大学基础数学自学丛书

概率论与数理统计基础

严士健 王隽骧 徐承彝

上海科学技术出版社

大学基础数学自学丛书

概率论与数理统计基础

严士健　王嵩骧　徐承彝

上海科学技术出版社

大学基础数学自学丛书

概率论与数理统计基础

严士健 王隽骧 徐承彝

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行 江苏溧水印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 12 字数 265,000

1982 年 12 月第 1 版 1986 年 2 月第 3 次印刷

印数 62,801—78,500

[illegible]

统一书号：[illegible] 定价：1.80 元

序　言

我们伟大的祖国，为了尽早实现四个现代化的宏伟大业，需要造就大批又红又专的、具有高度文化修养和现代科学知识的工业大军、农业大军、科技大军、文化大军和国防大军。这是一项摆在全体人民面前的极为艰巨的任务。人才的培养，基础在教育。然而，目前我国每年只可能吸收很小一部分中学毕业生进入高等院校深造，大批已经走上或将要走上各种工作岗位的千千万万青年人，都迫切要求学习现代科学基础知识，以适应新时期的需要。所以，在办好高等院校的同时，还应尽量为那些不能升入大学或无法离职进入大学的青年提供良好的业余学习条件。为此，上海科学技术出版社编辑出版《大学基础数学自学丛书》、《大学基础物理自学丛书》和《大学基础化学自学丛书》。

《大学基础数学自学丛书》由我们负责主编，由北京大学、北京师范大学和复旦大学数学系有关教师执笔编写。包括《一元函数微分学》、《一元函数积分学》、《多元函数微积分》、《级数》、《空间解析几何》、《高等代数》、《复变函数论基础》、《常微分方程基础》、《概率论与数理统计基础》、《初等微分几何》、《有限数学引论》等共十一种，可供具有相当于高中文化程度、有志于自学大学数学课程的广大读者使用。

本《丛书》是一套大学基础课的自学读物，与中学程度的《数理化自学丛书》相衔接。为了使自学读者在没有教师讲课的条件下读懂、学好，其内容选取和编排不同于一般的大学课

本。文字叙述用讲课的形式书写；概念引入尽量从具体的、通俗的地方入手，逐步深入；内容安排抓住重点，讲深讲透。为了对读者解题有所启发，巩固所学的基础知识等，文中举有较多的例题；凡估计读者容易发生困难的地方，尽量给予必要的分析。习题、例题均按章分节安排，书后附有习题答案或提示。每册之首都有编者的话，指导读者自学全书。总之，想尽可能减少自学中的困难。

自学，时间总比在校学习紧得多。要自学有成就，没什么"诀窍"，如果有的话，那就是"多思考，多练习，熟能生巧"。

学习必须从自己的实际水平出发，学每本书要有一定的基础。选读顺序可根据编者的话的指导进行。有志者，事竟成。希望广大读者循序渐进、持之以恒、锲而不舍地学习。愿大家努力学好。

《丛书》编审过程中得到了北京大学数学系、北京师范大学数学系和北京师范学院数学系领导的大力支持；许多同志参加了提纲、样稿的讨论，并提供了宝贵的意见；编撰者和审稿人为《丛书》付出了辛勤的劳动，谨此一并致谢。

由于《丛书》编写和出版的时间仓促，难免有缺点和错误，希望读者不吝赐教！

江泽涵　　　　赵慈庚

于北京大学燕南园　于北京师范大学工五楼

1980年1月

编 者 的 话

本书是概率论和数理统计的一本入门书，内容包括概率论和数理统计的基本概念、结论和方法，为读者进一步学习这方面的知识和进行实际应用提供一个必要的基础．读者只要具有数学分析和线性代数知识就可以阅读本书．

概率论的研究对象是随机现象的数量规律，这和描述决定性现象的数学相比自然有它的特点．为了使初次接触这一数学方法的读者易于领会它的基本概念，本书注意了说明各概念的现实背景和实际含义．我们在不使用更多的数学工具的条件下，努力使叙述和论证保持一定的严谨性和一般性，对不加证明的结论指出了必要的参考读物．为了便于自学，在叙述上我们希望做到简明易懂．但由于作者水平所限，本书离这些目标可能还有不小差距，书中也会有许多不妥和错误，恳请读者提出批评和意见，以便重印时修改．

本书在编写过程中，得到有关兄弟院校的热情关怀和支持，得到教研室其它同志的支持和帮助，杨文礼同志阅读了全书，提出了许多宝贵的意见，谨此一并表示衷心谢意．

编　者

于北京师范大学数学系

1981 年 12 月

目　录

第一章　基本概念

第二章　随机变量

第三章 数字特征与特征函数

第四章 大数定律及中心极限定理

第五章 统计推断初步

第一章

基本概念

引 言

概率论是数学的一个分支，它研究随机现象中有关事件的规律性.

在一定的条件下必然发生某一事件的现象叫决定性现象. 例如纯水在一个大气压力下加热到100°C必然沸腾；质量为m的物体受到外力f的作用必然产生加速度a，等等.

在一定的条件下可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而且不能预先断言出现哪种结果的现象叫随机现象. 例如往桌面上投一枚硬币，可能正面向上，也可能反面向上，而且在投掷前不能预先断言一定哪一面向上；从含有一定个数次品的一批产品中任意取出3件，取到次品的件数可能是0, 1, 2或3；一门炮对一目标射击，尽管经过瞄准，炮弹却可能落在目标附近的各个位置.

随机现象中的事件在条件实现时可能发生也可能不发生，称在一定条件下可能发生也可能不发生的事件为这个条件下的随机事件. 例如"正面向上"是"往桌面上投一枚硬币"这个条件下的随机事件；"废品数不超过2"是"从含有一定件数次品的一批产品中任意抽取3件"这个条件下的随机事件. 称在一定条件下必然发生的事件为这个条件下的必然事件. 称在一定条件下必然不发生的事件为这个条件下的不可能事件. "水沸腾"是条件——"纯水，一个大气压，100°C"下的

必然事件，而“水结冰”是上述条件下的不可能事件. 为了方便，把必然事件，不可能事件看作特殊的随机事件.

观察一定条件下发生的现象通常叫做试验；条件实现一次就是一次试验. 一个试验如果可以在相同的条件下重复进行，而且每次试验的结果可以不同，有偶然性，那么我们称它为随机试验. 很明显，随机试验观察的对象实际上就是一个随机现象. 今后，我们把一定条件下的随机现象也称为相应随机试验中的随机现象，而把一定条件下的随机事件称为相应随机试验中的随机事件. 例如，“正面向上”是“投一枚硬币”条件下的随机事件，也可以说成是“投一枚硬币”这一随机试验中的事件. 又如“废品数不超过 2”可以说成是“从含有一定件数废品的一批产品中任意抽取 3 件”这一随机试验中的随机事件.

为了简单起见，今后我们也常常将随机事件简称为事件，将随机试验简称为试验.

随机事件在一次试验中（即条件一次实现之下），可能发生也可能不发生，带有不确定性，但在多次重复试验中，却呈现出明显的规律性.

历史上进行过“投一次硬币”的试验来观察“正面向上”这一事件发生的规律，表 1-1 是试验结果的记录.

表 1-1

实验者	投掷次数	正面向上次数	频率
蒲丰(Buffon)	4040	2048	0.5069
皮尔逊(K. Pearson)	12000	6019	0.5016
皮尔逊(K. Pearson)	24000	12012	0.5005

又如，观察“由 0, 1, 2, …, 9 中任意取出一个数字”的随机试验中，事件“取出的是数字 1”发生的规律. 表 1-2 列出了

10 个 2000 次的观察结果.

表 1-2

观察次数	2000	2000	2000	2000	2000
"1"出现次数	194	203	218	185	212
频率	0.0970	0.1015	0.1090	0.0925	0.1060
观察次数	2000	2000	2000	2000	2000
"1"出现次数	205	183	204	204	205
频率	0.1025	0.0915	0.1020	0.1020	0.1025

注 上表是利用电子计算机进行模拟试验所得的结果.

在观察某一随机事件 A 时，设进行了 n 次试验，其中事件 A 发生了 m_A 次，则 $\frac{m_A}{n}$ 称为事件 A 发生的**频率**.

从上面的试验记录中可以看到，在多次重复试验中，同一事件发生的频率虽然并不完全相同，但却在一个固定的数值附近摆动，而呈现出一定的稳定性（前一例摆动于 $\frac{1}{2}$ 附近，后一例摆动于 0.10 附近），而且随着试验重复次数的增加，这种现象愈加显著. 频率的这种稳定性，揭示出一个随机事件发生的可能性有一定的大小可言：频率稳定于较大数值，表明相应事件发生的可能性较大，频率稳定于较小数值，表明相应的事件发生的可能性较小，而频率所接近的这个固定数值就是相应事件发生可能性大小的一个客观的定量的度量，称为相应事件的**概率**.

随机现象广泛地存在于自然界和人类社会中. 随着生产的发展，科学研究的深入，许多学科和部门不断提出了研究随机现象的课题，概率论的方法已广泛地渗透到物理、化学、生

物、地学等学科的研究中和工业、农业、国防等各个部门的工作中．今天，概率论已成为有广泛应用的，有深刻理论基础的，蓬勃发展的一个数学学科了．

第一节　样本空间与事件域

1.1　样本空间

在引言中已经说明，概率论的研究对象是一定条件下的随机现象或随机试验．今后对随机试验理解为：

1．它可以在相同的条件下重复进行；

2．每次试验中可以出现不同的结果，而究竟出现哪一个结果，试验前不能预先断言；

3．试验中一切可能的结果是事先已知的，并且假定在一次试验中必有其中一个结果出现(因为它们是一切可能的结果)且仅有其中一个结果出现(这表示它们之中的任何两个都不能同时发生)．

随机试验中每一个可能的结果称为一个样本点(或基本事件)．全体样本点的集合*)称为样本空间．

在概率论中讨论一个随机试验时，首先要求明确它的样本空间．对于一个具体的随机试验来说，样本空间可以根据试验的内容(即试验条件实现一次的含义和观察的目的)来决定．

【例 1】　投一枚硬币观察正反面出现情况．一次试验就是投一枚硬币，试验的结果有两个：正(正面向上)，反(反面向

*) 在以后的叙述中，将用到集合的概念和运算，不熟悉这些基本知识的读者可参考本丛书《有限数学引论》．

上)，即有两个样本点：正、反，这个随机试验的样本空间为

$$\Omega=\{正、反\}.$$

【例 2】 将一枚硬币投两次，观察正反面出现情况．在这个随机试验中，投两次硬币是一次试验（注意：不是两次试验！），试验结果有 4 个：(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)．这里的记号，如(正，反)，表示“第一次出现正面，第二次出现反面”，其余类此．样本空间

$$\Omega=\{(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)\}.$$

【例 3】 从包含两件次品(记作 a_1, a_2)和三件正品(记作 b_1, b_2, b_3)的五件产品中，任意取出两件．具体拿出两件就是一次试验，例如拿出的两件是 a_1 和 b_3，这就是一个样本点，记作$\{a_1, b_3\}$．所有样本点共 10 个，样本空间

$$\Omega=\{\{a_1, a_2\}, \{a_1, b_1\}, \{a_1, b_2\}, \{a_1, b_3\}, \{a_2, b_1\},$$
$$\{a_2, b_2\}, \{a_2, b_3\}, \{b_1, b_2\}, \{b_1, b_3\}, \{b_2, b_3\}\}.$$

【例 4】 把红、绿、白三个球随机地放到 I、II、III 三个盒中（每盒可以容纳任意多个球），这个随机试验的样本点共有 27 个，分别记作 ω_1, ω_2, $\cdots$, ω_{27}，图示如下(a, b, c 分别表示红、绿、白三个球，I、II、III 三个盒从左向右排列)：

ω_1	abc			ω_{10}	bc	a		ω_{19}	bc		a
ω_2	ab	c		ω_{11}	b	$a\ c$		ω_{20}	b	c	a
ω_3	ab		c	ω_{12}	b	a	c	ω_{21}	b		$a\ c$
ω_4	$a\ c$	b		ω_{13}	c	ab		ω_{22}	c	b	a
ω_5	a	bc		ω_{14}		abc		ω_{23}		bc	a
ω_6	a	b	c	ω_{15}		ab	c	ω_{24}		b	$a\ c$
ω_7	$a\ c$		b	ω_{16}	c	a	b	ω_{25}	c		ab
ω_8	a	c	b	ω_{17}		$a\ c$	b	ω_{26}		c	ab
ω_9	a		bc	ω_{18}		a	bc	ω_{27}			abc

【例 5】 记录某电话交换台一分钟内接到的呼叫次数. 样本点(记录结果)是一非负整数(接到的呼叫数), 由于难于规定一个呼叫数的上界, 所以认为每一个非负整数都是一个可能结果, 故样本空间 $\Omega=\{0, 1, 2, \cdots\}$.

【例 6】 向某一目标射击一发炮弹, 观察落点与目标的偏差. 样本点可以是任何一个非负实数(偏差值), 所以样本空间 $\Omega=\{d \mid d\geqslant 0\}$.

【例 7】 向某一目标射击一发炮弹, 观察落点的分布情况. 每次试验结果就是"炮弹落在某一平面区域 G 的某一点 (x, y) 上(假设平面已经建立坐标系). 这个结果可以简单地就用点 (x, y) 来表示. 于是样本点就是 G 的各个点, 样本空间 $\Omega=G$.

从上面的例中我们看到为了给出样本空间, 必须确切理解试验条件的内容和观察的目的, 比较例 1 和例 2, 例 6 和例 7, 可以使我们更看清这个问题.

1.2 事件

随机试验中的事件, 通常用语言来表述, 引入了样本空间之后, 事件便可以定义为样本空间的子集. 先结合本节例 3 来理解. 考虑事件 A_0: "没有抽到次品". 在一次试验中, A_0 发生, 当且仅当在这次试验中出现样本点 $\{b_1, b_2\}$, $\{b_1, b_3\}$, $\{b_2, b_3\}$ 中的一个. 这样我们可以认为 A_0 是由 $\{b_1, b_2\}$, $\{b_1, b_3\}$, $\{b_2, b_3\}$ 组成的, 而将 A_0 定义为它们组成的集合,

$$A_0=\{\{b_1, b_2\}, \{b_1, b_3\}, \{b_2, b_3\}\}.$$

又如事件 A_1 "抽到一个次品". A_1 发生当且仅当 $\{a_1, b_1\}$, $\{a_1, b_2\}$, $\{a_1, b_3\}$, $\{a_2, b_1\}$, $\{a_2, b_2\}$, $\{a_2, b_3\}$ 中的一个发生, 于是我们可以认为 A_1 是它们组成的而定义为它们组成的集

合：

$$A_1=\{\{a_1, b_1\}, \{a_1, b_2\}, \{a_1, b_3\}, \{a_2, b_1\},$$
$$\{a_2, b_2\}, \{a_2, b_3\}\}.$$

又如事件 A_2:"抽到两件次品". A_2 发生当且仅当样本点 $\{a_1, a_2\}$ 发生. 将 A_2 定义为 $\{a_1, a_2\}$ 组成的单元素集: $A_2=\{\{a_1, a_2\}\}$.

一般，我们将事件定义为样本空间 Ω 的某个子集. 称事件 A 发生当且仅当 A 中某一样本点发生.

再看几个例.

在例 2 中：事件 A"两次出现的面不同",

$$A=\{(反,正),(正,反)\}.$$

事件 B"第一次出现反面",

$$B=\{(反,正),(反,反)\}.$$

在例 6 中：事件 A"偏差不超过 100 米",

$$A=\{d\,|\,0\leqslant d\leqslant 100\}.$$

在例 7 中：事件 A"炮弹落在目标(0, 0)的左侧",

$$A=\{(x, y)\,|\,(x, y)\in G,\ x<0\}.$$

事件 B"炮弹落在距目标不超过 100 米的范围",

$$B=\{(x, y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 100^2\}.$$

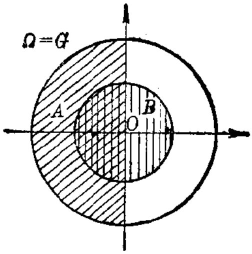

图 1-1

样本空间 Ω 作为一个事件，因为在每次试验中必有 Ω 中的样本点出现，所以 Ω 在一次试验中必然发生，即 Ω 是必然事件.

空集 $\emptyset$ 作为一个事件，它在每一次试验中都不会发生，所以 $\emptyset$ 是不可能事件.

1.3 事件的关系与运算

现在，对应着集合的关系和运算，定义事件的关系及运算。

在以下的叙述中，设 Ω 是一给定的样本空间，所出现的 Ω 的子集都是事件，并用 $A, B, C, \cdots$ 表示。

1. 若 $A\subseteq B$，则称事件 B 包含事件 A.

事件 B 包含事件 A 的含义是：在一次试验中，若 A 发生则 B 必发生．这是因为，A 发生，一定有一个样本点 ω 出现，$\omega\in A$，由于 $A\subseteq B$，因此 $\omega\in B$，所以 B 发生.

例如，在例 4 中，

$A=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_9\}$，"红球在 I 盒中"；

$B=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{18}\}$，"红球不在 III 盒中".

显然 $A\subseteq B$，而从实际含义来看就是：若事件"红球在 I 盒中"发生，则事件"红球不在 III 盒中"必发生.

2. 若 $A=B$，则称事件 A 与事件 B 相等.

$A=B$ 表示它们是同一个事件.

3. 事件 $A\cup B$ 称为事件 A 与事件 B 之和.

在一次试验中：$A\cup B$ 发生，当且仅当出现某一样本点 $\omega\in A\cup B$（即 $\omega\in A$ 或 $\omega\in B$），当且仅当 A 发生或 B 发生*)．由此可见，用语言表述时 $A\cup B$ 就是"A 或 B"这一事件，通常也把这个事件表述为"A 发生或 B 发生"，也表述为"A, B 至少有一个发生".

例如，在例 4 中

$A=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_9\}$，"红球在 I 盒中"；

*) "A 发生或 B 发生"的含意包括 A, B 同时发生.