函数论习题集

HANSHULUNXITIJI

〔日〕远木幸成著 蒋增荣译

湖南科学技术出版社

函数论习题集

〔日〕远木幸成著　蒋增荣译
汪　浩　刘德铭校

湖南科学技术出版社

函数论习题集

〔日〕远木幸成著

蒋增荣译

汪浩、刘德铭校

责任编辑：胡海清

装帧设计：曾东凡

*

湖南科学技术出版社出版

湖南省新华书店发行

湘潭地区印刷厂印刷

*

1979年9月第1版第1次印刷

字数：227,000　印数：1—20,000册　印张：11.125

统一书号：13204·9　定价：1.04元

译者的话

函数论的著作很多，但习题书却很少，而且有的习题书所选的题目过难，不便应用。远木幸成理学博士所著的这本习题集，正如著者所称，尽量避免过难的题目，多选取较为平易的问题。书中还特别选入了很多重要的思考性的问题，以有助于提高解题练习的效果。虽然如此，但初学者仍需花费很多脑汁，才能获得充分的理解。

本书章、节的排列与日本共立出版公司出版的基础数学讲座《函数论》（远木幸成著）完全相同。各章中的提要列出了本章问题中所需的定义、定理。每章系统地配有例题，以供解题参考。习题的解答也相当详细。如果充分理解了提要内容及例题，独立完成各章习题不会有很大困难。本书著者在不大篇幅里介绍了函数论的基本内容，对材料的安排及问题的配备作了不少努力，应当说是一本较好的习题书。

在翻译过程中，遇到的名词尽量采用已有而习见的，也有少数名词是译者拟译的。原书喜用“在集E”或“在区域D”等字样，为照顾汉语习惯，译作“在集E上”或“在集E中”而不是译作“在集E”。这时不再含有这样的意义，即：“在集E上”暗指E是闭集，“在集E中”暗指E是开集。E到底是开集还是闭集，前后文自有交待。

历来共立数学讲座组稿出版较急，校对工作不免有些欠缺，给翻译工作带来一些不便。在翻译及校对中凡是发现印刷及遗漏的地方均已指正，较为重要的加了“译者注”，明显的错误虽已改正，但没有一一指明。

本书根据日本共立出版公司《数学演习讲座“函数论”》1957年第一版翻译。在翻译中，得到方能副教授不少帮助，特此致谢。

限于译者水平，谬误之处一定很多，望读者批评指正。

译　　者

一九七九年四月

目　录

第一章　复　数

第二章　复变函数

第三章　复变积分

第四章　无限函数列

第五章　保角映射

第六章　Dirichlet 问题

第七章　解析延拓

第八章　函数特论

第一章 复 数

提 要

1.1 实数的性质

定义 实数的集合S有界时，S的最小上界称为S的**上限**，S的最大下界称为**下限**，各以$\sup S$，$\inf S$表示①。

定理1 实数的集合S如果有上界，则其上限存在，如果S有下界，则下限存在。

定理2 a是S的上限的必要充分条件是：

(1) 对于属于S的一切数x，有$x \leqslant a$；

(2) 设ε为任意正数，S中必有这样的数x存在，使$a-\varepsilon<x$.

同样，b是S的下限的必要充分条件是：

(1)′ 对于属于S的一切数y，有$y \geqslant b$；

(2)′ 设ε为任意正数，S中必有这样的数y存在，使$y<b+\varepsilon$。

定理3 单调递增(或递减)数列如果有上界(下界)，则这个数列收敛。

定理4 关于区间I_n：$a_n \leqslant x \leqslant b_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$，如果

---

① "上限"和"下限"亦可分别称作"上确界"和"下确界"。——译者注

$$I_n \supset I_{n+1}, \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0①$$

则仅仅存在一点为各区间所共有。

定理5 （Cauchy收敛定理）

数列$\{a_n\}$收敛的必要充分条件是，对于任意的正数 ε，可确定号码N，当$p>N$，$q>N$时，有$|a_p - a_q|<\varepsilon$成立。

定义 数列$\{a_n\}$有界时，从号码n开始的数列

$$a_n, a_{n+1}, a_{n+2}\cdots$$

的上限和下限各设为l_n，m_n，则称

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} l_n, \quad \mu = \lim_{n\to\infty} m_n$$

为$\{a_n\}$的**上极限**和**下极限**，各以

$$\lambda = \varlimsup_{n\to\infty} a_n, \quad \mu = \varliminf_{n\to\infty} a_n$$

表示。当$\{a_n\}$没有上界时，定义$\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$，$\{a_n\}$没有下界时，定义$\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$。

1.2 复 数

定义 设a,b为实数，i为虚数单位，复数α表示为$\alpha = a + bi$。称 a 为α的实部，b 为α的虚部，各以$\Re(\alpha)$，$\Im(\alpha)$表示。又称$a - bi$为α的共轭复数，以$\bar{\alpha}$表示。

定义 对于复数$\alpha = a + bi$，称$\sqrt{a^2 + b^2}$为 α 的**绝对值**，以$|\alpha|$表示。又称满足

$$\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

① 原文误为“$I_n \supset I_{n-1}$”。——译者注

的角θ为α的**幅角**，以$\arg\alpha$表示。

定理6　设$\alpha = a + bi$，$\alpha' = a' + b'i$，则

$$|\alpha| = |-\alpha|,\quad |\alpha| = |\bar{\alpha}|, \alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2 = |\bar{\alpha}|^2;$$

$$|\alpha \cdot \alpha'| = |\alpha| \cdot |\alpha'|,\quad \left|\frac{\alpha}{\alpha'}\right| = \frac{|\alpha|}{|\alpha'|};$$

$$|a| \leqslant |\alpha|,\quad |b| \leqslant |\alpha|,\quad |\alpha| \leqslant |a| + |b|;$$

$$\arg(\alpha \cdot \alpha') = \arg\alpha + \arg\alpha',$$

$$\arg\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right) = \arg\alpha - \arg\alpha'.$$

定理7　设$z_1, z_2, \cdots, z_n$为异于零的复数，则有

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|.$$

仅当$\arg z_1 = \arg z_2 = \cdots = \arg z_n$时，等号成立。

定义　对于$z = a + bi$，设$|z| = r$，$\arg z = \theta$，称

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

为复数的**极形式**。

定理8　（Cauchy收敛条件）复数数列$\{\alpha_n\}$收敛的必要充分条件是对于任意正数ε，总存在号码N，对于$n \geqslant N, p > 0$的一切自然数n, p，成立

$$|\alpha_{n+p} - \alpha_n| < \varepsilon.$$

系　级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$收敛的必要充分条件是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$同时收敛。

定理9　级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$收敛的必要充分条件是对于任意正数$\varepsilon$，总存在号码$N$，对于$n \geqslant N$，$p > 0$的一切自然数$n, p$，成立

$$|\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \cdots + \alpha_{n+p}| < \varepsilon.$$

定义 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛时，称级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛。

定理10 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛的必要充分条件是$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$同时绝对收敛。

1.3 点集合

定义 对于点a和正数ρ，称满足$|z-a|<\rho$的点z的全体为a的ρ—**近傍**。特别，没有指定ρ时，只称为a的**近傍**。如果在一定点a的任意近傍中都包含有集合E的无限多个点，则称a为E的**凝聚点**。特别E为点列时，a称为**极限点**。还有，以$a\in E$表示a属于集合E。

定义 点集合E的凝聚点均属于E时，称E为闭集合。全复数平面除去集合E的剩余部分称为E的**补集合**。集合E的补集合是闭集合时，称E为**开集合**。

定义 点a的某个近傍全是集合E的点时，称a为E的**内点**，点a是E的补集合的内点时，称a为E的**外点**。a的任意近傍内，既有内点又有外点时，称a为E的**境界点**，E的境界点的全体称为E的**境界**。

定义 给出有限个或者无限个点集合时，由各个集合的全部点所成的集合称为它们的**和集**，由它们的一切公共点的全体所成的集合称为它们的**通集**。集合E_1，E_2的和集以E_1+E_2或者$E_1\cup E_2$表示，通集以$E_1\cdot E_2$或者$E_1\cap E_2$表示。

定理11 开集合的和集以及闭集合的通集，不论其个数如何，仍是开集合和闭集合。

定理12 有限个开集的通集以及有限个闭集的和集，仍为开集和闭集。

注意 无限个开集的通集以及无限个闭集的和集，不一定仍是开集和闭集。

定理13 (Heine–Borel 定理) 设对于有界闭集合的每一点各给以一个近傍，则从这些近傍中可选出有限个，使得 E 的一切点均包含在这些近傍中。

定理14 (Bolzano–Weierstrass 定理)有界的无限点集合必有凝聚点。

系 有界的无限数列必含有收敛的子数列。

定义 一个集合的全部元素可与自然数 $1,2,3,\cdots,n,\cdots$ 一一对应时，则称这个集合为可数无限集合。有限集合和可数无限集合总称为可数集合。

定义 点集合 E 的点 α 不是 E 的凝聚点时，称 α 为 E 的**孤立点**。E 的所有点均为孤立点时，称 E 为**孤立点集合**。

定理15 孤立点集合是可数集合。

定义 一个至少含有两个点的闭集合，如果不能分作两个不具有公共点的非空的闭集，则称这个闭集合为**连续体**。如果一个开集不能分作两个不具有公共点的非空开集，则称这个开集为**区域**。

定理16 开集 D 是区域的必要充分条件是可用一条曲线(这曲线完全由 D 的点所构成)联结 D 的任意两点。

定义 设点集合 E 和 E 外的一点 α，称

$$d(\alpha,E)=\inf_{z\in E}|z-\alpha|$$

为a和E的**距离**。又设E和E^*为两个点集合，称

$$d(E,E^*)=\inf_{z\in E,\, z^*\in E^*}|z-z^*|$$

为E和E^*的**距离**。

定理17 设E和E^*是没有公共点的闭集合，并且E和E^*之中至少有一个有界，则

$$d(E,E^*)>0。$$

定义 由定义于有界区间$a\leqslant t\leqslant b$的函数$z(t)=x(t)+iy(t)$所描绘的曲线，如果$x(t)$，$y(t)$都是连续函数，则称这曲线是连续曲线。当$z(a)=z(b)$时，称为**闭曲线**，当$z(a)\neq z(b)$时，称为**开曲线**。又如果当$t_1\neq t_2$时，有$z(t_1)\neq z(t_2)$，则称这个曲线为Jordan**开曲线**。对于Jordan开曲线，如果$x'(t)$，$y'(t)$都连续，且$x'(t)=0$和$y'(t)=0$不同时发生，则这个曲线称为**正则弧**，由有限个正则弧相联结所得到的曲线称为**正则曲线**。除去$z(a)=z(b)$之外，如果$t_1\neq t_2$，有$z(t_1)\neq z(t_2)$，则这曲线称为Jordan**闭曲线**。

定理18 Jordan闭曲线将平面分成两部分。一部分是有界区域，另一部分是无界区域。

定义 由Jordan闭曲线所分成的区域中，有界的部分称为此闭曲线的内部，另一部分则称为其外部。

定义 设Σ是半径为1的球面①，它与复数平面相切于原点S。N为过S点的Σ的直径的另一端，设复数平面上的点z和N相连接的直线交Σ于P。由这个方法，除N外，复数平面与Σ

① 根据下文，特别是由例题〔13〕，这里似应改为"设Σ是直径为1的球面"。——译者注

的全体点成一一对应，称此为**球极投影**。在复数平面上补充一点与 Σ上的点 N相对应，这点名叫无限远点，以记号∞表之。以记号 $|z|\leq\infty$表示补充了∞点的所谓全平面。因而以记号 $|z|<\infty$表示不含∞的全有限平面。

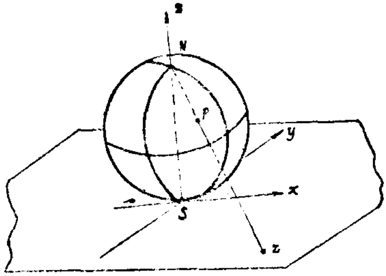

图 1.1

称Σ为复数球面或者 Riemann**球面**。

定理19 由球极投影，与复数平面上的点$z=x+iy$相对应的Riemann球面上的点P的坐标(ξ,η,ζ)之间成立如下关系式：

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\frac{x}{1+x^2+y^2}=\frac{1}{2}\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}}\\ \eta&=\frac{y}{1+x^2+y^2}=\frac{1}{2i}\frac{z-\bar{z}}{1+z\bar{z}}\\ \zeta&=\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}=\frac{z\bar{z}}{1+z\bar{z}}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{\xi}{1-\zeta}\\ y&=\frac{\eta}{1-\zeta}\\ x^2+y^2&=\frac{\zeta}{1-\zeta}\\ \xi^2+\eta^2&=\zeta-\zeta^2\end{aligned}\right\}$$

定理20 （Bolzano–Weierstrass定理的推广）

全复数平面上的任意无限集合必存在凝聚点。

例　　题

〔1〕设$\{x_n\}$，$\{y_n\}$各为数列，证明如下不等式：

（1）$\sup\{x_n\}\geqslant\inf\{x_n\}$；

（2）$\inf\{x_n\}+\inf\{y_n\}\leqslant\inf\{x_n+y_n\}\leqslant\inf\{x_n\}+\sup\{y_n\}$；

（3）$\inf\{x_n\}+\sup\{y_n\}\leqslant\sup\{x_n+y_n\}\leqslant\sup\{x_n\}+\sup\{y_n\}$。

解　（1）对于任意的号码n，由于

$$\sup\{x_n\}\geqslant x_n,\quad x_n\geqslant\inf\{x_n\},$$

故

$$\sup\{x_n\}\geqslant x_n\geqslant\inf\{x_n\}.$$

（2）对于任意的n，由于有$x_n\geqslant\inf\{x_n\}$，$y_n\geqslant\inf\{y_n\}$，

因此

$$x_n+y_n\geqslant\inf\{x_n\}+\inf\{y_n\}.$$

从而得到

$$\inf\{x_n+y_n\}\geqslant\inf\{x_n\}+\inf\{y_n\}.$$

又由于$x_n+y_n\geqslant\inf\{x_n+y_n\}$，$y_n\leqslant\sup\{y_n\}$，所以有$x_n+\sup\{y_n\}\geqslant\inf\{x_n+y_n\}$，亦即有

$$x_n\geqslant\inf\{x_n+y_n\}-\sup\{y_n\}.$$

因此

$$\inf\{x_n\}\geqslant\inf\{x_n+y_n\}-\sup\{y_n\}.$$

（3）由于$x_n\geqslant\inf\{x_n\}$，$x_n+y_n\leqslant\sup\{x_n+y_n\}$，

所以有$y_n\leqslant\sup\{x_n+y_n\}-x_n\leqslant\sup\{x_n+y_n\}-\inf\{x_n\}$。

因此

$$\sup\{y_n\}\leqslant\sup\{x_n+y_n\}-\inf\{x_n\}.$$

另外，由于$\sup\{x_n\}\geqslant x_n$，$\sup\{y_n\}\geqslant y_n$，所以$\sup\{x_n\}+\sup\{y_n\}$