中等数学习题集

第三册

翟连林　陈伟侯　段云鑫　编

科学出版社

中等数学习题集

第三册

程连林　陈伟侯　段云鑫　编

科　学　出　版　社

1 9 8 0

内 容 简 介

为帮助读者复习和巩固中学学过的数学基础知识，提高运算、逻辑思维和空间想象能力，本书编者根据多年参加全国和北京市的数学教材的编写和教学实践所积累的资料，以及从国内外大量有关资料中所精选的题目，编选了这套习题集，这本是第三册.

本书按新教学大纲(草案)所规定的内容，除包括传统的代数、几何、三角外，还增加了微积分、概率和逻辑代数初步的题目，渗透了集合、对应等数学思想. 全集共精选两千五百多个题组，分四册出版. 全部习题分甲组题(复习巩固题)和乙组题(提高题)，并在每章之后附有答案或提示.

本书可供中等学校(包括普通中学、工农业余中学、中师、中专、中技等)师生、大专院校(包括师范院校、工农业余大学、电视大学等) 低年级学生以及广大知识青年参考和自学用. 其中乙组题亦可作为中学数学课外活动小组的参考资料.

中等数学习题集

第 三 册

翟连林　陈伟侯　段云鑫 编

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

天津新华印刷一厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1980 年 11 月第 一 版　　开本：787×1092　1/32

1980 年 11 月第一次印刷　　印张：15 1/2

印数：0001－631,200　　字数：357,000

统一书号：13031・1385

本社书号　1916・13—1

定价：1.25 元

前　　言

在参加全国中小学通用教材的编写工作和教学实践中，我们深感编写一套适合中等数学水平读者需要的《中等数学习题集》是非常必要的．因此，我们参照教育部1978年颁布的全日制十年制学校《中学数学教学大纲》(试行草案)和新编的中学数学通用教材，以及《工农业余中学数学教学大纲》(试行草案)和新编的教材，编写了这套习题集．这套习题集是从我们多年参加教材编写和教学工作中所积累的题目中，以及从国内外许多有关资料中选编而成的．目的在于帮助读者复习和巩固在中学学过的数学基础知识，提高运算能力、逻辑思维能力和空间想像能力．

这套习题集按大纲所规定的教学内容，采取分科编排的方法，分四册出版．第一册包括：第一篇代数；第二册包括：第二篇平面几何，第三篇立体几何；第三册包括：第四篇平面三角，第五篇平面解析几何；第四册包括：第六篇概率统计和逻辑代数初步，第七篇微积分初步，第八篇综合题．

这套习题集的特点是采取题组的形式，引导读者由简到繁、由具体到抽象地进行思维和演算，以便掌握解题方法，提高分析问题和解决问题的能力．全部习题还根据难易程度分成甲组题和乙组题．为便于读者自学，全部题目都给出提示或答案，对于稍难的题目给出了解题的主要步骤或方法(每题只给一种方法)．

该习题集在最后定稿工作中，我们请了五十三位有丰富教学经验的中学教师(包括北京市特级教师、模范教师)、出版

社编辑和大学教授进行了认真的校核、审阅，他们提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢.

这套习题集是利用业余时间编写的．由于时间仓促，水平又低，错误和不妥之处在所难免，望读者批评指正.

翟连林　陈伟侯　段云鑫

一九八〇年一月于北京

这套习题集用下列字母表示相应的数集：

N——自然数集

I——整数集

R——有理数集

$\bar{R}$——无理数集

D——实数集

C——复数集

目　　录

第五篇　平面解析几何

第四篇　平 面 三 角

第一章　三 角 函 数

甲　　组　　题

一、任意角的三角函数

1. （1）用弧度制表示下列各角：

$5°, 10°, 22°30', 75°, 225°, 300°, 400°$；

（2）用角度制表示下列各角：

$\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{6\pi}{7}, \frac{5\pi}{2}, \frac{21\pi}{6}, \frac{23\pi}{4}$.

2. （1）写出与下列各角终边相同的角的集合：

$\frac{3\pi}{7}, \frac{-7\pi}{4}, 130°18', 315°32'$；

（2）在下列角的集合中，找出终边位于 -4π 到 4π 之间的一切角：

$$A=\left\{\alpha:\ \alpha=2k\pi+\frac{\pi}{3}, k\in I\right\};$$

$$B=\left\{\beta:\ \beta=k\pi+\frac{3\pi}{4}, k\in I\right\};$$

$$C=\{x:\ x=k\cdot 360°+210°, k\in I\};$$

$$D=\{y:\ y=k\cdot 180°+130°, k\in I\}.$$

3. 时钟所转的角是正角还是负角？

经过下列时间，时钟的分针和时针各转动了多少度？多少弧度？

（1）2 小时；　　（2）45 分钟；

（3）$1\frac{1}{2}$ 小时；　　（4）5 小时又 25 分钟.

4. 填写下表：

角 α 的终边所在象限	一	二	三	四
角 2α 的终边所在象限				
角 3α 的终边所在象限				
角 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边所在象限				
角 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边所在象限				

5. （1）一条皮带环绕在两个轮子上，如果两个轮子的半径 OA 和 $O'B$ 分别是 7 分米和 1 分米，两个轮子的轮心相距 12 分米，求皮带长（精确到 0.1 分米）；

（2）为了把半径分别是 3 厘米、1 厘米的两根圆柱紧紧地扎在一起，绕一圈需要多长的铁丝（精确到 0.1 厘米）？

6. 中心为 O、O'，半径为 r 的两个等圆相交于 A、B 两点，它们的公共部分等于圆面积的一半，证明：若 $\angle AOB=\frac{\pi}{2}+\theta$，则 $\theta=\cos\theta$.

7. 将圆周按下列各比值分为若干段，用弧度表示连结各点所成凸多边形的内角：

（1）3:4:5；（2）1:2:3:4；（3）2:3:4:5:6.

8. 半径为 12 厘米的轮子，每 3 分钟转动 1000 周，试问：

（1）它的平均角速度是多少？

（2）轮沿上一固定点在 1 秒钟内所经过的距离是多少？

（3）轮沿上一固定点转动 1000° 所经过的距离是多少？

9. 已知角 α 的终边上 P 点的坐标，分别求出角 α 的六个三角函数:

(1) $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{2}\right)$; (2) $(1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$;

(3) $(3a, -4a)$，其中 $a>0$; (4) $(3a, -4a)$，其中 $a<0$.

10. 若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，利用单位圆证明:

(1) $|\sin\alpha| + |\cos\alpha| > 1$; (2) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

(3) $\operatorname{tg}\alpha > \sin\alpha$; (4) $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$.

11. 下列命题是否正确?

(1) 存在一个角 α，使 $\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{1}{2}$;

(2) 存在一个角 α，使 $\sin\alpha = 0$，$\cos\alpha = -1$;

(3) 存在一个角 α，使 $\operatorname{tg}\alpha = 1$，$\cos\alpha = -1$;

(4) 存在一个角 α，使 $\operatorname{tg}\alpha = 2$，$\operatorname{ctg}\alpha = 1$.

12. 化简下列各式:

(1) $-\cos(180^\circ+\alpha)\sin(90^\circ+\alpha) + \cos(90^\circ-\alpha) \times \sin(180^\circ-\alpha)$;

(2) $a\cos(x-90^\circ) + b\cos(90^\circ+x) + a\sin(180^\circ+x) - b\cos(270^\circ-x)$;

(3) $\dfrac{\sin(180^\circ-\alpha)\sin(270^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)}{\sin(90^\circ+\alpha)\operatorname{tg}(270^\circ+\alpha)\operatorname{tg}(360^\circ-\alpha)}$;

(4) $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$.

13. 求下列各式的值:

(1) $p^2\cos 4\pi + 2p\sin\frac{5\pi}{2} - \cos 5\pi - 4p\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}\cdot\sec 2\pi$;

(2) $4\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4} - \cos^2\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{6} + \cos\pi\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$;

(3) $\sin(-1230^\circ)\cos 1290^\circ + \cos(-1020^\circ) \times \sin(-1050^\circ) + \operatorname{tg} 945^\circ$;

(4) $2\sin^2\frac{19\pi}{4} + \operatorname{tg}^2\frac{37\pi}{4}\operatorname{ctg}\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$.

14. 由下列条件分别求出角 x 所在的象限:

(1) $\sin x \cdot \cos x < 0$;　(2) $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} > 0$;

(3) $\sec x$ 与 $\operatorname{ctg} x$ 异号;

(4) $\sin x$ 与 $\cos x$ 都是减函数;

(5) $\cos x$ 与 $\operatorname{tg} x$ 都是增函数.

15. 用几何方法求 15°、75° 的各三角函数值.

16. (1) 已知 $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, 求 α 的其它三角函数值;

(2) 已知 $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{2}$, 求 α 的其它三角函数值.

17. (1) 已知 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, 求 $\frac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}$ 的值;

(2) 证明: $\frac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}\left(\alpha \neq k\cdot\frac{\pi}{2}, k \in I\right)$ 的值是正的.

18. 若 $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}$, 求下列两式的值:

(1) $\frac{2\cos\alpha - \sqrt{2}\sin\alpha}{2\cos\alpha + \sqrt{2}\sin\alpha}$;　(2) $\frac{1}{\sin^2\alpha - \sqrt{6}\sin\alpha\cos\alpha}$.

19. 已知 $\sin\theta = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, 求:

$\frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} + \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$ 的值.

20. 已知 α 和 β 互为余角, 求证:

(1) $\sin^2\alpha = (1 + \cos\alpha)(1 - \sin\beta)$;

(2) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$;

(3) $\cos^3\alpha + \cos^3\beta = (\sin\alpha + \sin\beta)(1 - \sin\alpha\sin\beta)$.

21. 求值(不查表):

(1) $\operatorname{tg}1^\circ \cdot \operatorname{tg}2^\circ \cdot \operatorname{tg}3^\circ \cdot \cdots \cdot \operatorname{tg}89^\circ$;

(2) $\sin^2 31^\circ + \operatorname{tg}31^\circ \cdot \operatorname{tg}59^\circ + \sin^2 59^\circ$;

(3) $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \cdots + \sin^2 89^\circ$.

22. 求使下列两式有意义的 a 的集合:

(1) $\sin\alpha = \dfrac{2a-3}{4-a}$;　(2) $\cos\alpha = \dfrac{a+4}{4\sqrt{a}}$;

23. 求使下列各式成立的 α 角所在的象限:

(1) $\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\cos\alpha$;

(2) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = \operatorname{tg}\alpha - \sec\alpha$.

24. 证明:

(1) $\dfrac{\sin A}{1+\cos A} + \dfrac{1+\cos A}{\sin A} = 2 \cdot \csc A$;

(2) $\dfrac{1+\sin A}{1+\cos A} \cdot \dfrac{1+\sec A}{1+\csc A} = \operatorname{tg} A$;

(3) $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha - 1} = \sin\alpha + \cos\alpha$;

(4) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha} = \sin^2\alpha \cdot \sec^2\alpha$.

25. 证明:

(1) $\operatorname{tg}^2 x \cdot \sin^2 x = \operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x$;

(2) $(2-\cos^2 x)(1+2\operatorname{ctg}^2 x) = (2+\operatorname{ctg}^2 x)(2-\sin^2 x)$;

(3) $(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = 2(1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)$;

(4) $(\sin\theta + \cos\theta)(\operatorname{tg}\theta + \operatorname{ctg}\theta) = \sec\theta + \csc\theta$.

26. 化简:

(1) $\dfrac{4-5\cos\alpha}{3-5\sin\alpha}+\dfrac{3+5\sin\alpha}{4+5\cos\alpha}$;

(2) $(a\sin\theta+b\cos\theta)^2+(a\cos\theta-b\sin\theta)^2$;

(3) $\dfrac{1}{1+\sin^2x}+\dfrac{1}{1+\cos^2x}+\dfrac{1}{1+\sec^2x}+\dfrac{1}{1+\csc^2x}$;

(4) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\csc^2x}}}$;

(5) $\dfrac{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}$.

27. 已知 $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$, 求证:

(1) $\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos\theta$;

(2) $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$.

28. 化简:

(1) $\sqrt{1+2\sin 300^\circ\cos 300^\circ}$;

(2) $\dfrac{\sqrt{\dfrac{1+\cos 45^\circ}{\sin 45^\circ}-\sqrt{2}-\sin 20^\circ}}{\sin 80^\circ-\sqrt{1-\sin^2 80^\circ}}$;

(3) $\dfrac{\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}}{\sin\alpha-\cos\alpha}$.

29. 化简:

(1) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\quad(\alpha\in(0,\pi))$;

(2) $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}\quad(\alpha\in(\pi,2\pi))$.

30. 化简:

(1) $\dfrac{\sin(3\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}(\alpha-5\pi)}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}\left(-\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}\cdot\dfrac{\cos(4\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha-2\pi)}$;

(2) $\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\csc^2(\alpha-2\pi)-1}+\dfrac{\sin(-\alpha)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)}$;

(3) $\dfrac{2\cos^2(90^\circ+\alpha)[\sec^2(180^\circ-\alpha)+1]}{1-\sin^4(\alpha-270^\circ)}$
$+2\operatorname{ctg}(270^\circ+\alpha)[\operatorname{ctg}(180^\circ+\alpha)$
$+\operatorname{tg}(360^\circ+\alpha)]$.

31. (1) 若 $a\sin\theta+\cos\theta=1$, $b\sin\theta-\cos\theta=1$, 求证: $ab=1$;

(2) 若 $a+\sin\theta=\csc\theta$, $b+\cos\theta=\sec\theta$, 求证: $a^{\frac{4}{3}}\cdot b^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{4}{3}}=1$;

(3) 若 $\sin^2\alpha\csc^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\gamma=1$, 求证: $\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\beta=\sin^2\gamma$.

32. 已知 $\operatorname{tg}\theta+\sin\theta=m$, $\operatorname{tg}\theta-\sin\theta=n$, 求证:

(1) $\cos\theta=\dfrac{m-n}{m+n}$; (2) $\left(\dfrac{m^2-n^2}{4}\right)^2=mn$.

二、三角函数的图象和性质

33. 求下列函数的定义域和值域:

(1) $y=\sqrt{\sin 2x}$; (2) $y=\dfrac{1}{1+2\cos x}$;

(3) $y=\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+1$; (4) $y=\sqrt{\lg\sin x}$;

(5) $y=\sqrt{\sec x-\sqrt{2}}$; (6) $y=\sqrt[4]{\sin x}+\sqrt{-\operatorname{tg}x}$.

34. (1) 当 α 在第二象限内变化时，六个三角函数中哪几个递增？哪几个递减？

(2) 已知 $y=2-\cos\alpha$，角 α 的终边在哪些象限内变化时 y 递增？在哪些象限内变化时 y 递减？

35. 试确定下列各式的符号：

(1) $\cos 1^\circ-\cos 2^\circ$； (2) $\dfrac{\sin 135^\circ-\sin 136^\circ}{\cos 57^\circ-\cos 51^\circ}$；

(3) $\dfrac{\operatorname{tg} 25^\circ-\operatorname{ctg} 25^\circ}{\operatorname{ctg} 57^\circ-\operatorname{tg} 57^\circ}$； (4) $\dfrac{\sin 20^\circ-\cos 20^\circ}{\operatorname{tg} 30^\circ-\operatorname{ctg} 30^\circ}$.

36. 求下列各函数的振幅 A、周期 T 和极值，并用五点法描出它们在一个周期内的图象，指出这些图象与 $y=\sin x$ 的图象的区别：

(1) $y=4\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$；

(2) $y=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{1}{2}x-1$；

(3) $y=2-\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

37. 作出下列函数的图象：

(1) $y=2\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$； (2) $y=\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{2}$.

38. 求下列各函数的最大值和最小值，并且分别求出取得这些值的角 x 的集合：

(1) $y=5\cos x$； (2) $y=1-\dfrac{1}{2}\sin x$；

(3) $y=3\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$；

(4) $y=3\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)+5$.

39. 根据图象写出使下列不等式成立的角 x 的集合：

(1) $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$； (2) $\sqrt{2}+2\sin x \geqslant 0$；

(3) $1+\operatorname{ctg} x \geqslant 0$； (4) $\operatorname{tg} x-\sqrt{3} \geqslant 0$；

(5) $|\sin x|<\frac{1}{2}$； (6) $\frac{\sqrt{3}}{3} \leqslant \operatorname{tg} x<1$.

40. 判断下列各函数的奇偶性：

(1) $y=1+\sec^2 x-|\operatorname{tg} x|$； (2) $y=\sin^3 x-\operatorname{tg} x$；

(3) $y=\frac{x^2+\cos x}{x^2-\cos x}$； (4) $y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$.

41. 不画图，指出下列各函数的振幅、周期和初相，并说明这些函数的图象是由正弦曲线 $y=\sin x$ 经过怎样的变化得出来的：

(1) $y=\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$； (2) $y=2\sin\left(\frac{x}{6}+\frac{\pi}{3}\right)$；

(3) $y=5\sin\left(100\pi x+\frac{\pi}{18}\right)$.

42. 在匀强磁场中，匀速转动的线圈所产生的电流 I 是时间 t 的正弦函数．即

$$I=3\sin\left(\frac{1}{2}t+\frac{\pi}{6}\right).$$

试求它的初始 ($t=0$) 电流、最大电流和周期.

乙　组　题

1. 设 $A=\left\{a:\ a=\cos\frac{5m\pi}{12}, m\in N\right\}$,

$B=\left\{b:\ b=\cos\frac{n\pi}{12}, n\in N\right\}$,

$$C=\left\{x:\ x>\frac{1}{2}\right\}.$$

(1) 证明 $A=B$; (2) 求 $A\cap C$。

2. 化简:

(1) $$\frac{\operatorname{ctg}\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi+\alpha\right]}{\sin(-2\pi+\alpha)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}+\frac{\cos\left[\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi+\alpha\right]\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)\cos(-\alpha)}\quad(n\in I);$$

(2) $$\frac{2\cos^3\alpha+\sin^2(360^\circ-\alpha)+\sin(90^\circ+\alpha)-3}{2\cos^2(180^\circ-\alpha)-\sin(270^\circ-\alpha)+2}.$$

3. 证明:

(1) $1+\sec^4\alpha-\operatorname{tg}^4\alpha=2\sec^2\alpha$;

(2) $\csc^4\alpha+\operatorname{ctg}^4\alpha=1+2\csc^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha$;

(3) $\sin A-\cos A=\dfrac{1-2\cos^2 A}{\sin A+\cos A}$;

(4) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$.

4. 已知 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$.

(1) 求 $\sin^4 x+\cos^4 x$ 的值;

(2) 写出以 $\sin x$、$\cos x$ 为根的二次方程,并求 x 的值.

5. 若 $\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta=\dfrac{25}{12}$, 求:

(1) $\operatorname{tg}^2\theta+\operatorname{ctg}^2\theta$; (2) $\operatorname{tg}\theta-\operatorname{ctg}\theta$; (3) $\operatorname{tg}^3\theta+\operatorname{ctg}^3\theta$.

6. 已知 $\sin\theta+\cos\theta=m\ (m\neq 1)$, 求下列二式的值:

(1) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$; (2) $\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta$.

7. 设 A、B、C、D 顺次为圆内接四边形的四个顶点,证明: