

高等学校教学用书

电子计算机应用数学

第一册

冶金工业出版社

1.9
3.14
1.1

高等学校教学用书

电子计算机应用数学

第 一 册

杨麓引 马正午 孙 宇 等 编

冶金工业出版社

高等学校教学用书

电子计算机应用数学

第一册

杨箴引 马正午 孙宇等 编

*

冶金工业出版社出版

新华书店北京发行所发行

冶金工业出版社印刷厂印刷

*

787×1092 1/16 印张 28 1/4 字数 677 千字

1979年7月第一版 1979年7月第一次印刷

印数00,001~80,000册

统一书号: 15062·3446 定价 3.10 元

前 言

电子计算机是当前世界科学技术最重要的成就之一。随着我国四个现代化的逐步实现，电子计算机必将在国民经济和科学技术的各个方面日益得到广泛的应用。电子计算机的应用技术涉及到现代数学的许多方面，远远超出了原工院校《高等数学》的范畴。本书主要是为电子计算机专业、自动控制专业及自动化仪表专业等的教学需要而编写的；着重介绍最基础的知识，尽可能地介绍有关领域的新成果与应用；同时编选了例题和习题。为了照顾有关专业的不同需要，对较难理解的部分用*号或附录编排，供教学时选择。

由于篇幅较大，本书分三册出版。第一册包括线性代数和数值分析；第二册包括复变函数、积分变换、变分法、概率论、随机过程、集合论与拓扑学引论等；第三册包括离散数学结构和数据结构等内容。

本书由杨箴引主编，第一章由马正午执笔，第二章由孙宇执笔，参加编写工作的还有王佩玲、谢克中等同志。在编写过程中，得到了李文清、戴冠中等同志的大力帮助，我们在此表示衷心感谢。

由于编者水平有限，时间仓促，又未经过教学实践，所以本书很不成熟，缺点和错误在所难免，请读者批评指正。

编 者

1978年12月

目 录

第一章 线性代数	1
第一节 矩阵与线性方程组	1
一、 n 阶行列式	1
二、 n 维向量	15
三、矩阵及其秩的计算	23
四、线性方程组	28
第二节 矩阵代数	45
一、矩阵的加法和矩阵与数相乘运算	45
二、矩阵的乘法运算和矩阵的幂	47
三、分块矩阵	54
四、逆矩阵	59
五、矩阵的因式分解	70
第三节 线性空间和线性变换	81
一、预备知识	81
二、线性空间	84
三、线性变换	92
四、欧氏空间	104
五、 U 空间和 U 变换	121
第四节 特征值与特征向量	127
一、特征矩阵的概念	128
二、特征多项式及其性质	141
三、矩阵的Jordan标准形介绍	156
第五节 二次形	170
一、二次形和它的标准形	170
二、惯性定律	181
三、正定二次形	185
第六节 矩阵分析	189
一、基本概念	189
二、函数矩阵的微分和积分	191
三、矩阵函数	201
第七节 广义逆矩阵	212
一、广义逆 A^- 的一般概念与性质	213
二、广义逆 A^- 在解线性方程组中的应用	228
三、Moore-Penrose广义逆	238
四、矩阵方程	248
附录 I 矩阵函数 $f(A)$ 的Lagrange插值多项式算法	254
附录 II 状态转移矩阵	256
附录 III 用线性微分方程组解矩阵Riccati方程	263

第二章 数值分析	269
第一节 引言	269
第二节 一元方程的解法	273
一、多项式及其零点	274
二、二分法	283
三、插值法(试位法和抛物线法)	284
四、一点迭代法	286
五、加速收敛	289
六、高阶过程Newton法	290
第三节 数值逼近	295
一、线性插值	296
二、多项式插值	298
三、有限差分插值	301
四、样条函数逼近	306
五、最小二乘多项式逼近	309
第四节 数值微分和积分	312
一、数值微分	312
二、数值积分	315
三、Gauss-Legendre求积法	323
第五节 线性方程组的解法	326
一、主元素消去法	326
二、Gauss-Jordan消去法	335
三、消元法的误差	336
四、用迭代法解线性方程组	344
第六节 代数特征值问题	348
一、Jacobi方法	348
*二、化实对称矩阵为三对角形	355
*三、对称三对角矩阵的特征值	358
*四、对称三对角矩阵的特征向量	362
*五、代数特征值问题计算过程	364
六、求矩阵最大与最小特征值的迭代法	371
第七节 常微分方程的数值解法	372
一、Euler法	373
二、预测-校正法	375
三、Runge-Kutta法	377
四、稳定性	382
五、微分方程组和高阶方程	383
六、边值问题	385
第八节 最优化方法简介	388
一、一元函数的最优化	389
二、多元函数最优化问题	395
附录 I 几个基本方法的标准FORTRAN程序	403

附录Ⅱ 线性规划的解法	417
附录Ⅲ Gauss-Jordan法求矩阵的逆矩阵	427
附录Ⅳ 偏微分方程的数值解法	433
习题解答	438
参考文献	444

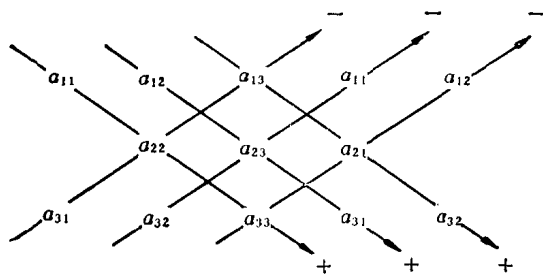


图 1-1

是三个既位于不同的行，也位于不同的列的元素乘积，并且满足这样规律的乘积项（只能有六项），也都在行列式中出现了。但是每一项乘积正负号的规律，却不易观察出来。图 1-1 是帮助我们记忆三阶行列式展开式的一种方法。

为了弄清楚三阶以上行列式的展开式各乘积项的正负号的规律性，我们将每项乘积元素的两个下标，按如下规律重排。由于每行都取一个元素，故可将 n 个乘积元素的第

一个下标（行下标）按自然数顺序排列。这样排列好后，第二个下标（列下标）跟着便形成了一种顺序，将两个下标排列在如下的括号内：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

(1) 式中 p_1, p_2, \dots, p_n 均表示 n 个不相同的自然数。显然 $p_1 p_2 p_3 \cdots p_n$ 则表示了 n 个不相同自然数的某种排列。(1) 式以后我们称之为一个置换。

如果还是以三阶展开式为例，则可以写出如下六种不同的置换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

而且 (2) 式中的后五个置换均可以利用第一个置换改变第二行自然数的顺序而得到。例如，置换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

相当于将

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

中第二行自然数 1, 3 互换得到。再如，置换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

是经过下面的两次自然数互换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

而得到的。

这样我们又可把 (2) 式的全部置换分成两类：能通过自然数奇次互换得到的，称为奇置换，如 (2) 中的后三个置换。能通过自然数偶次互换得到的，称为偶置换，如 (2) 中的前三个置换。又由三阶行列式展开式发现，偶置换的对应乘积项恰取正号；奇置换的对应乘积项恰取负号。如果将上述分析推广到一般，我们就可以给出 n 阶行列式的定义。

1. n 阶行列式的定义与性质

定义 1 用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (6)$$

表示的 n 阶行列式指的是这样的 $n!$ 项的代数和: 这些项是一切可能的取自 (6) 的不同的行与不同的列的 n 个元素的乘积, 每一项的符号决定于这一项乘积的元素之下标置换次数的奇偶性, 偶数取正, 奇数取负。

为了理论上研究的方便, 我们也常把 (6) 式缩写成如下形式

$$|a_{ij}| \quad (i, j=1, 2, \cdots, n)$$

或用和号表示成

$$|a_{ij}| = \sum \varepsilon(p_1 p_2 \cdots p_n) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

其中
$$\varepsilon(p_1 p_2 \cdots p_n) = \begin{cases} 1 & \text{当 } (p_1 p_2 \cdots p_n) \text{ 为偶次置换} \\ -1 & \text{当 } (p_1 p_2 \cdots p_n) \text{ 为奇次置换} \end{cases}$$

现在我们来研究 n 阶行列式的性质。

性质 1 行列式的行与列互换, 其值不变。即设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则有

$$D = D^T$$

(今后我们称 D^T 为 D 的转置行列式)

证 由行列式定义, 有

$$D = |a_{ij}| = \sum \varepsilon(p_1 p_2 \cdots p_n) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \quad (7)$$

$$D^T = |a_{ji}| = \sum \varepsilon(p_1 p_2 \cdots p_n) a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n} \quad (8)$$

分析 (7) 和 (8) 两式可知: D 和 D^T 是由完全相同的项组成, 并且下标排列 $(p_1 p_2 \cdots p_n)$ 的奇偶性相同, 所不同的只是元素的第一、第二下标进行了互换 (即元素行与列互换), 故有 $D = D^T$ 。

性质 2 交换行列式的两行 (或列), 行列式改变符号。即

$$\begin{array}{c}
 (i) \\
 \dots \\
 (j)
 \end{array}
 \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
 \end{vmatrix}
 = -
 \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
 \end{vmatrix}
 \begin{array}{c}
 (i) \\
 \dots \\
 (j)
 \end{array}
 \quad (9)$$

证 由行列式的定义可知, 等式左边展开式的每一项均可写成为

$$a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}$$

符号由元素第二下标的排列顺序的奇偶性来决定, 即由置换

$$\begin{pmatrix}
 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\
 p_1 & \dots & p_i & \dots & p_j & \dots & p_n
 \end{pmatrix}
 \quad (10)$$

来决定。

等式(9)的右边与左边所不同的仅仅是第*i*行元素变成第*j*行元素, 第*j*行元素变成第*i*行元素; 而列的次序未变。所以, 等式(9)右边展开式每一项的符号应该由置换

$$\begin{pmatrix}
 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\
 p_1 & \dots & p_j & \dots & p_i & \dots & p_n
 \end{pmatrix}
 \quad (11)$$

来决定。由于*p_i*和*p_j*互换, 所以置换(10)和(11)的奇偶性显然相反。故等式(9)两边相差一个负号。

性质3 某一行(或列)各元素如有公因子, 则可将公因子提出行列式记号之外。即

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
 \end{vmatrix}
 = k
 \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
 \end{vmatrix}
 \quad (12)$$

证 根据行列式的定义, 等式(12)的左边有

$$\sum \varepsilon(p_1 p_2 \dots p_n) a_{1p_1} \dots (ka_{ip_i}) \dots a_{np_n} = k \sum \varepsilon(p_1 p_2 \dots p_n) a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}$$

因此等式(12)左右两边完全相等。

性质4 某一行(或列)的各元素如果是两个数的和, 则可以把这行列式化为两个行列式之和。即

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{i1} + a'_{i1} & a_{i2} + a'_{i2} & \dots & a_{in} + a'_{in} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
 \end{vmatrix}
 =
 \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
 \end{vmatrix}
 +
 \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
 \end{vmatrix}
 \quad (13)$$

证 由行列式定义, 等式(13)左边有

$$\sum \varepsilon(p_1 p_2 \dots p_n) a_{1p_1} \dots (a_{ip_i} + a'_{ip_i}) \dots a_{np_n}$$

$$= \sum \varepsilon(p_1 p_2 \cdots p_n) a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n} + \sum \varepsilon(p_1 p_2 \cdots p_n) a_{1p_1} \cdots a'_{ip_i} \cdots a_{np_n}$$

这样就证明了等式 (13)。

性质 5 如果行列式中有两行 (或两列) 的对应元素成比例, 则行列式的值等于零。
即

$$(i) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (j) & ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

证 记等式 (14) 左边的值为 D , 利用性质 3, 则有

$$D = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = kD_1$$

显然, 行列式 D_1 中的第 i 行与第 j 行元素是相同的, 交换这两行, 行列式的值变号, 即 $D_1 = -D_1$, 移项得 $2D_1 = 0$, 从而 $D_1 = 0$, 于是有 $D = 0$ 。

特别是, 若行列式中有两行 (或两列) 的对应元素相同, 则行列式等于零。

性质 6 如果一行 (或一列) 中每个元素加上另一行 (或另一列) 对应元素的 k 倍, 行列式的值不变。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (15)$$

证 由行列式定义, 有

$$\begin{aligned} & \sum \varepsilon(p_1 p_2 \cdots p_n) a_{1p_1} \cdots (a_{ip_i} + ka_{jp_i}) \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n} \\ &= \sum \varepsilon(p_1 p_2 \cdots p_n) a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n} + k \sum \varepsilon(p_1 p_2 \cdots p_n) a_{1p_1} \\ & \quad \cdots a_{jp_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n} \end{aligned}$$

上式等号右边第二个和式是具有两行相同的行列式, 由性质 5 知其值为 0。于是性质 6 得证。

2. n 阶行列式的计算

定义 2 n ($n > 1$) 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的某一元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 指的是在 D 中划去 a_{ij} 所在的行和列后, 所余下的 $(n-1)$ 阶余子式。即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例 1 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

则元素 a_{23} 的余子式 M_{23} 为

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

定义 3 n 阶行列式 D 的元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 附以符号 $(-1)^{i+j}$ 后, 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式, 用记号 A_{ij} 表示。即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

譬如例 1 中的四阶行列式, 元素 a_{23} 的代数余子式为

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

一个四阶的行列式, 它的各元素的代数余子式的符号, 我们可以通过下面的表来记忆

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

对于 n 阶行列式的各元素代数余子式的符号规律, 可以根据上表依此类推得到。

下面我们来研究 n 阶行列式的计算问题。为此, 我们先介绍关于行列式降阶的定理。

定理 1 设有一个 n 阶行列式

再由定理 1, 可得

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

同理对行列式 D 的行进行上述运算, 可得

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

通常我们也称定理 2 为行列式的降阶定理。

例 2 计算下列四阶行列式的值

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解 利用定理 2 对此行列式进行降阶。(下面我们依第三行展开),
得

$$\begin{aligned} D &= 2 \times (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} \\ &+ (-1) \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 16 - 40 + 48 = 40 \end{aligned}$$

为了求解此行列式的值, 我们还可以先不利用定理 2, 而是通过行列式性质 6, 把所求行列式中的一些元素变成零, 然后再利用定理 1 来进行降阶。(这种方法叫做先“造零”, 后降阶), 具体作法如下, 例如, 我们可以选择行列式的第三行来“造零”:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{3 \text{ 列加到} \\ 4 \text{ 列上}}}{=} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\substack{3 \text{ 列} \times (-2) \\ \text{加到 1 列上}}}{=} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

这时再利用定理 1, 得

$$\begin{aligned} D &= 1 \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{1 \text{ 行加到} \\ 2 \text{ 行上}}}{=} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 30 + 10 = 40 \end{aligned}$$

例 3 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

证 反复利用定理 1 对上述等式左边行列式进行降阶, 可得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \cdots = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii} \end{aligned}$$

说明: (1) 符号“ \prod ”表示连乘积的意思, $\prod_{i=1}^n a_{ii}$ 即为

$$\prod_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

(2) 同例 3 我们显然可以证得:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \cdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

(行列式中空白处表示元素为 0, 以下同)

特殊地, 显然有

$$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

(3) 以后我们常把行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \cdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

② 分别称为下三角行列式和上三角行列式。例 3 的结论, 可以启发我们一个计算较高阶行列式的数值的方法: 先利用行列式的性质 (即对行列式进行“造 0”) 化成上 (或下) 三角

行列式的形状, 然后再将主对角线上元素乘起来, 就是所求行列式的值。利用这样的方法来计算较高阶行列式的值, 既快又简便。

例 4 计算下列 n 阶 Vandermonde 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

解 由行列式的最后一行开始, 每一行减去它的相邻的前一行乘以 a_1 , 得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & (a_2 - a_1) & (a_3 - a_1) & \cdots & (a_n - a_1) \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}$$

根据定理 1, 有

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} (a_2 - a_1) & (a_3 - a_1) & \cdots & (a_n - a_1) \\ a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} \\ &= (a_2 - a_1) (a_3 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= (a_2 - a_1) (a_3 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \cdot D_{n-1} \end{aligned}$$

D_{n-1} 称 $(n-1)$ 阶 Vandermonde 行列式, 若对 D_{n-1} 施以同样的运算, 得

$$D_{n-1} = (a_3 - a_2) (a_4 - a_2) \cdots (a_n - a_2) D_{n-2}$$

$$D_{n-2} = (a_4 - a_3) (a_5 - a_3) \cdots (a_n - a_3) D_{n-3}$$

.....

所以, 最后得到

$$\begin{aligned} D_n &= (a_2 - a_1) (a_3 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \\ &\quad (a_3 - a_2) \cdots (a_n - a_2) \\ &\quad \cdots \cdots \cdots \\ &\quad (a_n - a_{n-1}) \end{aligned}$$

如果采用连乘积的符号, Vandermonde 行列式的值可以有如下简洁的表达式:

$$D_n = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)$$

定理 3 行列式