SPT 21世纪高等院校教材 理工类

实变函数与泛函分析基础教程

上海交通大学国家工科数学教学基地
邵国年 编

科学出版社

21世纪高等院校教材(理工类)

实变函数与泛函分析基础教程

上海交通大学国家工科数学教学基地

邵国年 编

科 学 出 版 社

2002

内 容 简 介

本书是编者经过多年的教学实践逐步形成的.全书由实变函数与泛函数分析两部分内容组成,共分十章.第一、第二章介绍集合与点集拓扑的一些基本概念;第三至第五包括一般的测度、可测函数与积分理论;第六至第八章介绍赋范线性空间、内积空间与泛函分析的若干基本定理;第九章简单介绍 Banach 代数和全连续算子的谱;第十章为附录.在第一至第八章的每章末尾还配有一定数量的习题.

本书可作为数学与应用数学专业本科生的教学参考书或教材,其中的第六至第八章及第九章的部分内容也可作为工科研究生“应用泛函分析”课程的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

实变函数与泛函分析基础教程/邵国年编.—北京:科学出版社,2002
ISBN 7-03-010178-2
(21 世纪高等院校教材(理工类))

Ⅰ.实… Ⅱ.邵… Ⅲ.①实变函数-教材②泛函分析-教材
Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 008634 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002 年 5 月第 一 版 开本:720×1000 1/16
2002 年 5 月第一次印刷 印张:14
印数:1—3 000 字数:247 000

定价:19.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前　言

本书是编者在上海交通大学应用数学系多年教学的基础上逐步编写而成的. 实变函数与泛函分析已是一门比较成熟的数学专业基础理论课程，编者根据上海交通大学应用数学专业本科教学的实际需求与可能，对内容进行了一定的取舍. 在“实变函数”部分，适当增加了“拓扑空间”的若干基本概念的介绍；在测度论中，直接引入集合代数与 σ 代数及一般测度的初步理论，而将经典的 Lebesgue 测度作为其特例，并由此展开相应的可测函数与积分理论；对广义测度与复测度也作了简要介绍；同时淡化了对某些具体的实函数的性质的深入探究，且将有关有界变差函数与绝对连续函数的讨论置于附录之中. 在“泛函分析”部分，仍限于赋范线性空间、内积空间及有界线性算子与泛函的基本内容，但对部分内容进行了适当的简化. 例如：基于一般测度的积分理论，l^p 空间只是作为 L^p 空间的特例；在 Hilbert 空间理论中将 Fourier 展开定理置于更加明确的中心地位. 由于实际教学时数的限制与学生已有知识的局限，也囿于编者的水平，本书很少涉猎有关理论的应用实例，这不能不说是一大缺憾.

本书作为教材，编者在编写过程中无疑会参阅国内外大量有关书籍、文献，并从中汲取合适的素材，不再一一指出. 需要特别说明的是，期间何琛先生始终给予了编者很多指点与关怀，先生当年在我校教师进修班同名课程的授课笔记乃是编者案头的主要参考资料，在此谨表示深深的敬意.

最后，衷心感谢我系有关领导的鼎力支持，使得本书得以顺利地出版.

编　者

2000 年 9 月

目　　录

第一章　集　合

§1.1　集合及其运算

1.1.1　集合的概念

所谓一个“集合”(或“集”),是指在一定范围内可以互相区别的事物的汇集.构成一个集合的每一事物称为该集合的元素或点.

若 x 是构成集合 A 的事物之一,则称 A 含有 x,或称 x 属于 A,记作 $x\in A$.反之,若 x 不是构成集合 A 的事物,则称 A 不含有 x,或称 x 不属于 A,记作 $x\notin A$.

对事物 x 与集合 A 来说,关系“$x\in A$”与“$x\notin A$”中有且只有一个成立.

为了方便,我们引进所谓不含任何元素的集合,称之为空集,记为 $\varnothing$.

注意,一个集合中的各个元素必须是彼此互异的,在集合的表示中相同的元素只出现一次.

1.1.2　集合的相等与包含关系

若集合 A 的元素均为集合 B 的元素,即

$$x\in A\Rightarrow x\in B,$$

则称 A 为 B 的子集,并称 A 包含于 B,或 B 包含 A,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.若 A 与 B 的元素完全一致,即

$$x\in A\Leftrightarrow x\in B,$$

则称 A 与 B 相等,记为 $A=B$.若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$,则称 A 为 B 的真子集.

规定空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集.

关系“$\subset$”满足:

(i) $A\subset A$;

(ii) 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则 $A=B$;

(iii) 若 $A\subset B$,$B\subset C$,则 $A\subset C$.

1.1.3　集合的运算

由集合 A 中的所有元素与集合 B 中的所有元素汇集在一起所构成的集合称为 A 和 B 的并集,记为 $A\cup B$,即

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

由 A 和 B 的一切共有元素所构成的集合称为 A 和 B 的交集，记为 $A \cap B$，即

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

特别地，若 $A \cap B = \varnothing$，即 A 和 B 无共有元素，则称 A 和 B 不相交.

由一切属于 A 但不属于 B 的元素所构成的集合称为 A 与 B 的差集，记为 $A \setminus B$，即

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

若 $A \subset X$，则 $X \setminus A$ 称为 A 关于 X 的余集（或补集），记为 $C_X A$，如果没有必要标出 X，也可简记为 A^C.

关于“并”、“交”和“余”有以下运算性质：

(i) 交换律 $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

(ii) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(iii) 分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

(iv) 对偶律 (De Morgan 公式) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$, $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

1.1.4 集族

若集合 $\mathscr{A}$ 的元素本身都是集合 X 的子集，则称 $\mathscr{A}$ 为集合 X 上的一个集族. 记号 $\bigcup\limits_{A \in \mathscr{A}} A$ 与 $\bigcap\limits_{A \in \mathscr{A}} A$ 分别表示 $\mathscr{A}$ 中所有元素（作为 X 的子集）的并集与交集.

以后若无特别说明，记号 $\mathscr{P}(X)$ 表示以集合 X 的一切子集为其元素的集族，并称之为 X 的幂集（合）.

如果除了集合 X 之外，另有一个集合 Λ（称为指标集），使得对于 Λ 中的每一个元素 λ，有 X 的一个子集与之对应，这样就得到 X 上的一个集族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$，简记为 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$，并称之为由指标集 Λ 所确定的 X 上的集族，其并与交分别记为 $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 与 $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. 特别地，若 $\Lambda = \{1, 2, \cdots, n\}$ 则记 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 为 $\{A_k\}_{1 \leqslant k \leqslant n}$，其并与交分别记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 与 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$. 又若 Λ 为自然数集 $\mathbf{N}$，则记 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 为 $\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ 或 $\{A_n\}_{n \geqslant 1}$，其并与交分别记为 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 与 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$；$\{A_n\}_{n \geqslant 1}$ 通常称为集合序列，简称为集列. 若 n 为一自然数，则记号 $\{A_k\}_{k \geqslant n}$，$\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ 以

及$\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$的意义是显见的.

需要特别指出的是,在集族的表示中并不要求当$\alpha\neq\beta$时有$A_\alpha\neq A_\beta$,对集合序列也有同样的说明.以后,我们将集列$\{A_n\}_{n\geq 1}$简记为(A_n).

1.1.5 集合序列的极限

定义 1.1.1 设(A_n)为一集列,令

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k;\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k,$$

分别称$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$与$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$为集列$(A_n)$的上限集与下限集.若$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$,则称集列$(A_n)$的极限存在或收敛,且记其极限(集)为$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

定理 1.1.1 设(A_n)为一集列,则

(1) $x\in\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$的充要条件是有无穷多个$A_n$含有$x$;

(2) $x\in\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$的充要条件是存在$n_x\in\mathbf{N}$当$n\geq n_x$时恒有$x\in A_n$.

证明留作练习.

定义 1.1.2 设(A_n)为一集列,若$A_n\subset A_{n+1}(n=1, 2, \cdots)$,则称该集列是递增的,记为$A_n\uparrow$;若$A_n\supset A_{n+1}(n=1, 2, \cdots)$,则称该集列是递减的,记为$A_n\downarrow$.递增与递减集列统称为单调集列.

定理 1.1.2 设(A_n)为一集列,

(1) 若$A_n\uparrow$,则(A_n)收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$;

(2) 若$A_n\downarrow$,则(A_n)收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

证明留作练习.

1.1.6 集族的直积(集)

设A,B是两个集合,令

$$A\times B := \{(a, b)\mid a\in A, b\in B\},$$

称为集合A和B的直积集(Cartesian 积集).规定

$$(a_1, b_1)=(a_2, b_2)\Leftrightarrow a_1=a_2 \text{ 且 } b_1=b_2.$$

类似地,n个集合$A_k(1\leq k\leq n)$的直积定义为

$$\prod_{k=1}^{n}A_k := \{(a_1, a_2, \cdots, a_n)\mid a_k\in A_k, k=1, 2, \cdots, n\}.$$

关于一般的集族的直积,需利用"选择公理".此处只给出集列(A_n)的直积的形式定义

$$\prod_{n=1}^{\infty} A_n := \{(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) \mid a_n \in A_n, n = 1, 2, \cdots\}.$$

§1.2 集合的势(基数)

1.2.1 映射的概念

设X和Y是两个非空集合,若在X和Y之间存在一个对应关系,使得对于X中的每个元素x,在Y中有惟一的元素y与之对应,则称给出了一个从X到Y的映射,而上述y称为x在该映射下的像.若用f表示此映射,则上述对应关系常表示为

$$f: X \to Y,$$
$$x \mapsto y = f(x),$$

X称为映射f的定义域,记为$\mathscr{D}(f)$.

若对于任一$y \in Y$存在$x \in X$使得$y = f(x)$,则称f是"映上"的或"满射";若对于X中的任何两个元素,当$x_1 \neq x_2$时有$f(x_1) \neq f(x_2)$,则称f是"**1-1**"的或"单射";若f既是"**1-1**"的(单射)又是"映上"的(满射),则称f是一一对应(双射);若存在$y_0 \in Y$使得对一切$x \in X$有$f(x) = y_0$,则称f为常值映射;若$Y = X$,且对于任一$x \in X$有$f(x) = x$,则称f为恒等映射,X上的恒等映射常记作I_X;若$Y = \mathbf{R}$(或$\mathbf{C}$),则称f为X上的实(或复)函数.

若$f: X \to Y$为双射,则对每一个$y \in Y$,有且仅有一个$x \in X$使得$f(x) = y$,定义

$$f^{-1}: Y \to X,$$
$$y \mapsto x = f^{-1}(y),$$

则f^{-1}是Y到X上的双射,称之为f的逆映射.

设$f: X \to Y$,对于$A \subset X$及$B \subset Y$,令

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\},$$
$$f^{-1}(B) := \{x \mid f(x) \in B\}$$

(规定$f(\varnothing) = \varnothing$),则称$f(A)$为$A$在映射$f$下的像,$f^{-1}(B)$为$B$在映射$f$下的原像.

易知,若 $f:X\to Y$ 为双射,则对于 $B\subset Y$, $f^{-1}(B)$既可视作 B 在映射 f 下的原像,又可视作 B 在映射 f^{-1}下的像.

定理 1.2.1 设 $f:X\to Y$, $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$和$\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$分别是 X 和 Y 上的集族,则

$$f\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\Big)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f(A_\lambda),\quad f\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\Big)\subset\bigcap_{\lambda\in\Lambda}f(A_\lambda),$$
$$f^{-1}\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\Big)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(B_\lambda),\quad f^{-1}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\Big)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(B_\lambda).$$

证明留作练习.

在今后的学习中我们将经常用到集合的特征函数:设 $E\subset X$, 定义 $\chi_E: X\to\mathbf{R}$

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E,\\ 0, & x\notin E,\end{cases}$$

称 χ_E 为集合 E 的特征函数.

集合的特征函数有如下一些性质:

设 $A,B,E_n(n=1,2,\cdots)$为 X 中的集合,则

(1) $A\neq B\Leftrightarrow\chi_A\neq\chi_B$;

(2) $A\subset B\Leftrightarrow\chi_A\leqslant\chi_B$;

(3) $\chi_{A\cap B}=\chi_A\cdot\chi_B$;

(4) $\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}$;

(5) $\chi_{A\setminus B}=\chi_A[1-\chi_B]$;

(6) $\chi_{\overline{\lim}E_n}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\chi_{E_n}$;

(7) $\chi_{\underline{\lim}E_n}=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\chi_{E_n}$;

(8) (E_n)收敛$\Leftrightarrow(\chi_{E_n})$收敛;且此时成立 $\chi_{\lim E_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\chi_{E_n}$.

1.2.2 集合的对等、势

若从集合 A 到集合 B 存在着一个一一对应(映射),则称 A 和 B 对等,记作 $A\sim B$,与之相反的情形则称 A 和 B 不对等.此外,约定 $\varnothing\sim\varnothing$.关系"$\sim$"具有以下性质:

(i) 对任何集合 A,成立 $A\sim A$;

(ii) 若 $A\sim B$,则 $B\sim A$;

(iii) 若 $A\sim B$,且 $B\sim C$,则 $A\sim C$.

除了记法"$A\sim B$"外,我们也用"$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$"表示 A 与 B 对等,其中"$\overline{\overline{A}}$"

称为集合 A 的势(或基数). 因此,"两个集合具有相同的基数(或等势)"只是"两个集合对等"的另一种说法.

1.2.3 势的比较

若集合 A 与集合 B 的某一子集对等,则记为 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$;若 A 与 B 不对等,但 A 与 B 的某一子集对等,则记为 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$.

定理 1.2.2 对任何集合 A,必有 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\mathscr{P}(A)}}$.

证 若 $A = \varnothing$,则 $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing\}$,定理的结论显然成立.

现设 $A \neq \varnothing$. A 显然与 $\mathscr{P}(A)$ 中的那些由 A 的每个元素所成的单点集构成的子集族对等,因而 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{\mathscr{P}(A)}}$. 下用反证法. 若 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{\mathscr{P}(A)}}$,则存在 A 到 $\mathscr{P}(A)$ 的双射 f. 于是对任一 $a \in A$ 有 $f(a) \in \mathscr{P}(A)$,即 $f(a)$ 是 A 的一个子集. 现令

$$A^* = \{a \mid a \in A,\ a \notin f(a)\},$$

则 $A^* \in \mathscr{P}(A)$. 由于 f 是 A 到 $\mathscr{P}(A)$ 的一一对应,于是存在惟一的 $a^* \in A$ 使得 $f(a^*) = A^*$. 若 $a^* \in A^*$,则由 A^* 的定义应有 $a^* \notin f(a^*)(= A^*)$,矛盾;又若 $a^* \notin A^*$,同样由 A^* 的定义应有 $a^* \in f(a^*)(= A^*)$,矛盾. 因此 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{\mathscr{P}(A)}}$ 不能成立,从而必有 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\mathscr{P}(A)}}$.

引理(Banach) 设 $f: A \to B$, $g: B \to A$,则存在 $M \subset A$ 使得

$$g(f(M)^C) = M^C,$$

其中 $f(M)^C = B \setminus f(M)$, $M^C = A \setminus M$.

证 令

$$\Gamma = \{E \mid E \subset A,\ E \cap g(f(E)^C) = \varnothing\},$$

$$M = \bigcup_{E \in \Gamma} E,$$

则有 $M \in \Gamma$. 事实上,由于

$$E \cap g(f(M)^C) \subset E \cap g(f(E)^C) = \varnothing, \quad E \in \Gamma,$$

所以

$$M \cap g(f(M)^C) = \varnothing,$$

即得 $g(f(M)^C) \subset M^C$.

下证 $g(f(M)^C) = M^C$. 用反证法. 若不然,则存在 $a_0 \in A \cap (M \cup g(f(M)^C))^C$. 现令 $M_0 = M \cup \{a_0\}$, 则有

$$M \cap g(f(M_0)^C) \subset M \cap g(f(M)^C) = \varnothing,$$

$$\{a_0\} \cap g(f(M_0)^C) \subset \{a_0\} \cap g(f(M)^C) = \varnothing,$$

从而有

$$M_0 \cap g(f(M_0)^C) = \varnothing,$$

此即说明 $M_0 \in \Gamma$ 且 M 为 M_0 的真子集，这与 M 的定义矛盾. 证毕.

定理 1.2.3　(1) 对任何集合 A，有 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{A}}$;

(2) 若 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{C}}$，则 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{C}}$;

(3) 若 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}}$，则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$(Bernstein 定理).

证　只证(3). 由假设，存在单射 $f: A \to B$ 及单射 $g: B \to A$；又由引理，存在 $M \subset A$ 使得 $M^C = g(f(M)^C)$. 注意到

$$f: A \to f(A), \quad g: B \to g(B)$$

均为双射，由此令 $\varphi: A \to B$,

$$\varphi(a) = \begin{cases} f(a), & a \in M, \\ g^{-1}(a), & a \in M^C. \end{cases}$$

显然 φ 是 A 到 B 上的双射，即得 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

§1.3　可数集与不可数集

对于集合 A：若 $A = \varnothing$，则规定 $\overline{\overline{A}} = 0$；若存在 $n \in \mathbf{N}$ 使得 $A \sim \{1, 2, \cdots, n\}$，则定义 $\overline{\overline{A}} = n$，在这两种情形下，均称 A 为有限集；若 $A \sim \mathbf{N}$；则称 A 为可数集(或可列集)，且记 $\overline{\overline{A}} = \aleph_0$. 显然，$A$ 为可数集的充要条件是 A 中的所有元素可排列成 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$，其中当 $n \neq m$ 时 $a_n \neq a_m$.

不是有限集的集合称为无限集；不是可数集的无限集称为不可数集. 特别地，有限集与可数集统称为至多可数集.

定理 1.3.1　任一无限集必含有可数子集.

证　设 A 为无限集. 取 $a_1 \in A$，由于 $A \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$，所以可取 $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$，又 $A \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$，所以可取 $a_3 \in A \setminus \{a_1, a_2\}, \cdots$，此过程可无限进行下去，于是就得到 A 的一个可数子集 $\{a_n\}_{n \geqslant 1}$.

推论　可数集的任一子集必为至多可数集.

证　设 A^* 为 A 的无限子集，则由 $A^* \subset A$ 知 $\overline{\overline{A^*}} \leqslant \overline{\overline{A}}$，又由定理 1.3.1 知，$\overline{\overline{A^*}} \geqslant \aleph_0 = \overline{\overline{A}}$，于是由 Bernstein 定理即得 $\overline{\overline{A^*}} = \overline{\overline{A}} = \aleph_0$.

定理 1.3.2　设 $1\leqslant\overline{\overline{\Lambda}}\leqslant\aleph_0$，若 $\overline{\overline{A_\lambda}}\leqslant\aleph_0(\lambda\in\Lambda)$，则 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 为至多可数集；又若存在 $\lambda\in\Lambda$ 使得 $\overline{\overline{A_\lambda}}=\aleph_0$，则 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 为可数集.

证　若 $\overline{\overline{\Lambda}}=1$，则结论显然成立. 现只需证明当 $\Lambda=\mathbf{N}$，$\overline{\overline{A_n}}=\aleph_0(n\in\mathbf{N})$ 且 $A_n\cap A_m=\varnothing(n\neq m)$ 时结论成立. 为此，记

$$A_1=\{a_{11},\ a_{12},\ \cdots,\ a_{1j},\ \cdots\},$$

$$A_2=\{a_{21},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{2j},\ \cdots\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_n=\{a_{n1},\ a_{n2},\ \cdots,\ a_{nj},\ \cdots\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 中的元素可排列为

$$\{a_{11},\ a_{21},a_{12},\ a_{31},\ a_{22},\ a_{13},\ \cdots,\ a_{ij},\ \cdots\},$$

其中 a_{11} 排第一，当 $i+j>2$ 时，a_{ij} 排在第 n 位：$n=j+\sum\limits_{k=1}^{i+j-2}k$.

定理1.3.3　若 $1\leqslant\overline{\overline{A_k}}\leqslant\aleph_0(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，且存在 $i\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 使得 $\overline{\overline{A_i}}=\aleph_0$，则 $\prod\limits_{k=1}^{n}A_k$ 是可数集.

证　只需证明当 $\overline{\overline{A_k}}=\aleph_0(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 时结论成立. 现用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时，结论显然成立. 设 $n=m$ 时结论成立，现取定 $a_i^{(m+1)}\in A_{m+1}$，记

$$B_i=\left(\prod_{k=1}^{m}A_k\right)\times\{a_i^{(m+1)}\}(i=1,\ 2,\ \cdots),$$

则 $B_i\sim\prod\limits_{k=1}^{m}A_k$，由假定 B_i 为可数集，而 $\prod\limits_{k=1}^{m+1}A_k=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}B_i$，故由定理 1.3.2 即得所证.

例 1　有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可数集.

证　只需证明正有理数集 $\mathbf{Q}_+$ 为可数集. 一方面，$\mathbf{Q}_+$ 显然为无限集；另一方面，可将 $\mathbf{Q}_+$ 视作 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 的子集，由此即知 $\mathbf{Q}_+$ 为可数集.

例 2　实数集 $\mathbf{R}$ 是一不可数集.

证　只需证明闭区间 $[a,\ b](a<b)$ 为不可数集，下用闭区间套定理结

合反证法说明之. 若$[a, b]$为可数集,则可将其表为$\{x_n\}$. 现将$[a, b]$三等分,记其分点为c, d,则在$[a, c]$与$[d, b]$中至少有一个区间不含有x_1,将此区间记为$[a_1, b_1]$;对$[a_1, b_1]$重复上述对$[a, b]$的讨论,可得不含有$\{x_1, x_2\}$的子区间$[a_2, b_2]$;如此以往,我们得到一闭区间序列$\{[a_n, b_n]\}$满足:

(1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \subset [a, b] (n = 1, 2, \cdots)$;

(2) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{3^n} (n = 1, 2, \cdots)$;

(3) $[a_n, b_n]$中不含有$\{x_1, \cdots, x_n\} (n = 1, 2, \cdots)$.

由闭区间套定理,$[a, b]$中存在(惟一)$\xi \in [a_n, b_n] (n = 1, 2, \cdots)$. 由假定$[a, b] = \{x_n\}$,因此必存在$k \in \mathbf{N}$使得$\xi = x_k$,而由上述(3)知$x_k \notin [a_n, b_n] (n \geqslant k)$. 由此得到矛盾. 证毕.

以后,记$\mathbf{R}$的势为$\aleph$,并称$\aleph$为连续统势. 于是由势的比较的定义,可知$\aleph > \aleph_0$. 易知,$\mathbf{R}$上的任意非退化区间与$\mathbf{R}$对等,从而也具有连续统势$\aleph$.

定理 1.3.4　若$2 \leqslant \overline{\overline{A_n}} \leqslant \aleph (n = 1, 2, \cdots)$,则$\prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n$的势为$\aleph$.

证　易知,我们只需证明:当$\overline{\overline{A_n}} = 2 (n = 1, 2, \cdots)$时$\prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n$的势$\geqslant \aleph$;而当$\overline{\overline{A_n}} = \aleph (n = 1, 2, \cdots)$时$\prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n$的势$\leqslant \aleph$.

若$\overline{\overline{A_n}} = 2$,则$A_n \sim \{0, 1\} (n = 1, 2, \cdots)$, $\prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n \sim \{(\delta_n) \mid \delta_n \in \{0, 1\}, n = 1, 2, \cdots\} = A$. 注意到$A$中的那些具有无穷多个1的元素(数列)全体与二进制无穷小数全体(即$(0,1]$)一一对应,于是$\overline{\overline{A}} \geqslant \aleph$,从而$\prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n$的势$\geqslant \aleph$.

若$\overline{\overline{A_n}} = \aleph$,则$A_n \sim (0,1] (n = 1, 2, \cdots)$, $\prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n \sim \{(\alpha_n) \mid \alpha_n \in (0, 1], n = 1, 2, \cdots\} = B$. 将每个$\alpha_n$用二进制无穷小数表示:

$$\alpha_n = 0.\alpha_{n1}\alpha_{n2}\cdots\alpha_{nk}\cdots, \ \alpha_{nk} \in \{0, 1\} (k = 1, 2, \cdots; n = 1, 2, \cdots),$$

任取$\alpha = (\alpha_n) \in B$,令

$$f(\alpha) = 0.\delta_1\delta_2\cdots\delta_n\cdots,$$

其中$\delta_1 = \alpha_{11}$, $\delta_n = \alpha_{ij} \left(n = j + \sum\limits_{k=1}^{i+j-2} k, \ i + j > 2\right)$, $n \geqslant 2$(参见定理1.3.2

的证明). 显然, f 为 B 到 $(0,1]$ 中的单射, 于是 $\overline{\overline{B}} \leqslant \aleph$, 从而 $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ 的势 $\leqslant \aleph$.

推论 1 若 $1 \leqslant \overline{\overline{\Lambda}} \leqslant \aleph_0$, $1 \leqslant \overline{\overline{A_\lambda}} \leqslant \aleph (\lambda \in \Lambda)$, 且存在 $\lambda_0 \in \Lambda$ 使得 $\overline{\overline{A_{\lambda_0}}} = \aleph$, 则 $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 的势为 $\aleph$.

推论 2 若 $1 \leqslant \overline{\overline{\Lambda}} \leqslant \aleph$, $\overline{\overline{A_\lambda}} \leqslant \aleph (\lambda \in \Lambda)$, 且存在 $\lambda_0 \in \Lambda$ 使得 $\overline{\overline{A_{\lambda_0}}} = \aleph$, 则 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 的势为 $\aleph$.

上述两个推论的证明留作练习.

§1.4 Zorn 引理

以下简单介绍一下作为公理的 Zorn 引理, 它与 Zermelo 选取公理等价, 在本书的泛函分析部分, 将有所应用.

Zorn 引理 若偏序集 $M (\neq \varnothing)$ 的任一全序子集均有上界, 则 M 存在极大元.

注 Zorn 引理中有关术语的定义.

1° 设有集合 M, 其上定义了一个二元关系"$\prec$"(偏序), 满足:

(i) $a \prec a$;

(ii) 若 $a \prec b$ 且 $b \prec a$, 则 $a = b$;

(iii) 若 $a \prec b$, $b \prec c$, 则 $a \prec c$;

则称 $(M, \prec)$ 为偏序集. (一般就称 M 为偏序集.)

2° 如果偏序集中的任意元素 a 和 b, 关系"$a \prec b$"与"$b \prec a$"中至少有一个成立, 那么就称该集为全序集.

3° 设 W 为偏序集 M 的子集, 如果 $u \in M$ 满足: 若 $x \in W$ 则 $x \prec u$, 那么就称 u 为 W 的一个上界.

4° 设 M 为一偏序集, 如果 $m \in M$ 满足: 若 $m \prec x$ 则 $x = m$, 那么就称 m 为 M 的一个极大元.

例 设有集合 X, 令 $M = \mathscr{P}(X)$, 则集合的包含关系"$\subset$"便可作为 $\mathscr{P}(X)$ 上的一个偏序关系.

习 题

1. 证明: $(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^C = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^C$; $(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^C = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^C$.
2. 证明: $(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \cap (\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma) = \bigcup_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \gamma \in \Gamma}} (A_\lambda \cap B_\gamma)$;

$$(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \cup (\bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma) = \bigcap_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \gamma \in \Gamma}} (A_\lambda \cup B_\gamma).$$