21世纪

普通高等教育规划教材

线性代数

XIANXING DAISHU

刘大瑾 ◎ 主 编

张文彬 李文涛 ◎ 副主编

化学工业出版社

21世纪普通高等教育规划教材

线性代数

刘大瑾　主编
张文彬　李文涛　副主编

化学工业出版社
·北京·

本书内容分为八章，其中前六章为基础理论部分，内容包括行列式、矩阵、n维向量空间、线性方程组、矩阵的特征值与对角化、实二次型。另外，为了帮助学生提高数学素养、培养创新意识、掌握运用数学工具去解决实际问题的能力，本书第七章、第八章利用MATLAB工具，结合前面的基础理论，给出了一些数学实验与具体应用实例。最后书末还附有习题参考答案。

本书可作为理工科院校线性代数课程的教科书，也可作为其他相关专业的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/刘大瑾主编．—北京：化学工业出版社，2010.6
21世纪普通高等教育规划教材
ISBN 978-7-122-08557-3

Ⅰ．线…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．线性代数-高等学校-教材
Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第088193号

责任编辑：袁俊红　唐旭华　　　文字编辑：马冰初
责任校对：陈　静　　　装帧设计：周　遥

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
720mm×1000mm　1/16　印张10　字数200千字　　2010年7月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：19.80元

前 言

在自然界与社会现象中，许多变量之间的关系可以直接地或近似地表示为线性函数，所以研究线性函数是非常重要的。线性代数是理工科院校各专业重要的公共基础课程，以线性函数为主要研究对象，是科学研究及工程实践中对离散量的基本分析方法，有着十分抽象的形式和严格的逻辑体系，对培养人的素质、数学思维能力和进行数值计算能力方面具有不可替代的作用，已成为学习近代科学技术的基础。

本书是作者在多年教学实践的基础上，为适应教学改革的新要求而编写的。编写时，为了适应不同的教学要求，力求深入浅出，把可读性与实际应用性相结合，全面提高读者运用数学方法分析问题和解决问题的能力。

全书共八章，分为两大部分：前六章讲线性代数的经典理论，主要内容包括行列式、矩阵、n维向量空间、线性方程组、矩阵的特征值与对角化、实二次型；后两章讲实践，主要内容包括MATLAB解题和应用实例。

本书由刘大瑾担任主编，张文彬、李文涛担任副主编。参加本书编写的还有（以姓氏笔画为序）：叶建兵、刘明颖、谌文超、谭沈阳。

限于编者水平，书中难免有不当之处，恳请广大读者不吝指正。

编者

2010年5月

目 录

第一章 行列式

第一节 二阶、三阶行列式

一、二阶行列式

考虑二元一次方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 & (1) \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 & (2) \end{cases}$$

不妨设 $a_{11}\neq 0$，则

$$(1)\times\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)\text{得}-a_{21}x-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}y=-\frac{b_1a_{21}}{a_{11}} \tag{3}$$

(2)+(3)得（消去 x）$\dfrac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}}y=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}}$

即

$$y=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{4}$$

将（4）代入（1）得

$$x=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

可见，方程组的解完全可由方程组中的未知数系数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 以及常数项 b_1，b_2 表示出来

$$\begin{cases} x=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ y=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

如果规定记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，则有

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

因此二元一次方程组的解可以表示为
$$\begin{cases} x=\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\ y=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{cases}$$

定义 1　记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

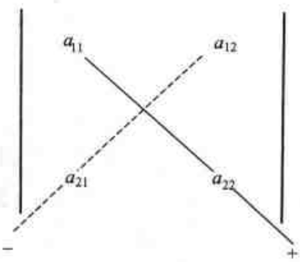

图 1-1

行列式中的元素用小写英文字母表示，下标的两个数据表示该元素所在的行和列，分别叫行标和列标. 一般行列式中位于第 i 行第 j 列的元素记为 a_{ij}，比如 a_{21} 是指位于第二行第一列的元素.

二阶行列式表示的代数和，可以用画线的方法记忆（见图 1-1），即实线连接的两个元素的乘积减去虚线连接的两个元素的乘积.

例 1　计算下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$　　(3) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$

解　(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1\times4-2\times3=-2$

(2) $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-1\times2-0\times0=-2$

(3) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=2\times3-(-1)\times0=6$

二、三阶行列式

定义 2　记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示代数和：

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

称为三阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

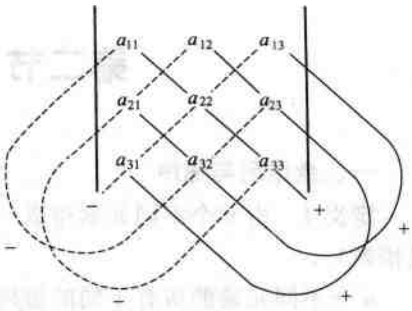

图 1-2

三阶行列式也可以用画线的方法记忆(见图 1-2)．图中各实线（主对角线方向）连接的三个元素的乘积是代数和中的正项，各虚线（副对角线方向）连接的三个元素的乘积是代数和中的负项．

例 2　计算下列三阶行列式：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$．

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times4-$$

$$(-4)\times2\times(-3)-2\times(-2)\times(-2)-1\times1\times4$$

$$=(-4)+(-6)+32-24-8-4$$

$$=-14$$

习题 1-1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$　　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ y & -z & 0 \end{vmatrix}$

2. 设 $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}=0$，求 x 的值．

3. 求函数 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -x & -x & x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数．

第二节　n 阶行列式

一、全排列与逆序

定义 1　由 n 个不同元素排成一行，称为这 n 个元素的一个全排列（或简称 n 级排列）.

n 个不同元素的所有不同的排列共有 $P_n=n!$ 种. 这里主要讨论 n 个自然数 1，2，…，n 所构成的排列.

首先规定一个标准排列次序：称 $1,2,\cdots,n$ 为标准序（即规定左小右大为顺序）. 由 1，2，…，n 所构成的任一排列中，若某两个元素的排列次序与顺序不同，就称为一个逆序. 例如 1、2、3 排成的 3 级排列，共可有 $P_3=3!=6$ 种：123、132、213、231、312、321. 其中 123 就是标准排列，而在 132 中，3 在 2 的左边，与标准序不同，故 3、2 之间有 1 个逆序.

一般地，n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个任意排列记作 $p_1p_2\cdots p_n$，若第 i 个位置上的元素 p_i 的左边有 t_i 个元素比 p_i 大，就说元素 p_i 的逆序是 t_i. 一个排列中所有逆序的和称为这个排列的逆序数，记作 t. 因此排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数就是：

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i \tag{1-1}$$

例 1　求排列 641523 的逆序数.

解　6 级排列的标准序为 123456，下面逐一分析各数的逆序数.

首位 6 的逆序数为 0；4 的逆序数为 1；1 的逆序数为 2；5 的逆序数为 1；2 的逆序数为 3；3 的逆序数为 3. 所以，由公式(1-1)，　排列 641523 的逆序数 $t=0+1+2+1+3+3=10$.

例 2　求排列 $n(n-1)\cdots1$ 的逆序数.

解　n 级排列的标准序为 $12\cdots n$. 首位 n 的逆序数为 0；$n-1$ 的逆序数为 1；$n-2$ 的逆序数为 2；……，2 的逆序数为 $n-2$；1 的逆序数为 $n-1$。所以，由公式(1-1)，排列 $n(n-1)\cdots1$ 的逆序数为：

$$t=t[n(n-1)\cdots1]=0+1+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

称 t 为奇数的排列为奇排列，t 为偶数的排列为偶排列. 如例 1 中的排列就是一个偶排列；排列 561423 也是一个偶排列，而排列 461523 就是一个奇排列. 容易想到，$n!$ 个不同的 n 级排列中，奇排列和偶排列各占一半.

定义 2　将一个排列中的任意两个元素的位置对换，而其余元素不动，得到一个新的排列，这称为对换. 若对换的是相邻的两个元素，则称为相邻对换.

排列 461523 可由排列 641523 进行一次相邻对换得到，也可由排列 561423 进

行一次不相邻对换得到，这里排列 641523 和排列 561423 都是偶排列，而排列 461523 是一个奇排列，可见进行一次对换（无论相邻与否）将改变排列的奇偶性. 一般地，有以下结论.

定理 1　一个排列经过一次元素对换，排列的奇偶性改变一次.

证明　先证相邻对换的情形：

设排列 $\cdots ij \cdots$ (2) 经过一次相邻对换后变成排列 $\cdots ji \cdots$ (3)，这里"$\cdots$"表示排列中其余那些不动的元素. 容易看出，i、j 和其他的元素之间的逆序没有改变，改变的只是 i 和 j 二者的次序：若 $i<j$，则在排列 (2) 中 ij 不构成逆序，但在排列 (3) 中 ji 构成一个逆序，故排列 (3) 的逆序数比排列 (2) 的逆序数增加 1；若 $i>j$，则在排列 (2) 中 ij 构成一个逆序，但在排列 (3) 中 ji 则没有逆序，故排列 (3) 的逆序数比排列 (2) 的逆序数减小 1. 总之，排列 (3) 与排列 (2) 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形：

设排列 (4)：$\cdots ib_1b_2\cdots b_kj\cdots$，将 i 与 j 对换，变成排列 (5)：$\cdots jb_1b_2\cdots b_ki\cdots$，这一过程可视为排列 (4) 先经 k 次相邻对换（i 向后换），变成排列 (6)：$\cdots b_1b_2\cdots b_kij\cdots$，又经 $k+1$ 次相邻对换（j 向前换），就变成了排列 (5)，于是可知排列 (4) 可经 $2k+1$ 次相邻对换变成排列 (5)，因此排列 (4) 与排列 (5) 的奇偶性改变了 $2k+1$ 次，故必相异.

推论 1　奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

证明　由定理 1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是逆序数为零的偶排列，故推论成立.

二、n 阶行列式的定义

定义 3　由 n^2 个元素 $a_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行、n 列构成的运算式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n} \tag{1-2}$$

称为 n 阶行列式，简记为 $\det(a_{ij})$. 其中 a_{ij} 为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素；$q_1q_2\cdots q_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列；t 为 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数.

从定义 3 可知，n 阶行列式的运算式 $\sum(-1)^t a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$ 中，一般项 $(-1)^t a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$ 由 n 个位于不同行不同列的元素相乘而得，符号由排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数的奇偶性决定.

特别规定：一阶行列式 $|a|=a$. 注意这里的行列式记号不要与绝对值记号混淆.

例 3　用定义计算下列 4 阶行列式：$D_4=\begin{vmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}$

解　在$\sum(-1)^t a_{1q_1}a_{2q_2}a_{3q_3}a_{4q_4}$中，要使$a_{1q_1}a_{2q_2}a_{3q_3}a_{4q_4}\neq 0$，应取$a_{3q_3}=a_{32}$，从而$a_{1q_1}=a_{14}$，$a_{4q_4}=a_{43}$，$a_{2q_2}=a_{21}$，所以$a_{1q_1}a_{2q_2}a_{3q_3}a_{4q_4}=a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$，4123 的逆数序为 3，故

$$D_4=\begin{vmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1q_1}a_{2q_2}a_{3q_3}a_{4q_4}=(-1)^3\times1\times1\times1\times1=-1$$

在行列式 D 中，将 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 所组成的对角线称为 D 的主对角线，这些元素称为主对角元．而 $a_{1n},a_{2,n-1},\cdots,a_{n1}$ 所组成的对角线称为 D 的副对角线．

称主对角线以上（下）的元素全为零的行列式为下（上）三角形行列式．

用例 3 的思想可以推得：

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&&&\\a_{21}&a_{22}&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$$

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$$

除了主（副）对角线元素外其他元素都为零的行列式称为主（副）对角行列式．如主对角行列式：

$$D_1=\begin{vmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_n\end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n \tag{1-3}$$

副对角行列式：

$$D_2=\begin{vmatrix}&&&a_1\\&&a_2&\\&\iddots&&\\a_n&&&\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n \tag{1-4}$$

式(1-3) 是显然成立的，下证式(1-4) 成立.

在行列式定义式$\sum(-1)^t a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$中，非零的只有一项：

$a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}=a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}=a_1a_2\cdots a_n$

而其逆序数 $t=t(q_1q_2\cdots q_n)=t[n(n-1)\cdots 1]=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$，所以 $D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n$.

定理 2 n 阶行列式也可定义为

$$D=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n} \tag{1-5}$$

其中 t 为排列 $p_1p_2\cdots p_n$的逆序数.

证明 由行列式定义，$D=\sum(-1)^N a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$，$N$ 为 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数. 记

$$D_T=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

取 D 中任一项$(-1)^N a_{1q_1}\cdots a_{iq_i}\cdots a_{jq_j}\cdots a_{nq_n}$，其行标 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为标准排列，逆序数为 $t_1=0$，记列标的逆序数为 $t_2=t(q_1\cdots q_i\cdots q_j\cdots q_n)$. 对换 a_{iq_i} 与 a_{jq_j} 得 $a_{1q_1}\cdots a_{jq_j}\cdots a_{iq_i}\cdots a_{nq_n}$，记对换后的行标排列的逆序数为 $r_1=t(1\cdots j\cdots i\cdots n)$，列标排列的逆序数为 $r_2=t(q_1\cdots q_j\cdots q_i\cdots q_n)$. 则 r_1 为奇数，r_2 与 t_2 的奇偶性也不同. 由于该项中两元素的次序对换，使行标排列与列标排列同时作了一次对换，则对换后的行标、列标排列的逆序数之和的奇偶性与原来行标、列标排列的逆序数之和的奇偶性必相同：$(-1)^N=(-1)^{t_1+t_2}=(-1)^{r_1+r_2}$. 故该项的值（连符号）不变：

$$(-1)^T a_{1_{q1}}\cdots a_{iqi}\cdots a_{jq_j}\cdots a_{nq_n}=(-1)^{r_1+r_2}a_{1q_1}\cdots a_{jq_j}\cdots a_{iq_i}\cdots a_{nq_n}$$

依此类推，经若干次元素对换，将该项的列标排列 $q_1q_2\cdots q_n$变成标准排列 $1,2,\cdots,n$，同时行标排列也就从自然排列 $1,2,\cdots,n$ 变成了 $p_1p_2\cdots p_n$，此时逆序数分别变为 $R_1=t(p_1p_2\cdots p_n)$，$R_2=t(1,2,\cdots,n)=0$. 由于每次对换都不改变两个逆序数之和的奇偶性，故最后该项的符号仍不变：

$$(-1)^N=(-1)^{R_1+R_2}=(-1)^t$$

即
$$(-1)^N a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}=(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

因此，对 D 中任一项$(-1)^N a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，$D_T$中有且仅有一项$(-1)^t a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$与之对应并相等. 同理，对 D_T 中的任一项，D 中也有且仅有一项与之对应并相等. 即 D 与 D_T中的项可以一一对应并相等，故 $D=D_T$.

进而，可得到更一般的行列式定义.

推论 2 n 阶行列式一般可定义为

$$D=\sum(-1)^{t_1+t_2}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n} \tag{1-6}$$

其中 $p_1\cdots p_n$，$q_1\cdots q_n$分别为行标排列和列标排列；它们的逆序数分别为 $t_1=t(p_1\cdots p_n)$，$t_2=t(q_1\cdots q_n)$.

当行标或列标呈标准排列时，有 $t_1=0$ 或 $t_2=0$，便得到前面的定义 3 和定理 2 .

三、行列式的基本性质

把行列式 D 的行、列互换所得到的行列式称为 D 的转置行列式，记作 D^{T}. 即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证明 将 $D=\det(a_{ij})$的转置行列式记作

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $b_{ij}=a_{ji}(ij=1,2,\cdots,n)$. 由定义知

$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

于是由定理 2 推出

$$D=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}=D^{\mathrm{T}}$$

由性质 1 可知，行列式中行与列具有对等的地位，对行成立的性质对列也成立，反之亦然. 以下仅讨论行的性质，然后引申到列即可.

性质 2 行列式两行（列）互换，行列式的值变号.

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

又记
$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

即 D_1 由行列式 D 互换第 i 行与第 j 行得到.

由定义知
$$D=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}$$

而
$$\begin{aligned} D_1&=\sum(-1)^t b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} \\ &=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &=\sum(-1)^{t_1} a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} \end{aligned}$$

其中 $t=t(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)$，$t_1=t(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)$

由定理 1 知 t_1 与 t 的奇偶性正好相反，故 $(-1)^t=-(-1)^{t_1}$，所以 $D_1=-D$.

由性质 2 即可得到下面的推论.

推论 1 若行列式 D 中有两行（列）元素对应相等，则 D 的值为零.

证明 把 D 相同的两行（列）互换，所得行列式记作 D_1，则由性质 2 得 $D_1=-D$，而 D 实际上没有变，故应有 $D_1=D$，所以 $D=0$.

性质 3 用数 k 乘以行列式 D，等于将该数 k 乘到 D 的某一行（列）中所有的元素上.

证明 按定义
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1q_1}\cdots a_{iq_i}\cdots a_{nq_n}$$

$$kD=k\left[\sum(-1)^t a_{1q_1}\cdots a_{iq_i}\cdots a_{nq_n}\right]=\sum(-1)^t a_{1q_1}\cdots(ka_{iq_i})\cdots a_{nq_n}$$
$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 2 行列式某一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 3 若行列式有一行（列）的元素全为零，则其值为零.

推论 4 若行列式有两行元素对应成比例，则其值为零.

下面的性质称为“拆行”.

性质 4 若 D 的某一行（列）的元素都可表为两数之和，则以下等式成立：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 按定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum(-1)^t a_{1q_1}\cdots(a_{iq_i}+b_{iq_i})\cdots a_{nq_n}$$

$$=\sum(-1)^t a_{1q_1}\cdots a_{iq_i}\cdots a_{nq_n}+\sum(-1)^t a_{1q_1}\cdots b_{iq_i}\cdots a_{nq_n}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例如：

$$\begin{vmatrix} a_1+c_1 & a_2+c_2 \\ b_1+d_1 & b_2+d_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2+c_2 \\ b_1 & b_2+d_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1 & a_2+c_2 \\ d_1 & b_2+d_2 \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & c_2 \\ b_1 & d_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1 & a_2 \\ d_1 & b_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}$$