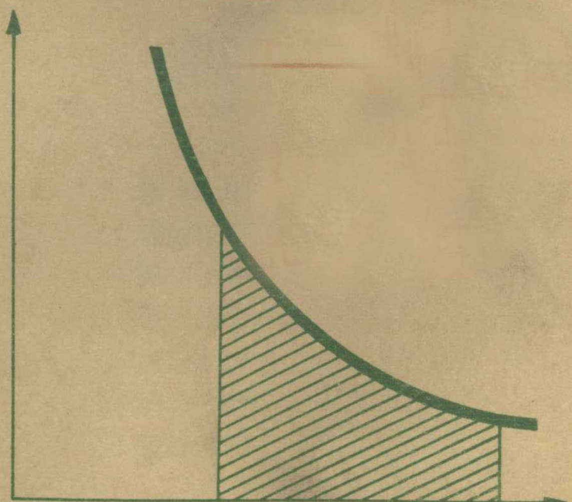
数 学

中央广播电视大学杂志编辑部 编



吉林人民出版社

中央广播电视大学学习辅导用书

SHU XUE
数学

中央电大杂志编辑部 编

微积分
线性代数
概率
复变函数
富氏级数
场论
逻辑代数

吉林人民出版社

中央广播电视大学学习辅导用书
数　　学
中央广播电视大学杂志编辑部
※
吉林人民出版社出版　吉林省新华书店发行
通化市印刷厂印刷
※
787×1092毫米32开本　10印张　219，000字
1984年10月第1版　1984年10月第1次印刷
印数：1—184,720册
统一书号：13091·181　定价：1.35元

前　　言

为适应广播电视大学84级理工科教学的需要，我们将《电视大学》杂志历年来所刊载的各学科辅导教学的优秀文章分别汇编成六册，即：数学（包括微积分、线性代数、概率、复变函数、富氏级数、场论、逻辑代数），物理（包括普通物理、近代物理概论、理论力学、算法语言），化学（包括无机化学、有机化学），电学（包括电路分析基础、模拟电子技术基础、数字电子技术基础、电机与拖动），机械（包括画法几何、材料力学、机械原理、机械零件）及英语.

这套书的内容有各门课程介绍；学习方法；重点、难点、疑点的辅导；基本概念的阐述；错例分析和实际应用等等. 这些文章的作者是：中央电大各学科的主讲教师和各教研组的老师、各地电大的辅导教师以及各高等院校的教师. 这些文章曾对79级、80级、82级电大理工科学员的学习和复习起了很大的指导帮助作用；对84级理工科学员（包括自学收看者）也将是良师益友；对其它成人业余大学，如夜大、函大、职大的学员也是很有益的参考资料.

在编写过程中，除对原文逐一进行审订外，有的文章还请原作者进行修改、补充，有的文章由于过去杂志篇幅所限未能发表，这次也收集在汇编之中了。在此对入选文章的作者谨表谢意。

限于我们的编辑力量和水平，加上编辑时间较短，在书中可能有错误之处，望广大读者给予批评指正.

中央电大杂志编辑部

1984.6.

目　　录

师生对话解疑难

北京广播电视大学　**翟连林**

学生：老师，我利用开学前的一段时间，预习了高等数学（一）的前三章内容，有几个问题不清楚，向您请教。

老师：学习高等数学听讲前的预习是很重要的．通过预习才能使听课有针对性，对自己不明白的地方要特别注意老师的讲解，这样学习才有主动性．你这种做法很好，要坚持下去．

学生：在第一章函数及其图形中，我感到"反函数概念"不好理解．比如，反函数的对应法则"φ"与直接函数的对应法则"f"，它们的相互关系是什么？您能给我说一说吗？

老师：好！我们先从反函数的定义说起．反函数定义是从大量的物理学规律中抽象出来的．它的定义可以这样来叙述：给定函数$y=f(x)$，它的值域为Y．如果对于Y中的每一个y的值，都可以从方程$y=f(x)$（y是已知数，故可将$y=f(x)$看成含未知量x的方程）确定唯一的一个x值，则得到一个定义在Y上的以y为自变量，x为因变量的新函数$x=\varphi(y)$．我们称$x=\varphi(y)$是函数$y=f(x)$的反函数，这时$y=f(x)$叫做直接函数．当然，我们也可以把$y=f(x)$叫做$x=\varphi(y)$的反函数．它们互为反函数．

例如，已知函数$y=2x+3$，它的值域是$(-\infty,+\infty)$，

对于 $(-\infty, +\infty)$ 中的每一个 y 的值，从方程 $y=2x+3$ 中解得 $x=\dfrac{y-3}{2}$。我们称 $x=\dfrac{y-3}{2}$ 为函数 $y=2x+3$ 的反函数。

从上述例子我们看到，直接函数 $y=2x+3$ 的对应法则 "f" 是：自变量先乘以 2，再加上 3，即先做二级运算 "×"，再作一级运算 "+"；而反函数 $x=\dfrac{y-3}{2}$ 的对应法则 "φ" 是：自变量先减去 3，再除以 2．即先作一级运算 "－"，再作二级运算 "÷"。它们的运算顺序恰好相反。因此，把正运算改成逆运算就是反函数的运算顺序．可见，由直接函数求其反函数的步骤，通常也就是由方程 $y=f(x)$ 解出 x 的步骤。

学生： 在求函数 $y=f(x)$ 的反函数时，对给定的 y 解出多个 x 怎么办？

老师： 由于使用反函数时必须是单值函数，因此，当由 $y=f(x)$ 求得的 x 是多值时，可用取单值分支的方法来确定反函数．比如，求函数 $y=x^2+x+1$ 的反函数．由 $y=x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ 可知，这个函数的值域是 $\left[\dfrac{3}{4}, +\infty\right)$．对于 $\left[\dfrac{3}{4}, +\infty\right)$ 中的每一个 y，从方程 $y=x^2+x+1$ 解得 $x=-\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{y-\dfrac{3}{4}}$．这就是说，对于每一个 y 的值，有两个确定的 x 值与之对应．在这种情况下，我们不能说反函数不存在，而是应认为反函数是一个双值函数（多值函数），只要写成 $x=-\dfrac{1}{2}+\sqrt{y-\dfrac{3}{4}}$ 和 $x=-\dfrac{1}{2}-\sqrt{y-\dfrac{3}{4}}$ 就可知道有

两个反函数存在. 从这个例子我们看到，给定一个函数，往往有几个甚至无限多个反函数. 我们熟悉的正弦函数 $y=\sin x$，由于单调区间有无限多个，因而反正弦函数也有无限多个.

学生：$y=f(x)$ 的反函数本应该写成 $x=\varphi(y)$，但为什么又要求写成 $y=\varphi(x)$ 呢？

老师：这是习惯. 因为我们在研究函数时，都是用字母 x 表示自变量，字母 y 表示因变量. 因此我们往往把反函数 $x=\varphi(y)$ 里的 x 与 y 对调过来，写作 $y=\varphi(x)$. 这时我们仍称它是 $y=f(x)$ 的反函数. 为了区别，有的书上称 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的本义反函数，$y=\varphi(x)$ 是 $y=f(x)$ 的矫形反函数. 当然一个单调函数的反函数只有一个，所谓本义反函数与矫形反函数仅仅是一个反函数的两种表示方法.

我们熟悉的反三角函数、对数函数等就是用矫形反函数表示的. 但有时也要用到本义反函数，比如你们学到后面 §46 反函数的导数时就需要用到本义反函数的表示方法.

学生：您这么一讲，使我对反函数的概念清楚多了. 在第二章数列的极限及函数的极限中，我最感到困难的是极限的概念，看了几遍教材都似懂非懂、模模糊糊的. 特别是所谓"$\varepsilon-N$"、"$\varepsilon-\delta$"定义，更感到抽象、难懂. 您能给我讲一讲吗？

老师：可以. 首先说明：你的感觉是正常的，初学者几乎都有一个似懂非懂、若明若暗的过程.

要掌握极限的概念需要有一个从直观的理解到精确的描述的过程.

关于数列的极限，我们可以直观地从求圆的周长谈起.

怎样求圆的周长呢？你还记得吗？

学生：记得．做圆的内接正多边形，当边数越来越增加时，正多边形的周长a_n就越来越接近圆的周长a．

老师：对！这是我们过去在中学对于求圆周长的粗浅认识．"接近"、"越来越接近"这是含糊的说法，怎样用数学语言来描述呢？

学生："接近"是否可以用$|a_n-a|$越来越小来刻划？

老师：是的．换句话说，就是用$|a_n-a|$的大小来表达a_n和a的靠近程度．"越来越接近"怎样来刻划呢？

学生：……那就是n越来越大，$|a_n-a|$越来越小．

老师：对．上面这段话在数学上常用"当n充分大的时候，$|a_n-a|$充分小"来表达．那么"n充分大"和"$|a_n-a|$充分小"怎样用数学语言来表达？你弄清楚了吗？

学生：我不清楚．

老师："n充分大"这句话就是说，只要N很大，则$n>N$以后，就表明变量n充分大了．"$|a_n-a|$充分小"就是$|a_n-a|<\varepsilon$，只要ε任意小，$|a_n-a|$就充分小．

通过上面的分析，再来看教材中关于数列极限的定义（$\varepsilon-N$定义）是否就清楚一些了？

学生：是的．

老师：对"$\varepsilon-N$"定义理解清楚了，再理解"$\varepsilon-\delta$"定义困难就不大了．你再考虑一下：在"$\varepsilon-N$"定义中，N与ε有什么关系？

学生：ε越小，a_n与a越接近，对应的项数N也就越大．因此，N是可以由ε确定的．这样可以把N看成是ε的一个函数，即$N(\varepsilon)$．

老师：你回答得很好．下面请你看这样一个题目：

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n-1}=\dfrac{3}{2}$。

证　方法一：

$$|a_n-a|=\left|\frac{3n+1}{2n-1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{5}{2(2n-1)}$$

为了使$|a_n-a|$小于所任给的正数ε，只要$\dfrac{5}{2(2n-1)}<\varepsilon$能成立，由此解出$n>\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{2\varepsilon}+1\right)$。取$N\geqslant\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{2\varepsilon}+1\right)\right]$*，则当$n>N$时就有

$$\left|\frac{3n+1}{2n-1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n-1}=\frac{3}{2}.$$

方法二：放大法．

$$|a_n-a|=\left|\frac{3n+1}{2n-1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{5}{2(2n-1)}$$

为了使$|a_n-a|$小于所给的正数ε，只要$\dfrac{5}{2(2n-1)}\leqslant\dfrac{5}{2(2n-n)}=\dfrac{5}{2n}<\dfrac{3}{n}<\varepsilon$能成立，由此解出$n>\dfrac{3}{\varepsilon}$。取$N\geqslant\left[\dfrac{3}{\varepsilon}\right]$，则当$n>N$时就有

$$\left|\frac{3n+1}{2n-1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n-1}=\frac{3}{2}$$

*“〔　〕”表示取某数的整数部分。

在这两种方法中，对同一个 ε，用方法二的N要比用方法一的N大。比如，$\varepsilon=0.1$，方法一中的$N\geqslant13$，而方法二中的$N\geqslant30$。这两种方法哪个好？

学生：我认为方法一好。取N不大也不小。方法二取N太大，不精确。

老师：就证明不等式成立而言，方法一和方法二无优劣之分。两种方法是一样的。方法一是从第 14 项起不等式成立，当然，方法二是从第31项起不等式就成立了。

对于直接解不等式$|a_n-a|<\varepsilon$有困难或不能直接解的时候，常常采用"放大法"(如方法二)。我们要掌握这个方法，在以后的学习中是很有用处的。

学生：老师，您能再把第三章函数的连续性中关于间断点的分类给我讲一讲吗？

老师：可以。为了清楚起见，我们把间断点x_0的几种常见类型列表如下：

第一类间断点	可去间断点	$f(x_0-0)=f(x_0+0)$，但$f(x_0)$不确定 $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$
	不可去间断点	$f(x_0-0)$和$f(x_0+0)$都存在，但 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$
第二类间断点	无穷间断点	$f(x_0-0)$和$f(x_0+0)$ 至少有一个趋向∞
	振荡间断点	在$x=x_0$处函数极限不存在，永远振荡

下面我们举个例子，请你试找出函数：

$$f(x)=\begin{cases}-x-1, & x\leqslant -1\\ \dfrac{1}{x}, & |x|<1\\ \sqrt{x}, & 1<x\end{cases}$$

的间断点，并判断属于何种类型？如果是可去间断点，将其补成连续函数。

学生：$f(-1-0)=\lim\limits_{x\to-1-0}(-x-1)=0$，

$f(-1+0)=\lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{1}{x}=-1$。

$\because$ $f(x)$在点$x=-1$处左、右极限存在，但不相等，

$\therefore$ $x=-1$是第一类不可去间断点。

老师：对。这是在点$x=-1$处。那么，在点$x=0$处呢？

学生：$\because$ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}=\infty$，$\therefore x=0$是第二类无穷型间断点。

老师：对。还有在点$x=1$处呢？

学生：$\because$ $f(1-0)=\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{1}{x}=1$，$f(1+0)=\lim\limits_{x\to1+0}\sqrt{x}=1$，

则 $f(x)$在点$x=1$处左、右极限存在且相等，

$\therefore$ $x=1$是第一类可去间断点。

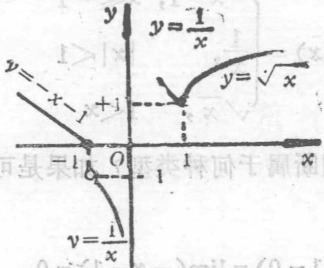
老师：怎样把它变成在该点的连续函数？

学生：补充定义。当$x=1$时，$f(x)=1$，这时函数在点$x=1$处就是连续的了。

老师：这个题图我们可画如图。

学生：老师，把第一类可去间断点变为连续的点有几种方法？

老师：有两种方法。



（1）补充函数在间断点$x=x_0$处的定义，使$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$。上面的例子我们已经见到了．

（2）改变函数在间断点处的定义，使$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$．

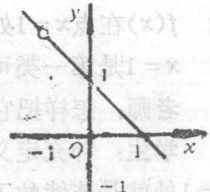
例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{1+x}, & x\neq-1\\ 0, & x=-1\end{cases}$$

在点$x=-1$处间断如图，且为第一类可去间断点．

$\because\ \lim\limits_{x\to-1}f(x)=2$，$\therefore$ 改变函数$f(x)$的定义，使$f(-1)=2$。即

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{1+x}, & x\neq-1\\ 2, & x=-1\end{cases}$$



这样，在点$x=-1$处就连续了．

学生：老师，我预习前三章的疑难问题就这几个．通过您的讲解清楚多了．

老师：希望今后坚持预习，不懂的地方多思、善问，注意电视课上老师的讲解．

分部积分法浅谈

北京钢铁学院数学教研室　　李宗元

分部积分法是一种重要的积分方法。首先，它与换元积分法相比，虽然所受的限制较多，应用范围也窄，但是，它能解决换元积分法难于解决的某些类型的积分问题（如$\int e^{x}\cos x dx$，$\int x^{k}\sin x dx$等）。其次，在许多情形下，如能灵活运用分部积分法，往往比换元积分法要简便。最后，一些递推关系的建立，也离不开这种积分方法。因此，使学员掌握好这种重要的积分方法是很必要的。

现将分部积分法的一般原则、若干标准类型、需灵活运用的类型以及有关的经验与技巧作一个简要的介绍。

一、分部积分法的一般原则

分部积分法是指：

$$\int u dv = uv - \int v du \qquad \text{（不定积分），}$$

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \qquad \text{（定积分）。}$$

现在我们以不定积分的分部积分法为主进行讨论。

一般说来，在积分$\int f(x)dx$中，当被积函数$f(x)$中包含

某些超越函数，并造成直接积分或变量代换均有困难时，往往采用分部积分法．

进行分部积分时，重要的是把被积表达式$f(x)dx$改组成为udv的形式，于是

$$\int f(x)dx=\int udv=uv-\int vdu$$

这样，$\int f(x)dx$能否解决的关键就在于$\int vdu$是否较易于积分了．由此可见，分部积分法实际上是将原积分$\int f(x)dx$分解成为两个积分，即：（1）由dv积分得出v；（2）计算$\int vdu$．如果这两个积分都能够解决，较复杂的原积分$\int f(x)dx$就解决了．这种化一个较难积分为两个较易积分的办法，就是分部积分法"分部"的含意．一般情况下，由dv得到v是一个简单积分（经常是凑微分），故关键在于计算$\int vdu$．

由前所述，我们可以得出分部积分法的一般原则，即将$f(x)dx$改组为udv的原则．

（1）v易于积出；

（2）$\int vdu$与$\int f(x)dx(\int udv)$相比，或较为简单，或二者相当〔以期建立包含原积分$\int f(x)dx$的方程，从而解出$\int udv$，即解出原积分$\int f(x)dx$〕．

二、分部积分法的标准类型

分部积分法的标准类型主要是指：