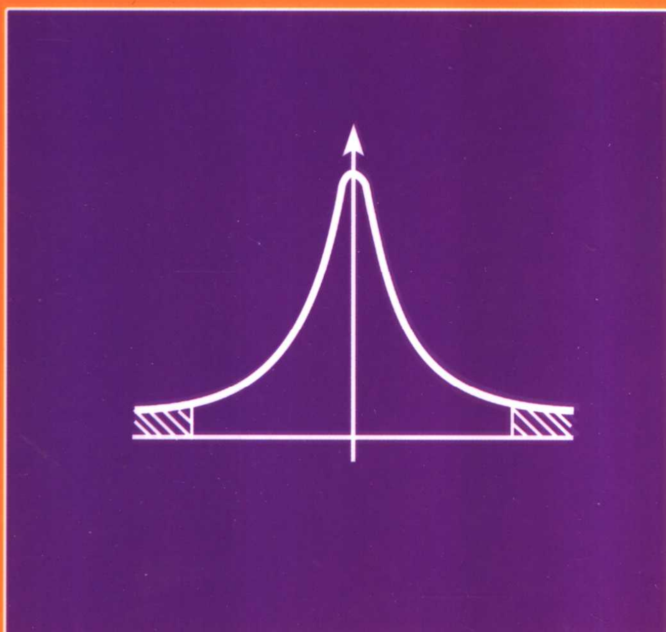
经济应用数学辅导丛书

（人大修订本第二版）

概率论与数理统计

辅导与习题详解

施　雨



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

经济应用数学

(人大修订本第二版)

概率论与数理统计

辅导与习题详解

施　雨

西安交通大学出版社
·西安·

内容提要

本书是与高等学校文科教材“经济应用数学基础(三)”《概率论与数理统计》(人大修订本第二版)配套的辅导参考书。

本书内容分为三部分:第一部分在各章开头给出了与教材相应章节一致的内容概要;第二部分是各章习题的详细分析与解答;第三部分精选了部分对应各章内容的考研试题,并给出了解题的基本方法与技巧。

本书可供使用上述教材的学生和教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计辅导与习题详解(人大修订本第二版)/施雨编著.—西安:西安交通大学出版社,2004.4
(经济应用数学辅导丛书)
ISBN 7-5605-1821-4

Ⅰ.概… Ⅱ.施… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料
Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 004294 号

书　　名	概率论与数理统计辅导与习题详解(人大修订本第二版)
作　　者	施雨
出版发行	西安交通大学出版社
地　　址	西安市兴庆南路 25 号(邮编:710049)
电　　话	(029)82668357　82667874(发行部)
	(029)82668315　82669096(总编办)
印　　刷	西安兰翔印刷厂
字　　数	148 千字
开　　本	850mm×1 168mm　1/32
印　　张	5.875
版　　次	2004 年 4 月第 1 版　2004 年 4 月第 1 次印刷
印　　数	0001～5000
书　　号	ISBN 7-5605-1821-4/O・206
定　　价	8.00 元

前　言

概率统计作为数学的一个重要分支在自然科学、管理科学、社会及人文科学等诸多领域有着广泛的应用。现在,“概率论与数理统计”不仅是高等理工科院校的一门重要的公共基础课,它也是文科专业(如经济学门类下的许多二级学科、专业,管理学门类下的部分二级学科、专业)的重要的数学基础课。此外,它还是硕士研究生数学入学考试的组成部分。

时下,已有许多学习概率统计的辅导教材面市,但其中大多定位于工科背景的读者群,面向文科专业的则较少。由于工科与文科专业对数学要求方面的差异性以及两种不同背景的读者先前的数学基础方面的差异性,文科背景的读者选用那些针对理工科读者的辅导教材作为教学参考书,可能难以达到预期效果。有鉴于此,我们精心编写了这本面向文科专业的辅导书,它与在全国文科教材中有着广泛影响的人大(修订本)第二版《概率论与数理统计》(以下简称原教材)相配套。

本书在每章的开头部分以树图的方式给出了原教材相应章节的内容概要。它不但概括了该章节的主要内容,还点明了不同知识点之间的联系。其后,是各章习题的详解。对于原教材后面所附的补充习题,本书也无一例外地给出了详尽的解答。在习题解答的后面还穿插着不少评注。这些评注,有的是指出易混淆的概念和易出错之处,有的则是举一反三,解释在改变题目的条件下,会得出怎样的结果。

此外,编者还挑选并剖析了一部分往年的考研题(数学三、四中概率统计部分),并把这些题目按其所涉及的知识点分别排列在相应章节的习题后面,以便读者开拓解题思路。编者希望本书能有助于读者学习并掌握解概率统计题目的基本方法与技巧,提高概率统计的学习及应试水平。

限于编者水平,不妥之处恐难避免,欢迎读者批评指正。

编　者

2004 年 1 月 22 日

目　　录

第一章　随机事件及其概率

本章内容概要

- 随机事件及其概率
  - 事件间的关系及其运算
    - 样本空间及事件的定义
    - 事件间的关系（$\subset$，$=$，互不相容，对立）
    - 事件的运算（$\cup$，$\cap$，$-$，求补）
  - 概率的定义及性质
    - 定义
      - 统计定义
      - 古典定义
    - 性质（三条公理及四条常用性质）
  - 概率的计算
    - 古典概率 $P(A)=\dfrac{\text{有利于 }A\text{ 的基本事件数}}{\text{试验的基本事件总数}}$
    - 条件概率 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$
    - 乘法公式 $P(AB)=P(A)P(B|A)$
      $=P(B)P(A|B)$
    - 全概率公式 $P(B)=\sum\limits_{i}P(A_i)P(B|A_i)$
    - 贝叶斯公式 $P(A_m|B)=\dfrac{P(A_m)P(B|A_m)}{\sum\limits_{i}P(A_i)P(B|A_i)}$
      $(m=1,2,\cdots)$
  - 独立试验概型
    - 事件的独立性
      $P(A|B)=P(A)\quad(P(AB)=P(A)P(B))$
    - 贝努里定理
      $p_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\quad(k=0,1,\cdots,n)$

习题一详解

1-1 互不相容事件与对立事件的区别何在?说出下列各对事件的关系.

(1) $|x-a|<\delta$ 与 $x-a\geqslant\delta$ (2) $x>20$ 与 $x\leqslant 20$

(3) $x>20$ 与 $x<18$ (4) $x>20$ 与 $x\leqslant 22$

(5) 20 个产品全是合格品与 20 个产品中只有一个废品;

(6) 20 个产品全是合格品与 20 个产品中至少有一个废品.

解 设 A、B 为两个事件,若它们满足条件:$AB=\varnothing$,则称 A 与 B 为互不相容事件.若它们满足条件:①$AB=\varnothing$,②$A+B=\Omega$ 则称 A 与 B 互为对立事件,记作 $B=\bar{A}$ 或者 $A=\bar{B}$.由此可见,如果事件 A 与事件 B 互为对立事件,那么,A 与 B 必是互不相容事件.反之则未必成立.因为,互不相容性仅能保证条件 $AB=\varnothing$ 成立,它未必能让条件 $A+B=\Omega$ 也成立.现在,我们可以说明题中各对事件的关系:(1)、(3)、(5) 小题中的各事件对为互不相容关系,(2)、(6) 小题中的各事件对为对立关系,(4) 小题中的事件对为相容关系.

1-2 同时掷两颗骰子,x、y 分别表示第一、二颗骰子出现的点数,设事件 A 表示"两颗骰子出现点数之和为奇数",B 表示"点数之差为零",C 表示"点数之积不超过 20",用样本点的集合表示事件 $B-A$;BC;$B+\bar{C}$.

解 $B-A=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$;$BC=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$;$B+\bar{C}=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(4,6),(6,4),(5,6),(6,5)\}$.

注 解本题的关键在于弄清楚事件间的关系及运算.在本题中,$\because AB=\varnothing$,$\therefore B-A=B=\{(x,y)\mid x-y=0,x,y\in(1,2,3,4,5,6)\}$.事件 BC 表示"点数之差为零且点数之积不超过 20",于是 $BC=\{(x,x)\mid x\cdot x\leqslant 20,x\in(1,2,3,4,5,6)\}$.因 $\bar{C}$ 表示"点数之积大于 20",故 $B+\bar{C}=\{(x,y)\mid x-y=0$ 或者 $x\cdot y>20,x,y\in(1,2,3,4,5,6)\}$.

1-3 用步枪射击目标 5 次,设 A_i 为"第 i 次击中目标"($i=1,2,3,4,5$),B 为"5 次中击中次数大于 2",用文字叙述下列事件:

(1) $A=\sum_{i=1}^{5}A_i$　　(2) $\bar{A}$　　(3) $\bar{B}$

解　(1) A 表示“5 次射击至少击中一次目标”；(2) $\bar{A}$ 表示“5 次射击无一次击中目标”；(3) $\bar{B}$ 表示“5 次射击中击中次数不超过 2”.

1-4　用图示法简化下列各式(A、B、C 都相容)：

(1) $(A+B)(B+C)$

(2) $(A+B)(A+\bar{B})$

(3) $(A+B)(A+\bar{B})(\bar{A}+B)$

解　(1) 如图 1-1 所示，

$\because$　$A+B=D_2+D_3+D_4+D_5+D_6+D_7$

$B+C=D_1+D_2+D_3+D_4+D_6+D_7$

$\therefore$　$(A+B)(B+C)=D_2+D_3+D_4+D_6+D_7$

又 $\because$　$B+AC=D_2+D_3+D_4+D_6+D_7$

故　$(A+B)(B+C)=B+AC$

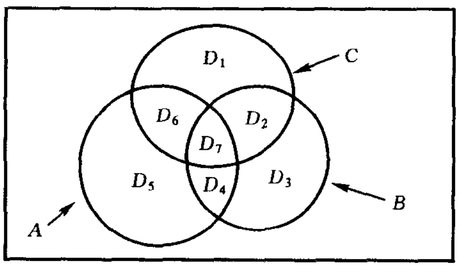


图 1-1

(2) 如图 1-2 所示，$\because$　$A+B=C_1+C_2+C_3$

$A+\bar{B}=(C_1+C_2)+(C_4+C_1)=C_1+C_2+C_4$

$\therefore$　$(A+B)(A+\bar{B})=C_1+C_2=A$

(3) 如图 1-2 所示，由(2) 知$(A+B)(A+\bar{B})=A$，所以

$$\begin{aligned}(A+B)(A+\bar{B})(\bar{A}+B)&=A(\bar{A}+B)\\&=(C_1+C_2)(C_3+C_4+C_2+C_3)\\&=(C_1+C_2)(C_2+C_3+C_4)=C_2\end{aligned}$$

而 $AB=(C_1+C_2)(C_2+C_3)=C_2$，故$(A+B)(A+\bar{B})(\bar{A}+B)=AB$.

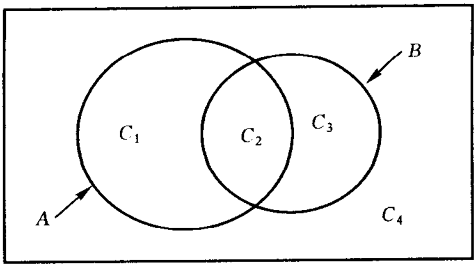


图 1-2

1-5 在图书馆中随意抽取一本书，事件 A 表示"数学书"，B 表示"中文图书"，C 表示"平装书"．(1) 说明事件 $AB\overline{C}$ 的实际意义；(2) 若 $\overline{C} \subset B$，说明什么情况；(3) $\overline{A} = B$ 是否意味着馆中所有数学书都不是中文版的?

解 (1) 事件 $AB\overline{C}$ 表示"精装的中文版数学书"．(假定就图书装帧而言，仅有平装与精装之别，下同．) (2) 若 $\overline{C} \subset B$，说明馆中的精装书都是中文版图书．(3) 若有 $\overline{A} = B$，则因 $A = \overline{\overline{A}} = \overline{B}$，说明馆中的所有数学书都不是中文版的．

1-6 表 1-1 是 10 万个男子中活到 ξ 岁的人数统计表．若以 A、B、C 分别表示一个新生男婴活到 40 岁、50 岁、60 岁，由表 1-1 估计 $P(A)$、$P(B)$、$P(C)$．

表 1-1 (教材表 1-3)

年岁 ξ	0	10	20	30	40	50
活到 ξ 岁的人数	100 000	93 601	92 293	90 092	86 880	80 521
年岁 ξ	60	70	80	90	100	
活到 ξ 岁的人数	67 787	46 739	19 866	2 812	65	

解 $P(A) \approx 0.868\ 80$，$P(B) \approx 0.805\ 21$，$P(C) \approx 0.677\ 87$．

1-7 某产品设计长度为 20 cm，规定误差不超过 0.5 cm 为合格品．今对一批产品进行测量，长度如表 1-2：

表 1-2 （教材表 1-4）

长度（cm）	19.5 以下	19.5 ～ 20.5	20.5 以上
件数	5	68	7

解 总件数为 $5+68+7=80$，其中 68 件为合格品，故合格品率为 $68/80=0.85$.

1-8 掷 3 枚硬币，求出现 3 个正面的概率.

解 记 A 为“出现 3 个正面”事件. 掷 3 枚硬币的试验结果总数 $n=2^3=8$，而有利于 A 的基本事件数 $m=1$，故 $P(A)=1/8=0.125$.

1-9 10 把钥匙中有 3 把能打开门，今任取两把，求能打开门的概率.

解法 1 从 10 把钥匙中任取两把的试验结果总数 $n=C_{10}^2=45$，能打开门意味着取到的两把钥匙中至少有 1 把能打开门，其取法数 $m=C_3^2+C_3^1C_7^1=24$，故所求概率为 $24/45=8/15$

解法 2 记 A 为“能打开门”，则 $\overline{A}=$“两把钥匙皆开不了门”，于是

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-C_7^2/C_{10}^2=1-\frac{21}{45}=8/15$$

注 解法 2 所展示的是一种重要的但又容易被初学者所忽略的解题技巧. 在计算事件 A 的古典概率时，若 A 本身的结构较为复杂，我们不妨换一个角度，即从 A 的对立事件 $\overline{A}$ 入手，先求出 $\overline{A}$ 的概率 $P(\overline{A})$，再由公式 $P(A)=1-P(\overline{A})$ 得到 A 的概率. 尤其是，当 A 代表诸如“至少有一样如何如何”这类事件时，在大多数场合下，先求对立事件的概率，再按上述公式求得 A 的概率的这种方法是十分奏效的.

1-10 一部 4 卷的文集随便放在书架上，问恰好各卷自左向右或自右向左的卷号为 1,2,3,4 的概率是多少？

解 4 卷文集的所有排法数为 $4!$ 而恰好各卷自左向右或自右向左的卷号为 1,2,3,4 的排法数为 2，故所求概率为 $2/4!=1/12$.

1-11 100 个产品中有 3 个次品，任取 5 个，求其次品数分别为 0、1、2、3 的概率.

解 令 A_i 表示“取到的 5 个产品中恰含 i 个次品”，$i=0,1,2,3$. 因为，从 100 个产品中任取 5 个的取法数为 C_{100}^5，有利于 A_i 的取法个数为

$C_3^iC_{97}^{5-i}$, $i=0,1,2,3$. 故 A_i 的概率为 $P(A_i)=C_3^iC_{97}^{5-i}/C_{100}^5$, $i=0,1,2,3$. 把 $i=0,1,2,3$ 代入上式，可得所求概率的近似值分别为0.856，0.138，0.006，0.000.

1-12 N 个产品中有 N_1 个次品，从中任取 n 个 $(1\leqslant n\leqslant N_1\leqslant N)$，求其中有 $k(k\leqslant n)$ 个次品的概率.

解 从 N 个产品中任取 n 个的取法总数为 C_N^n，其中恰有 $k(k\leqslant n)$ 个次品的取法数为 $C_{N_1}^kC_{N-N_1}^{n-k}$，故所求的概率为 $C_{N_1}^kC_{N-N_1}^{n-k}/C_N^n$.

注 解本题容易犯的错误是在分子上漏掉因子 $C_{N-N_1}^{n-k}$ 这一项. 误以为：在 n 个产品中取定了 k 个次品，则其余的 $n-k$ 个必是非次品，故取法数为 $C_{N_1}^k$. 殊不知，这还涉及是哪 $n-k$ 个非次品的问题，而从 $N-N_1$ 个非次品中取出 $n-k$ 个的方法数为 $C_{N-N_1}^{n-k}$，于是，从 N 个产品取出 n 个，其中恰有 k 个为次品的取法数应是上述两数的乘积：$C_{N_1}^kC_{N-N_1}^{n-k}$.

1-13 一个袋内有5个红球，3个白球，2个黑球，计算任取3个球恰为一红、一白、一黑的概率.

解 从10个球中任取3个的取法数为 C_{10}^3，而所取3球恰为一红、一白、一黑的取法数为 $C_5^1C_3^1C_2^1$，故所求的概率为 $C_5^1C_3^1C_2^1/C_{10}^3=1/4$.

1-14 两封信随机投入四个邮筒，求前两个邮筒内没有信的概率以及第一个邮筒内只有一封信的概率.

解 记 A 为“前两个邮筒没有信”，B 为“第一个邮筒内只有一封信”. 两封信随机投入四个邮筒的投法总数为 $n=4^2$，而有利事件 A 发生的投法数 $m_A=2^2$（即把两封信都投向后两个邮筒的方法数）. 有利于事件 B 的投法数是这样考虑的：先指定两封信中的哪一封投入第一个邮筒，再把剩下的一封信投入后3个邮筒，故 $m_B=C_2^1\cdot 3=6$，于是，$P(A)=4/16=1/4$，$P(B)=6/16=3/8$.

1-15 一批产品中，一、二、三等品率分别为0.8、0.16、0.04，若规定一、二等品为合格品，求产品的合格率.

解 记 A_i 为“取到的产品是 i 等品” $i=1,2,3$. A 为“取到的产品是合格品”. 一方面，事件 A_1、A_2、A_3 两两互不相容，另一方面，$A=A_1+A_2$，所以，

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=0.8+0.16=0.96.$$

即产品的合格率为0.96.

1-16 袋内装有两个5分、三个2分、五个1分的硬币，任意取出5个，求总和超过一角的概率.

解 从十个硬币中取出5个的取法数为C_{10}^5. 5个硬币的总币值超过一角的取法可以分两种情况来考虑：其一是恰含两个5分硬币，取法有$C_2^2C_8^3$种；其二是恰含一个5分硬币，取法有$C_2^1(C_3^3C_5^1+C_3^2C_5^2)$. 这两种情况下的每种取法都能保证取出的5个硬币的总币值超过一角，而且再无其他满足题设要求的情况出现. 故所求概率为$[C_2^2C_8^3+C_2^1(C_3^3C_5^1+C_3^2C_5^2)]/C_{10}^5=1/2$.

1-17 求习题1-11中次品不超过一个的概率.

解 沿用习题1-11中的记号，则所求概率为$P(A_0+A_1)$，注意到事件A_0与A_1是互不相容的，故$P(A_0+A_1)=P(A_0)+P(A_1)=0.856+0.138=0.994$.

1-18 估计习题1-6中的$P(B|A)$、$P(C|A)$、$P(\bar{C}|B)$及$P(AB)$.

解 $\because\ A\supset B\supset C$,

$$\therefore\ P(B|A)=P(AB)/P(A)=P(B)/P(A)\approx 0.927,$$

$$P(C|A)=P(AC)/P(A)=P(C)/P(A)\approx 0.780,$$

$$\begin{aligned}P(\bar{C}|B)&=P(B\bar{C})/P(B)=[P(B)-P(BC)]/P(B)\\&=1-P(C)/P(B)\approx 0.158,\end{aligned}$$

$$P(AB)=P(B)\approx 0.805.$$

1-19 由长期统计资料得知，某一地区在4月份下雨(记作事件A)的概率为4/15，刮风(用B表示)的概率为7/15，既刮风又下雨的概率为1/10，求$P(A|B)$、$P(B|A)$、$P(A+B)$

解 已知$P(A)=4/15$，$P(B)=7/15$，$P(AB)=1/10$，故$P(A|B)=P(AB)/P(B)=3/14$，$P(B|A)=P(AB)/P(A)=3/8$，$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=19/30$.

1-20 为了防止事件，在矿内同时设有两种报警系统A与B，每种系统单独使用时，其有效的概率系统A为0.92，系统B为0.93，在A失灵的条件下，B有效的概率为0.85，求

(1) 发生意外时，这两个报警系统至少有一个有效的概率；

(2) B失灵的条件下，A有效的概率.

解 已知$P(A)=0.92, P(B)=0.93, P(B|\overline{A})=0.85$，由$0.85=P(B|\overline{A})=[P(B)-P(AB)]/[1-P(A)]$可得$P(AB)=0.862$，于是

(1) 所求概率为$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.988$；

(2) 所求概率为$P(A|\overline{B})=[P(A)-P(AB)]/[1-P(B)]$

$$=0.829.$$

1-21 10个考签中有4个难签，3人参加抽签考试，不重复地抽取，每人一次，甲先、乙次、丙最后，证明3人抽到难签的概率相等.

证 令A、B、C分别表示甲、乙、丙抽到难签. 首先，$P(A)=4/10=0.4$. 其次，因为$B=BA+B\overline{A}$，又由概率的乘法法则知$P(BA)=P(A)P(B|A)=0.4\times\frac{3}{9}$，$P(B\overline{A})=P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.6\times\frac{4}{9}$，所以

$P(B)=P(BA)+P(B\overline{A})=0.4\times\frac{3}{9}+0.6\times\frac{4}{9}=3.6/9=0.4$. 最后，因为$C=C(A+\overline{A})(B+\overline{B})=CAB+CA\overline{B}+C\overline{A}B+C\overline{A}\,\overline{B}$.

而
$$P(CAB)=P(AB)P(C|AB)=\frac{4\times 3}{10\times 9}\times\frac{2}{8}=\frac{1}{30}$$
$$P(CA\overline{B})=P(A\overline{B})P(C|A\overline{B})=\frac{4\times 6}{10\times 9}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{10}$$
$$P(C\overline{A}B)=P(\overline{A}B)P(C|\overline{A}B)=\frac{6\times 4}{10\times 9}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{10}$$
$$P(C\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A}\,\overline{B})P(C|\overline{A}\,\overline{B})=\frac{6\times 5}{10\times 9}\times\frac{4}{8}=\frac{5}{30}$$

所以

$$\begin{aligned}P(C)&=P(CAB)+P(CA\overline{B})+P(C\overline{A}B)+P(C\overline{A}\,\overline{B})\\&=1/30+1/10+1/10+5/30=0.4.\end{aligned}$$

故命题得证.

1-22 用3个机床加工同一种零件，零件由各机床加工的概率分别为0.5、0.3、0.2，各机床加工的零件为合格品的概率分别等于0.94、0.9、0.95，求全部产品中的合格率.

解 令A_i表示“取到的一零件是由第i台机床加工的”，$i=1,2,3$. 则A_1, A_2, A_3构成一个完备事件组. 又令B表示“取到的一零件是合格品”，所谓全部产品中的合格率即为$P(B)$. 由题设条件知：$P(A_1)=0.5$，

$P(A_2)=0.3, P(A_3)=0.2$. 它们全都具有正概率. 又因为

$$P(B|A_1)=0.94, P(B|A_2)=0.9, P(B|A_3)=0.95$$

于是,由全概率公式,可得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=0.5\times0.94+0.3\times0.9+0.2\times0.95$$
$$=0.93.$$

注 习题1-21、1-22的求解过程中都用到全概率公式. 用全概率公式(包括贝叶斯公式)解题的要点是找到一个完备事件组. 由于不同概率问题千差万别,且各人的思考角度也因人而异. 因此,不存在一个普遍适用的找出完备事件组的方法. 这就是为什么这部分内容通常是相关章节的难点. 然而,没有普遍适用的方法并不意味着毫无规律可循,我们通常可以按照"因果联系"的思路去寻找相应概率问题中的完备事件组. 读者可以从后面几道习题(1-23～1-30)的求解过程中细细体会.

1-23 12个乒乓球中有9个新的,3个旧的,第一次比赛取出了3个,用完后放回去,第二次比赛又取出3个,求第二次取到的3个球中有2个新球的概率.

解 令B表示"第二次取到的3个球中有2个新球"事件. 很明显,直接确定B的概率$P(B)$是困难的,原因是,第一次比赛之后,12个乒乓球中的新、旧球的分布情况不清楚,而一旦新旧球的分布情况明确了,那么相应的概率也容易求得. 为此,令A_i表示"第一次取到的3个球中有i个新球"事件,$i=0,1,2,3$. 容易判断A_0,A_1,A_2,A_3构成一个完备事件组(留给读者). 由于

$$P(A_i)=C_9^iC_3^{3-i}/C_{12}^3,\ i=0,1,2,3.$$

又因为

$$P(B|A_i)=C_{9-i}^2C_{3+i}^1/C_{12}^3,\ i=0,1,2,3.$$

于是利用全概率公式,得

$$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=\sum_{i=0}^{3}C_9^iC_9^{3-i}C_{9-i}^2C_{3+i}^1/(C_{12}^3)^2$$
$$=(108+3\,024+11\,340+7\,560)/220^2\approx0.455\,2$$

1-24 某商店收进甲厂生产的产品30箱,乙厂生产的同种产品20箱. 甲厂每箱装100个,废品率为0.06,乙厂每箱装120个,废品率是

0.05.求：

(1) 任取一箱,从中任取一个为废品的概率；

(2) 若将所有产品开箱混放,求任取一个为废品的概率.

解 (1) 令 A 表示“取到的一箱产品为甲厂生产”,B 表示“取到的一箱产品为乙厂生产”,则 A,B 构成一个完备事件组. 又记 C 为“取到的一个产品为废品”. 由题设条件可知,$P(A)=3/5$,$P(B)=2/5$,并且 $P(C|A)=0.06$,$P(C|B)=0.05$,于是由全概率公式,得

$$\begin{aligned}P(C)&=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)\\&=0.6\times0.06+0.4\times0.05=0.056.\end{aligned}$$

(2) 总计有 $3\,000+2\,400=5\,400$ 个产品,其中废品有 $180+120=300$ 个,故任取一个为废品的概率为 $3/54=1/18$.

1-25 一个机床有1/3的时间加工零件 A,其余时间加工零件 B. 加工零件 A 时,停机的概率是 0.3,加工零件 B 时,停机的概率是 0.4,求这个机床停机的概率.

解 令 A 表示事件“加工零件 A”,则 $\overline{A}$ 表示“加工零件 B”,又记 C 为“机床停机”,由题条件知,

$$P(A)=1/3,P(\overline{A})=2/3,\text{且 } P(C|A)=0.3,P(C|\overline{A})=0.4$$

于是

$$P(C)=P(A)P(C|A)+P(\overline{A})P(C|\overline{A})=(0.3+0.8)/3\approx0.367.$$

1-26 甲、乙两部机器制造大量的同一种机器零件,根据长期资料的总结,甲机器制造出的零件废品率为 1%,乙机器制造出的零件废品率为 2%. 现有同一机器制造的一批零件,估计这一批零件是乙机器制造的可能性比它们是甲机器制造的可能性大一倍,今从该批零件中任意取出一件,经检查恰好是废品. 试由此检查结果计算这批零件为甲机器制造的概率.

解 令 A 表示“甲机器制造出的零件”,则 $\overline{A}$ 表示“乙机器制造出的零件”. 又记 $P(A)=p$,由题意,$P(\overline{A})=2p$. 因为 $P(A)+P(\overline{A})=1$,$\therefore$ $p=1/3$,即 $P(A)=1/3$,$P(\overline{A})=2/3$. 再令 B 表示“取出一件是废品”. 由题中给出的条件可知:$P(B|A)=0.01$,$P(B|\overline{A})=0.02$. 本题要求的是条件概率 $P(A|B)$,把上面得到的相关数据代入到下面的贝叶斯公式中,可得

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}=\frac{\quad}{0.01+0.04}$$

$$=0.2$$

1-27 有两个口袋,甲袋中盛有两个白球,一个黑球,乙袋中盛有一个白球,两个黑球.由甲袋任取一个球放入乙袋,再从乙袋中取出一个球,求取到白球的概率.

解 令 A 表示"从甲袋中取到一个白球",$\overline{A}$ 表示"从甲袋中取到一个黑球".再令 B 表示"从乙袋中取出一个白球".因为 $P(A)=2/3$,$P(\overline{A})=1/3$,又因 $P(B|A)=2/4=1/2$,$P(B|\overline{A})=1/4$,
故由全概率公式,得

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=5/12$$

1-28 上题中若发现从乙袋中取出的是白球,问从甲袋中取出放入乙袋的球,黑、白哪种颜色可能性大?

解 沿用上题中的有关记号,现在要比较的是:$P(A|B)$ 与 $P(\overline{A}|B)$ 的大小.因

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{5}{12}}=4/5$$

$$P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)=1/5$$

所以,在上述条件下,从甲袋中取出并放入乙袋的球为白色球的可能性大.

1-29 假设有3箱同种型号零件,里面分别装有50件、30件和40件,而一等品分别有20件、12件及24件.现在任选一箱从中随机地先后各抽取一个零件(第一次取到的零件不放回).试求先取出的零件是一等品的概率;并计算两次都取出一等品的概率.

解 令 A_i 表示"选中第 i 箱",$i=1,2,3$.令 B_j 表示"第 j 次取到的零件是一等品",$j=1,2$.本题要求的概率分别是 $P(B_1)$、$P(B_1B_2)$.可利用全概率公式来求.首先,因为 $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=1/3$(从3箱中任选一箱视作每一箱被选中的机会是均等的).又因

$P(B_1|A_1)=20/50=2/5$,$P(B_1|A_2)=12/30=2/5$.

$P(B_1|A_3) = 24/40 = 3/5$.所以,有

$$P(B_1) = P(A_1)P(B_1|A_1) + P(A_2)P(B_1|A_2) + P(A_3)P(B_1|A_3)$$

$$= \frac{1}{3} \times (\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5}) = 7/15.$$

其次,由于

$$P(B_1B_2|A_1) = \frac{20 \times 19}{50 \times 49}$$

$$P(B_1B_2|A_2) = \frac{12 \times 11}{30 \times 29}$$

$$P(B_1B_2|A_3) = \frac{24 \times 23}{40 \times 39}$$

故而

$$P(B_1B_2) = P(A_1)P(B_1B_2|A_1) + P(A_2)P(B_1B_2|A_2) + P(A_3)P(B_1B_2|A_3)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2 \times 19}{5 \times 49} + \frac{2 \times 11}{5 \times 29} + \frac{3 \times 23}{5 \times 39}\right) \approx 0.220$$

1-30 发报台分别以概率0.6和0.4发出信号"·"及"—".由于通信系统受到干扰,当发出信号"·"时,收报台分别以概率0.8及0.2收到信号"·"及"—";又当发出信号"—"时,收报台分别以概率0.9及0.1收到信号"—"及"·".求当收报台收到"·"时,发报台确系发出信号"·"的概率,以及收到"—"时,确系发出"—"的概率.

解 由于发、收信号均只有两种状态:"·"及"—".故,记A表示"发出信号'·'",$\overline{A}$表示"发出信号'—'",记B表示"收到信号'·'",则$\overline{B}$表示"收到信号'—'".本题要求的概率分别是$P(A|B)$、$P(\overline{A}|\overline{B})$,因为已知$P(A) = 0.6$,$P(\overline{A}) = 0.4$,又$P(B|A) = 0.8$,$P(\overline{B}|A) = 0.2$,$P(\overline{B}|\overline{A}) = 0.9$,$P(B|\overline{A}) = 0.1$,故由贝叶斯公式,得

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})}$$

$$= \frac{0.6 \times 0.8}{0.6 \times 0.8 + 0.4 \times 0.1} = \frac{12}{13}$$

$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})}{P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A}) + P(A)P(\overline{B}|A)}$$

$$= \frac{0.4 \times 0.9}{0.4 \times 0.9 + 0.6 \times 0.2} = \frac{3}{4}$$