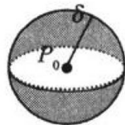
§ 10.2.2 邻域

设 P_0 是一点, δ 是正数.与 P_0 的距离小于 δ 的点组成一个集合,记做

$$U(P_0, \delta) = \{P: |PP_0| < \delta\}.$$

这个集合叫点 P_0 的 δ **邻域**, P_0 叫邻域的**中心**, δ 叫邻域的**半径**.

从几何上看,这样的邻域是一个开球:不含球面,球心在点 P_0 ,半径等于 δ .我们往往用符号“ $U(P_0)$ ”表示点 P_0 的某个邻域.



§ 10.2.3 点集的孤点、聚点

设 Ω 是非空的点集, P_0 是一点(这个点可以属于 Ω , 也可以不属于 Ω).

孤点 如果在点 P_0 的某个邻域内, 只有 P_0 属于 Ω , 其他点都不属于 Ω , 则称 P_0 是 Ω 的孤点.

聚点 如果在点 P_0 的任何邻域内, 都有无穷多个点属于 Ω , 则称 P_0 是 Ω 的聚点.

§ 10.2.4 点集的内点、外点、边界点

设 Ω 是非空点集, P_0 是一点.

如果存在点 P_0 的某个邻域 $U(P_0) \subset \Omega$, 则称 P_0 是 Ω 的内点.

如果在 P_0 的某个邻域 $U(P_0)$ 内, 每一个点都不属于 Ω , 则称 P_0 是 Ω 的外点.

如果在点 P_0 的任何邻域内, 既有 Ω 的点, 又有不属于 Ω 的点, 则称 P_0 叫 Ω 的边界点.

§ 10.2.5 点集的内部、外部、边界

设 Ω 是非空点集. 关于点集 Ω :

- 全体内点组成的集合叫点集 Ω 的内部, 记做 Ω° ;
- 全体外点组成的集合叫点集 Ω 的外部;
- 全体边界点组成的集合叫点集 Ω 的边界, 记做 $\partial\Omega$.

例如, 对于集合 $\Omega = \{P: |PO| \leq 1\}$,

- Ω 的内部是 $\Omega^\circ = \{P: |PO| < 1\}$ ——单位球;
- Ω 的外部是集合 $\{P: |PO| > 1\}$;
- Ω 的边界是 $\partial\Omega = \{P: |PO| = 1\}$ ——单位球面.

§ 10.2.6 开集 闭集

如果 Ω 的每个元素都是 Ω 的内点, 则称 Ω 是开集. 如果 Ω 含有它的每一个边界点, 则称 Ω 是闭集.

说明 为了理论上方便, 空集既算做开集, 又算做闭集. 另外, 整个空间 \mathbb{R}^3 是开集; 尽管它没有边界点, 还是把它算做闭集. 所以它既是开集, 又是闭集.

通过聚点概念, 可以刻画闭集的特征.

定理 10.2.1 一个点集是闭集 \Leftrightarrow 它的每个点都是它的聚点.

例 考虑两个点集:

$$\Omega_1 = \{P: |PO| < 1\}, \Omega_2 = \{P: |PO| \leq 1\}.$$

点集 Ω_1 的每个点都是它的内点, 因此它是开集. 点集 Ω_2 含有它的每一个边界点, 因此它是闭集.

§ 10.2.7 连续曲线

1. 概述

假设 $x(t), y(t), z(t)$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数; 它们可以确定一条曲线 Γ , 参数方程是

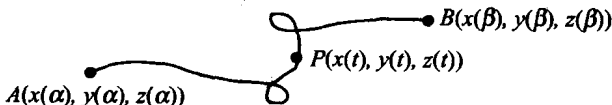
$$\Gamma: x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha, \beta].$$

这种曲线叫**连续曲线**, 变量 t 叫**参变量**(也叫参数), 区间 $[\alpha, \beta]$ 叫**参数区间**.

在这种情况下, 参数值和曲线上的点有下面的对应关系:

- 对于区间 $[\alpha, \beta]$ 上的每个参数值 t , 在曲线 C 上都有惟一的点 $P(x(t), y(t))$ 和它对应, 并且区间 $[\alpha, \beta]$ 的端点分别对应于曲线 C 的端点.
- 当参变量 t 从值 α 连续变到值 β 时, 对应点 $P(x(t), y(t))$ 就从曲线的一端“连续移动”到另一端.

在这样的对应关系中, 如果曲线上有一点 P_0 对应于不同的参数值, 那么曲线就会通过 P_0 两次或两次以上, 因此把 P_0 叫曲线的**重点**.



2. 简单曲线

如果一条连续曲线的两个端点重合, 就叫**封闭曲线**. 如果封闭曲线除端点外再没有重点, 就叫**简单闭曲线**, 也叫**约当曲线**.

没有重点的不封闭的曲线叫**不封闭的简单曲线**.

封闭的简单曲线和不封闭的简单曲线统称为**简单曲线**.

§ 10.2.8 点集的连通性

设 Ω 是非空点集. 如果 Ω 中任意两个不同的点都是 Ω 中连续曲线的端点, 则称 Ω 是**连通集**. (所谓“ Ω 中的连续曲线”是指: 曲线上的每个点都是 Ω 的元素.)

§ 10.2.9 区域 闭区域

连通的开集叫区域. 一个区域和它的边界一起组成的集合叫闭区域.

§ 10.2.10 凸集

设 Ω 是非空点集. 如果对于 Ω 上的任意两点, 连接它们的线段都包含于 Ω , 则称 Ω 是凸集.

例 椭球体、球体都是凸集. 长方体、四面体都是凸集; 在球体的内部挖一个“洞”得到的点集不是凸集.

§ 10.2.11 点集的有界性

如果点集 Ω 包含于原点的某个邻域 $U(O)$, 则称 Ω 是有界集.

例 1 椭球

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1 \right\}$$

是有界集.

例 2 第一卦限 $\{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$ 不是有界集.

例 3 单位闭球 $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ 是有界闭区域.

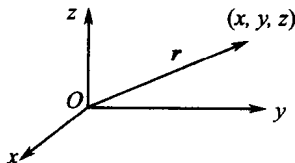
例 4 设 $x(t), y(t), z(t)$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数. 考虑连续曲线:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha, \beta].$$

作为空间里的点集, 这样的连续曲线是闭集, 还是有界的, 因此是有界闭集.

§ 10.2.12 3 维向量空间

一个 3 维数组 (x, y, z) , 除了表示空间里的点, 还可以表示空间里的向量 $r = (x, y, z)$.



这样一来, 3 维空间 \mathbf{R}^3 也表示 2 维向量的全体, 因此叫 3 维向量空间.

在向量空间上, 可以定义加法运算、数乘运算、点积运算、叉积运算等:

加法运算: $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$;