统计学数学方法

〔瑞典〕H. 克 拉 美 著

上 海 科 学 技 术 出 版 社

統計学数学方法

〔瑞典〕H. 克拉美 著

魏宗舒等譯

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书以現代数学的观点为数理統計建立了一套理論体系
共分三部分．第一部分专讲数学的基础知識，分十二章，内容
括点集論，R_1 和 R_n 中的测度論与积分論，及若干有关知識．
二部分讲述随机变量与概率分布，分十二章，内容包括基础理論
R_1 中的变量与分布，R_n 中的变量与分布．第三部分讲述統
推断理論，分十三章，内容包括一般概念，抽样分布，显著性
驗，估計理論等。可供高等学校概率論和数理統計专业的师
閱讀，也可供科学工作者和实际工作者参考。

MATHEMATICAL METHODS
OF STATISTICS
H. Cramér
Princeton Univ. Press, 1946.

統 計 学 数 学 方 法

魏宗舒 郑 朴 吳 錦 譯

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路 450 号）
上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

商务印书館上海厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本 850×1156 1/32 印張 18 排版字数 442,000
1966 年 1 月第 1 版 1966 年 1 月第 1 次印刷
印数 1—3,200

統一书号 13119·663 定价（科六）2.70 元

譯 者 序

H. Cramér 写这本书的目的，是要把数理統計学建立在現代数学的基础上，使能适应現代的要求.

要达到这样的目的，不可避免地要用到很多的現代数学，但作者知道，对讀者的数学水平却又不能要求过高，这样就提出了要用多少和多高的数学准备知識的問題. 关于这两个問題，作者凭着他多年的数学和科研經驗，选取点集論、欧几里得空間內的測度論及积分論、Fourier 变换、矩陣論等列入第一部分作为本书的数学基础知識. 凡具有相当于我国大学理工科二年級数学程度的讀者都可以自己閱讀.

第二部分包括近代概率論的基础知識. 作者在这里着重两个方面：一方面强調概率的頻率解釋，另一方面側重于离散型及連續型的概率分布.

第三部分才进入数理統計学. 这一部分的选材是可以討論的，但是总的說来，是經过作者郑重考虑的. 这一部分如他在原序中所說，仅对抽样分布理論、統計估計及显著性檢驗等作了叙述. 虽然这里集中討論一些較重要的問題，但其中具体材料仍較丰富. 此外，在讲解方面以及各部分的相互关系方面也处理得較好，而且一切需要証明的定理都一貫証到底.

在說明本书优点的同时，必須指出作者在本书中所反映出的錯誤观点. 首先值得提出的是作者的学术观点. 他认为数学理論是"在公理基础上构成的、而在邏輯上沒有矛盾的命題系統"，"数学論証基本上是不可能証明物理事实的"，从而把数学理論說成是一个可以与現实世界完全隔絕而能由理性任意創造的理論体系，

这是典型的唯心主义观点. 他又从各种数学理論中，区分出来那种能被証实符合經驗的理論，称之为“除了純粹的数学兴趣外，还具有应用价値”，而把应用归結为三类，即描述、分析和預測，低估了数学理論的目的，反映了濃厚的經驗論色彩. 其次，在本书的不少章节中，作者通过举例，企图将資本主义制度所固有的社会現象，用統計方法将它們解釋为一种自然現象，而掩蓋資本主义制度的本质. 这种例子可在164、198、212、239等頁上找到.

本书在取材上也有某些不足之处. 比如在內容方面，关于理論的叙述多，而实际的考慮过少，除了第30及31两章中有几个具体的例子外，在很有实用价値的方差分析中竟然一个例子也沒有.

总之，这是一本数理統計学的理論著作，有一定的参考价値，但也同时存在着缺点.

本书譯笔有欠通順，致与原书頗多失眞之处，如荷讀者惠予批評指正，不胜感激之至.

譯 者 謹志

原　　序

在晚近二十五年中，統計科学[①]取得了巨大的进展．在此时期內，古典概率論已发展成为純粹的数学理論，从严密性来讲已达到了近代的水平．

本书的目的，是要綜合这两方面的发展而对以概率概念为基础的近代統計方法中的数学理論作一闡述．要充分理解这些方法的理論，要求有較高的純粹数学的知識．我是本着讀者只掌握了微积分、代数与解析几何的基本知識这一观点来写这本书的．

本书的第一部分，可视为一种数学引論．在这里，有些数学知識对讀者可能是較为生疏而对于学习第二、第三部分又是必需的．其中特别以分布及关于一个分布的积分的基本概念为重点．在第四、第五两章中，对勒貝克測度和积分的理論作了簡单的叙述，作为分布及分布的积分等基本概念的一个引言．而在第六、第七两章中，則概述这些基本概念的直接推广．

本书的第二部分，包含了随机变量和概率分布的一般理論．第三部分則对抽样分布理論、統計估計及显著性檢驗等作了闡述．最后一部分所討論的問題的选擇必然有些随意性，但我尽量集中討論一般的重要問題．当讀者已充分掌握这些知識后，就能够自己解决在应用中遇到的特殊問題了．为了給本书的篇幅以一个适当的限制，不得不舍弃我原来打算討論的某些很有兴趣的题目，例如随机过程的理論、統計时間序列及周期图．

統計檢驗的理論可借用各种应用領域內的数字的例子来說明．限于篇幅，例題的数目必然要作很大的縮減．关于数値計算

① 这里的統計科学是指数理統計而言．——譯者注

实际步驟的問題,也必須不加討論.

要学习本书的其余部分,并不必要先学完整个第一部分. 讀者若急于要学习第二、第三部分,可先熟悉一下前面提到的那些基本概念. 为此,只須閱讀了第一至三章及4.1~4.2、5.1~5.3、6.1~6.2、6.4~6.6、7.1~7.2、7.4~7.5、8.1~8.4諸节之后,即可开始閱讀第十三章,在閱讀过程中可随时参閱第一部分中的有关問題.

本书是以我自1930年以来在大学中的讲稿为基础,其中大部分是于1942~1944年写成. 由于战爭的原因,这些年中,在瑞典能用作参考的国外科学著作极不完备,而且得到的很迟. 因此,本书可能遺漏了一些应該引用的材料及参考文献.

H. 克拉美
斯德哥尔摩大学
数理統計系
1945年5月

目　录

譯者序

原　序

第一部分　数学的基础知識

第一至三章　点　　集

第 一 章　集合的一般性质……………………………………………………1

1.1 集合(1)　1.2 子集,空間(2)　1.3 集合的运算(3)　1.4 集合的序列(6)　1.5 单調序列(7)　1.6 集合的可加族(8)

第 二 章　綫性点集 ……………………………………………………… 9

2.1 区間(9)　2.2 $\boldsymbol{R}_1$ 中集合的各种性质(10)　2.3 Borel 集(11)

第 三 章　n維空間內的点集……………………………………………………13

3.1 区間(13)　3.2 $\boldsymbol{R}_n$ 中集合的各种性质(14)　3.3 Borel 集(14)　3.4 綫性集(15)　3.5 子空間,乘积空間(15)

第四至七章　$\boldsymbol{R}_1$ 中的測度与积分論

第 四 章　綫性点集的 Lebesgue 測度……………………………………17

4.1 区間的长(17)　4.2 推广(19)　4.3 区間的和的測度(20)　4.4 有界集的外測度和內測度(23)　4.5 可測集与 Lebesgue 測度(26)　4.6 可測集族(28)　4.7 可測集与 Borel 集(30)

第 五 章　一元函数的 Lebesgue 积分……………………………………32

5.1 有界函数在一具有有限測度集合上的积分 (32)　5.2 B-可測函数 (35)　5.3 积分的性质(38)　5.4 在一具有有限測度的集合上的无界函数的积分(40)　5.5 无限測度的集合上的积分(44)　5.6 作为一个可加集函数的 Lebesgue 积分(46)

第 六 章　$\boldsymbol{R}_1$ 中的非負可加集函数……………………………………47

6.1 Lebesgue 測度和 Lebesgue 积分的推广(47)　6.2 集函数和点函数(48)　6.3 集函数的构造(51)　6.4 P-測度(54)　6.5 有界集函数(55)　6.6 分布(55)　6.7 分布序列(57)　6.8 一个收斂定理(59)

第七章 一元函数的 Lebesgue-Stieltjes 积分 ……61

7.1 在具有有限 P-测度的集合上的有界函数的积分(61) 7.2 无界函数与具有无限 P-测度的集合(64) 7.3 具有参数的 Lebesgue-Stieltjes 积分(65) 7.4 关于分布的 Lebesgue-Stieltjes 积分(69) 7.5 Riemann-Stieltjes 积分(70)

第八至九章 $\boldsymbol{R}_n$ 中的測度与积分論

第八章 $\boldsymbol{R}_n$ 中的 Lebesgue 測度及其他的可加集函数 ……75

8.1 $\boldsymbol{R}_n$ 中的 Lebesgue 測度(75) 8.2 $\boldsymbol{R}_n$ 中的非負可加集函数(76) 8.3 有界集函数(76) 8.4 分布(79) 8.5 分布序列(81) 8.6 乘积空間中的分布(82)

第九章 n 元函数的 Lebesgue-Stieltjes 积分 ……84

9.1 Lebesgue-Stieltjes 积分(84) 9.2 关于分布的 Lebesgue-Stieltjes 积分(85) 9.3 关于累次积分的一个定理(86) 9.4 Riemann-Stieltjes 积分(87) 9.5 Schwarz 不等式(87)

第十至十二章 各种有关知識

第十章 Fourier 积分 ……88

10.1 $\boldsymbol{R}_1$ 中分布的特征函数(88) 10.2 某些輔助函数(90) 10.3 $\boldsymbol{R}_1$ 中特征函数的唯一性定理(91) 10.4 $\boldsymbol{R}_1$ 中特征函数的連續性定理(94) 10.5 某些特殊的积分(97) 10.6 $\boldsymbol{R}_n$ 中的分布的特征函数(99) 10.7 $\boldsymbol{R}_n$ 中特征函数的連續性定理(100)

第十一章 矩陣、行列式与二次型 …… 101

11.1 矩陣(102) 11.2 向量(104) 11.3 綫性变换的矩陣表示(105) 11.4 双綫性型与二次型的矩陣表示(106) 11.5 行列式(106) 11.6 秩(107) 11.7 附加矩陣与逆矩陣(109) 11.8 綫性方程(110) 11.9 正交矩陣,特征数(111) 11.10 非負二次型(112) 11.11 $\sum_1^n x_i^2$ 的分解(114) 11.12 一些积分公式(116)

第十二章 若干补充 ……120

12.1 記号 O, o 与 $\backsim$ (120) 12.2 Euler-MacLaurin 求和公式(121) 12.3 Γ-函数(123) 12.4 β-函数(124) 12.5 Stirling 公式(126) 12.6 正交多項式(128)

第二部分 随机变量与概率分布

第十三至十四章 基 础

第十三章 統計与概率 ……133

13.1 随机实验(133)　13.2 例(134)　13.3 統計規則性(137)　13.4 数学理論的目的(140)　13.5 数学的概率(143)

第十四章　基本定义及公理……147

14.1 随机变量(公理 1～2)(147)　14.2 联合变量(公理 3)(150)　14.3 条件分布(152)　14.4 独立的变量(154)　14.5 随机变量的函数(157)　14.6 結論(159)

第十五至二十章　R_1 中的变量与分布

第十五章　一般性质……161

15.1 分布函数与频率函数(161)　15.2 两种簡单类型的分布(163)　15.3 平均值(166)　15.4 矩(168)　15.5 位置度量(171)　15.6 离散度量(173)　15.7 Tchebycheff 定理(176)　15.8 偏敧度量及超越度量(177)　15.9 特征函数(178)　15.10 半不变量(179)　15.11 独立的变量(181)　15.12 独立变量之和(181)

第十六章　几种离散型分布……186

16.1 函数 $\varepsilon(x)$(186)　16.2 二项分布(187)　16.3 Bernoulli 定理(189)　16.4 De Moivre 定理(191)　16.5 Poisson 分布(196)　16.6 Poisson 推广的二项分布(198)

第十七章　正态分布……200

17.1 正态函数(200)　17.2 正态分布(202)　17.3 独立的正态变量(204)　17.4 中心极限定理(205)　17.5 中心极限定理的附注(210)　17.6 由正态分布导出的正交展开式(213)　17.7 由正态分布导出的漸近展开式(219)　17.8 正态分布在統計学中的地位(222)

第十八章　几种与正态分布有关的分布……224

18.1 χ^2-分布(224)　18.2 学生分布(228)　18.3 Fisher 的 z-分布(232)　18.4 β-分布(234)

第十九章　另外几种連續型分布……235

19.1 矩形分布(235)　19.2 Cauchy 分布及 Laplace 分布(237)　19.3 截尾分布(238)　19.4 Pearson 分布系(239)

第二十章　一些收斂定理……241

20.1 分布的收斂与变量的收斂(241)　20.2 某些收斂到正态分布的分布的收斂性(241)　20.3 依概率收斂(243)　20.4 Tchebycheff 定理(244)　20.5 Khintchine 定理(244)　20.6 一个收斂定理(245)

第十五至二十章的习题……246

第二十一至二十四章 R_n 中的变量与分布

第二十一章 二維的情形……251

21.1 两种簡单类型的分布(251) 21.2 平均值,矩(253) 21.3 特征函数(256) 21.4 条件分布(257) 21.5 回归 I (260) 21.6 回归 II (262) 21.7 相关系数(268) 21.8 变量的綫性变换(270) 21.9 相关比与均方联系(271) 21.10 密集椭圓(273) 21.11 独立变量之和(275) 21.12 正态分布(277)

第二十二章 R_n 中的分布的一般性质……281

22.1 两种簡单类型的分布,条件分布(281) 22.2 連續型分布中的变量变换(283) 22.3 平均值,矩(284) 22.4 特征函数(286) 22.5 分布的秩(287) 22.6 变量的綫性变换(288) 22.7 密集椭球体(290)

第二十三章 n 元的回归与相关……291

23.1 回归面(291) 23.2 綫性均方回归(292) 23.3 剩余(294) 23.4 偏相关(295) 23.5 复相关系数(297) 23.6 正交均方回归(298)

第二十四章 正态分布……299

24.1 特征函数(299) 24.2 非异的正态分布(300) 24.3 奇异的正态分布(301) 24.4 正态分布变量的綫性变换(302) 24.5 平方和的分布(302) 24.6 条件分布(303) 24.7 独立变量之和. 中心极限定理(305)

第二十一至二十四章的习題……306

第三部分 統 計 推 断

第二十五至二十六章 一 般 概 念

第二十五章 抽样的基本概念……309

25.1 引言(309) 25.2 簡单随机抽样(309) 25.3 子样的分布(311) 25.4 子样值作为随机变量. 抽样分布(312) 25.5 一个分布的統計縮影(313) 25.6 偏性抽样、随机抽样数字(315) 25.7 抽出后不放回的抽样. 代表性法(317)

第二十六章 統計推断……317

26.1 引言(317) 26.2 理論符合实际. 显著性檢驗(318) 26.3 描述(320) 26.4 分析(321) 26.5 預測(324)

第二十七至二十九章 抽 样 分 布

第二十七章 抽样分布的特征……326

第一部分

数学的基础知識

第一至三章　点　　集

第一章　集合的一般性质

1.1 集合　在純粹数学和应用数学中，我們常常会遇到要去研究具有某些特定性质的对象的总体的情形．这样定义了的任何对象的总体，我們称它为集合，每一个属于这种集合的对象，則称为集合的一个元素．

集合的元素可以是任意种类的对象：点，数，函数，事件，人等等．例如(1)全体正整数組成的集合，(2)在一条給定的直綫上的全体的点組成的集合，(3)二个变量的全体有理函数組成的集合，(4)出生在某一国家而到1940年底还活着的人全体組成的集合．在本书的第一部分，我們主要将討論元素是点或数的那种集合，但在这一章里，我們将从元素可以是任何种类的一般情况来考慮．

在上述例(4)中，虽然可能不知道集合中元素的个数，但可以知道它只包含有穷个元素，而在上述的前三个例子中，集合所包含的元素的个数显然不是有穷的．因此，我們必須去区别有穷集合与无穷集合．

一个无穷集合，若其中的元素可以排列成一个序列：$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$，且使得(a)每一个 x_n 均为集合的一个元素，及(b)集合中的每一个元素，均在这序列的一个确定的位置上出現，便叫做可数的．由这样的一种排列，我們可以建立起集合的元素与全体正整数 $1, 2, \cdots, n, \cdots$ 組成的集合的元素之間的一一对应．由全体正整数組成的集合，即为可数集合的一个最簡单的例子．

以后我們将会知道存在着不可数的无穷集．从这样的集合中选出任意一列元素，总还有一些不在这序列中出現的元素留在集合中，因此，一个不可数集合可以說是較一个可数集合的无穷的阶为高的集合．以后我們可以知道，在一条給定直綫上的点的全体所組成的集合就是一个不可数集(見4.3)．

1.2 子集，空間 假如有两个集合 S 和 S_1，S_1 中的每一个元素也属于 S，則称 S_1 是 S 的一个子集，且記为

$$S_1 \subset S \quad \text{或} \quad S \supset S_1.$$

有时，我們也称 S_1 包含在 S 中或 S_1 属于 S．——当 S_1 只含有一个元素 x 时，我們用記号 $x \in S$ 来表示 x 属于 S．

在特别的情形，即当关系 $S_1 \subset S$ 及 $S \subset S_1$ 同时成立时，則称这两个集合为相等，并且記为

$$S = S_1.$$

有时，为了便利起見，我們要考虑一个不含任何元素的集合 S．我們称这种集合为空集，且記为 $S=0$．空集是任意集合的一个子集．若視空集为有穷集合的一个特例，則易知有穷集合的任一子集亦为一有穷集合，而可数集合的任一子集为有穷集合或可数集合．例如由介于20到30之間的整数組成的集合是由全体正整数 $1, 2, \cdots, n, \cdots$ 組成的集合的一个有穷子集，而由全体奇数 $1, 3, \cdots$ 組成的集合是它的一个可数子集．

在許多研究中，我們要涉及已給集合 $\boldsymbol{S}$ 的各种子集的性质和相互关系．这个包含了研究中出現的全部元素的集合 $\boldsymbol{S}$，我們称

之为研究的空間.例如,假如我們要去考虑那些在一条直綫上的点所組成的不同的集合,則我們可以取直綫上全部的点組成的集合 $\boldsymbol{S}$ 作为我們的空間. 空間 $\boldsymbol{S}$ 的任意子集 S,簡称为 $\boldsymbol{S}$ 中的集合.

1.3 集合的运算 設空間 $\boldsymbol{S}$ 已經給定,現在我們要考虑 $\boldsymbol{S}$ 中的不同集合. 首先,我們来定义集合的加法、乘法和减法运算.

两个集合 S_1 及 S_2 之和是一个集合 S':

$$S' = S_1 + S_2,$$

S' 是由至少属于集合 S_1 及 S_2 二者之一的所有元素所組成. 两个集合之积

$$S'' = S_1 S_2$$

是两个集合的共同部分,或者説集合 S'' 是由同时属于 S_1 及 S_2 的所有的元素組成. 最后,两个集合之差

$$S''' = S_1 - S_2$$

仅当 S_2 是 S_1 的子集时才有定义,因此集合 S''' 是由属于 S_1 但不属于 S_2 的全体元素組成.

例如,若集合 S_1 及 S_2 各为曲綫 C_1 及 C_2 内部的点(見图1)所組成,則 S_1+S_2 是由至少在这两条曲綫中的一条的内部的全体点所組成的集合,而 S_1S_2 是由这两条曲綫的公共区域内的全体点所組成的集合.

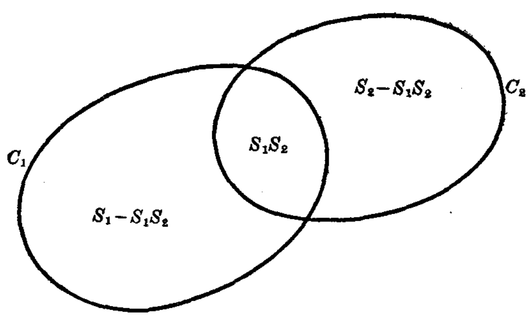

图1 集合的簡单运算

乘积 S_1S_2 显然同时是 S_1 及 S_2 的子集. 差 $S_n-S_1S_2$ $(n=1$ 或 $2)$ 是由属于 S_n 而不属 S_1S_2 的全体点所組成的集合.

在特別的情形,即当 S_1 及 S_2 无共同元素时,則其乘积是一个空集,于是有 $S_1S_2=0$. 另一方面,若 $S_1=S_2$,則差 S_1-S_2 是一个空集,即有 $S_1-S_2=0$.

在 S_2 为 S_1 的子集的特殊情形,則有 $S_1+S_2=S_1$ 及 $S_1S_2=S_2$.

由于和与积的定义的对称性,可知加法与乘法的运算是可交換的,即

$$S_1+S_2=S_2+S_1 \quad \text{及} \quad S_1S_2=S_2S_1.$$

我們还可以发现,类似于算术运算中的結合律与分配律,对于集合的运算也成立. 即

$$(S_1+S_2)+S_3=S_1+(S_2+S_3),$$
$$(S_1S_2)S_3=S_1(S_2S_3),$$
$$S_1(S_2+S_3)=S_1S_2+S_1S_3.$$

这样,我們可以說任意有穷个集合的和与乘积而不致含义不明:

$$S_1+S_2+\cdots+S_n \quad \text{及} \quad S_1S_2\cdots S_n,$$

此处,加項和乘积因子的次序可以任意排列.

我們还可将这两个运算的定义推广到加項个数或乘积因子个数为可数序列的情形.为此,对于 $\boldsymbol{S}$ 中的已知集合序列 $S_1,S_2,\cdots$,我們将其和

$$\sum_1^\infty S_\nu=S_1+S_2+\cdots$$

定义为由至少属于一个 S_ν 的全体元素組成的集合,而将其乘积

$$\prod_1^\infty S_\nu=S_1S_2\cdots$$

定义为由属于全部 S_ν 的元素所組成的集合. 于是有,例如,

$$S(S_1+S_2+\cdots)=SS_1+SS_2+\cdots.$$

例如，若令满足不等式$\frac{1}{\nu+1}\leqslant x\leqslant\frac{1}{\nu}$的全体实数为集合$S_\nu$，则可知$\sum\limits_1^\infty S_\nu$为一由满足不等式 $0<x\leqslant 1$ 的全体实数組成的集合；而其乘积則为一空集，即$\prod\limits_1^\infty S_\nu=0$. 另一方面，若令满足不等式$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{\nu}$的全体实数組成的集合为$S_\nu$，則其和$\sum\limits_1^\infty S_\nu$与$S_1$重合，而其乘积$\prod\limits_1^\infty S_\nu$是一个只包含$x=0$一个元素的集合.

減法运算的一个重要特例，是当S_1与整个空間$\boldsymbol{S}$重合的情形. 二者之差

$$S^*=\boldsymbol{S}-S$$

是由空間$\boldsymbol{S}$中不属于S的所有元素組成的集合，称此集合为集合S的余集或簡称为S的余. 易知

$$S+S^*=\boldsymbol{S},\ SS^*=0,\ (S^*)^*=S.$$

必須注意，一个已給集合S的余是对于S所在的空間$\boldsymbol{S}$而言的. 若空間$\boldsymbol{S}$是由一条給定直綫L上的全体点所組成的集合，而S是位于直綫上原点O的正的一边的全体点所組成的集合，則它的余S^*是由原点O本身和原点的負的一边的全体点所組成的集合. 另一方面，若空間$\boldsymbol{S}$是由包含直綫L的某一平面P上的全体点所組成的集合，則和上面一样的一个集合S的余S^*不但包含直綫L的原点及原点的負的一边，还包含平面P上不属于L的所有的点. 在可能引起誤会的情况中，为了明确起見，我們将S^*說成是集合S关于$\boldsymbol{S}$的余.

借助于余集的概念，可以把加法运算与乘法运算相互联系起来. 事实上，对于任何有穷或可数的序列$S_1, S_2, \cdots$，有下列关系式成立：

$$\begin{aligned}(S_1+S_2+\cdots)^*&=S_1^*S_2^*\cdots,\\(S_1S_2\cdots)^*&=S_1^*+S_2^*+\cdots.\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

第一式表明，和的余集是加項余集的乘积. 这可由定义直接推出. 事实上，余集$(S_1+S_2+\cdots)^*$是由空間中不属于任何一个集合S_ν的全体元素所組成的集合，换言之，是由属于每一余集S_ν^*即乘积

$S_1^*S_2^*\cdots$ 的全体元素所組成的集合. 第二式可由第一式将 S_ν^* 易以 S_ν 而得到. 同理,对于减法运算,有下列关系式成立:

$$S_1 - S_2 = S_1 S_2^*. \tag{1.3.2}$$

讀者将发現, 借用与图 1 同一类型的图来理解(1.3.1)和(1.3.2)的关系将要容易得多.

1.4 集合的序列 我們所謂的序列,若不作特别声明,皆指有限或可数序列. 通常我們以 $\{S_n\}$ 来代表序列 $S_1, S_2, \cdots$.

当我們考虑集合序列的和

$$S = S_1 + S_2 + \cdots$$

的时候,将 S 表示为一列两两无共同元素的集合之和,在有些时候是有益的.

这只要作下述变换就可以做到. 令

$$Z_1 = S_1,$$
$$Z_2 = S_1^* S_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Z_\nu = S_1^* S_2^* \cdots S_{\nu-1}^* S_\nu,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

此时, Z_ν 是由不属于 $S_1, S_2, \cdots, S_{\nu-1}$ 而属于 S_ν 的全体元素所組成的集合. 易知当 $\nu \neq \mu$ 时, Z_ν 与 Z_μ 无共同元素. 例如, 假定 $\mu < \nu$, 則 Z_μ 为 S_μ 的子集,而 Z_ν 为 S_μ^* 的子集,故 $Z_\nu Z_\mu = 0$.

現在令 $S' = Z_1 + Z_2 + \cdots$. 因为关系式 $Z_\nu \subset S_\nu$ 对所有的 ν 都成立,故 $S' \subset S$. 另一方面,令 x 为 S 中的任一元素. 由 S 的定义可知, x 至少属于某一个 S_ν. 令 S_n 为序列 $S_1, S_2, \cdots$ 中第一个包含元素 x 的集合. 由 Z_n 的定义, 可知 x 属于 Z_n, 因而亦属于 S'. 由此即得 $S \subset S'$ 和 $S' \subset S$, 故 $S = S'$, 且

$$S = Z_1 + Z_2 + \cdots.$$

我們用上述的变换来証明: 可数集合的序列的和仍为一可数集合. 若 S_ν 为可数,則因 Z_ν 为 S_ν 的一个子集, Z_ν 必为有限或可