高等学校试用教材

线性代数

谢邦杰 编

人民教育出版社

高等学校试用教材

线性代数

谢邦杰 编

人民教育出版社

1978·北京

序

本教材是为数学系的《高等代数》课程而编写的. 如与编者过去编的《高等代数简明教程》(1966 年, 高等教育出版社)相比, 则本教材有下百几方百的变动:

一、对行列式与矩阵,特别是矩阵的理论,大为加强了. 这既是本着加强基础理论教学的牸神,又是由于这些年来搞实际任务,觉得过去学的矩阵实在太不够用了,特别是概率、统计方百深有此忑.

二、在讲法上有较大变动. 除了最后一章不可避免一些较抽象的概念外,对前百所有内容均尽可能用较直观而形象的讲法. 如过去一直认为较难理解的“线性相关”、“线性无关”, “秩数”等(有人说“线性相关”真是一关),都改成较直观易懂的讲法. 有些问题在过去要用较多篇幅来处理, 在本教材中尽可能想办法简化之. 例如对 $|AB|=|A||B|$ 的证明就非常简单;对“基础解系”的存在的证明也简化不少,不是一个一个去求出解;对 λ-矩阵化成法式,由于先看秩数而对秩数用归纳法, 就把许多麻烦的论述融化在归纳法假设中去了,便使证明大为简化而易懂,所用篇幅不过是编者以往编过的三分之一.

三、对矩阵问题的处理,变动更为显著. 一是由于使用了“高矩阵”,而使许多论述得到简化; 二是充分运用矩阵分块乘法的特点,显示出了各种技巧性. 此二者不只是用来处理一些问题,而是贯彻始终. 因此,矩阵的内容(包括二次型等)虽然大为加强了,但总的篇幅反而减少了. 所以,这对初学者来说, 是比较适宜的;就是对高年级已学过代数的同学来说, 另外掌握一套办法, 也有好

处，何况还有新内容.

四、在每节末均附有较多的习题，且对难题均有提示甚至有解答. 这对同学来说，可灵活运用，实在想不出来，再看提示或解答；就是对专年教师备课来说，也较方便，用不着再看更多的参考书，因为本教材的正文与理论性习题合在一起，已包括了一般的“线性代数”书的主要内容；就是对于使用线性代数较多的科技工作者来说也有好处，因为有些习题不只是为了消化正文而设的，而且是为了解决实际问题要用到，特别是在解决概率、统计方百的问题要用到.

五、本教材没有按照过去“高等代数”一般的章、节次序来安排，而是把好㤘的，而又最有用的，安排在前百，以便一气呵成. 而把较抽象的内容放在最后一章. 即使对个别学习较吃力的同学来说，这样也不形响大局. 而迂到特殊恃况，还便于精简.

六、第四章末有三个附录. 附录2是介绍较现代的所谓广义逆矩阵，初学者也能看㤘；附录1在学过微分方程后便可看㤘；附录3对概率、统计方百的同学特别重要，只要学了微积分便可看㤘，那些结果在概率统计方百是常要用到的.

七、第五章后有两个补充. 一个是证明多项式的几个基本而重要的定理：如带余除法定则，最高公因式存在，因式唯一分解，代数学基本定理等. 这是因为前百用到这些结果，为了使初学者不至于在这些地方发生困难而补充的. 教师也可以把它作为正式内容，在讲完第三章后，讲授这一补充；另一个是群、环、域简介. 这是为了对前百各章的内容的理解起加深、推广和提高作用，也为了加强基础理论教学而补充的. 教师也可把它作为正式内容，放在最后讲. 把这些内容作为补充材料，而不另立章、节，更便于灵活使用.

总之，本教材符合这次在上海召开的数学教材会议所讨论的

《线性代数》编写大纲的要求，本着努力体现辩证唯物主义观点和加强基础理论教学的精神，以及注意实际应用的需要，并结合文化大革命前后对本课程教学的体会而编写的，故本教材可适用于数学系各专业的《高等代数》课程.

本教材在编写中承赵文同志提供了不少有实际应用的习题和附录3中的一些公式；编完后又承中国科技大学的常庚哲同志提供了若干好的习题. 特此表示衷谢.

由于数学教材会议代数组全体同志，其中特别是郝鈵新、朱福祖、常庚哲、张一立、郭聿琦、佟文廷等同志，对原稿的认真审阅和热忱邦助，使本教材的质量有明显的提高，谨此致谢.

最后，希望读者对本书多加批评和邦助，使本书的缺点和错误不断得到克服和纠正，大家共同努力，为响应党的号召，搞好本课程的教与学，为实现科学技术现代化而奋斗.

编　者

1977.10.19.

目　录

第一章　行列式

§1. 数　域

本节主要介绍数域的概念.

无论一组甚么东西都叫做一个集合. 组成这个集合的东西叫做此集合的元素. 通常以 A, B 等大写字母代表集合；以 a, b 等小写字母代表元素. 如果 a 是集合 A 的元素，则说 a 属于 A，记为 $a\in A$，或说 A 包含 a，记为 $A\ni a$.

数域的定义　设 P 是一些（有限或无限多个）数所组成的一个集合，而且 P 不只含一个数. 如果对于 P 中任意二数 a，b 恒有 $a+b\in P, a-b\in P, ab\in P$，而且当 $b\neq 0$ 时还有 $\frac{a}{b}\in P$，则 P 就叫做一个数域.

例如所有的有理数所组成的集合就是一个数域，叫做有理数域；所有实数的集合和所有复数的集合也都是数域，分别叫做实数域和复数域.

例1　所有形如 $\alpha+\beta\sqrt{2}$（α，β 表有理数）的实数所组成的集合 P 是一个数域.

事实上，在这个集合 P 中任取二数：

$$a=\alpha_1+\beta_1\sqrt{2},\quad b=\alpha_2+\beta_2\sqrt{2}$$

则有

$$a+b=(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)\sqrt{2},$$

$$a-b=(\alpha_1-\alpha_2)+(\beta_1-\beta_2)\sqrt{2},$$

$$ab=(\alpha_1\alpha_2+2\beta_1\beta_2)+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)\sqrt{2},$$

按假设 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 均为有理数，故$(\alpha_1+\alpha_2)$，$(\beta_1+\beta_2)$，$(\alpha_1-\alpha_2)$，$(\beta_1-\beta_2)$，$(\alpha_1\alpha_2+2\beta_1\beta_2)$，$(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)$均为有理数，所以就有

$$a+b\in P,\quad a-b\in P,\quad ab\in P.$$

最后还要说明当 $b\neq0$ 时，还有$\frac{a}{b}\in P$. 当$b\neq0$ 时，则 α_2，β_2 至少有一个不等于 0，由于$\sqrt{2}$是无理数，故 $\alpha_2-\beta_2\sqrt{2}\neq0$，从而

$$\alpha_2^2-2\beta_2^2=(\alpha_2+\beta_2\sqrt{2})(\alpha_2-\beta_2\sqrt{2})\neq0,$$

于是便有

$$\frac{a}{b}=\frac{\alpha_1+\beta_1\sqrt{2}}{\alpha_2+\beta_2\sqrt{2}}=\frac{(\alpha_1+\beta_1\sqrt{2})(\alpha_2-\beta_2\sqrt{2})}{(\alpha_2+\beta_2\sqrt{2})(\alpha_2-\beta_2\sqrt{2})}$$

$$=\frac{\alpha_1\alpha_2-2\beta_1\beta_2}{\alpha_2^2-2\beta_2^2}+\frac{\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2-2\beta_2^2}\sqrt{2}.$$

因 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$均为有理数，且 $\alpha_2^2-2\beta_2^2\neq0$，故若令

$$\alpha_3=\frac{\alpha_1\alpha_2-2\beta_1\beta_2}{\alpha_2^2-2\beta_2^2},\qquad \beta_3=\frac{\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2-2\beta_2^2},$$

则 α_3,β_3 均为有理数，且$\frac{a}{b}=\alpha_3+\beta_3\sqrt{2}$，所以还有$\frac{a}{b}\in P$. 这就验证了 P 是一个数域.

命题 任忑一个数域 P 必含 0 与 1.

证明 在 P 中任取一个数 a 来看，由定义知恒有 $a-a\in P$，即 $0\in P$. 进一步，由于 P 不只含一个数，故 P 不可能只含 0，因而在 P 中必存在一个数 $b\neq0$，于是由定义又有$\frac{b}{b}\in P$，即知 $1\in P$. 证毕.

根据数域的定义，我们知辺一个数域中的数，经过有理运祘(即加、减、乘、除)以后，所得出的数仍然在这个数域中，而在本课程中讨论问题时，所涉及到数的运祘也常常只是有理运祘，故可以认为在讨论问题时，所涉及到的数统统是属于某一个数域.

习　题

1. 所有形如 $\alpha+\beta\sqrt{5}$（α,β 表有理数）的实数的集合是否是一个数域？

2. 所有形如 $\alpha+\beta i$（α,β 表有理数，$i=\sqrt{-1}$）的复数的集合是否是一个数域？又当 α,β 只表奎数时，则如何？

3. 证明任忌数域必包含所有的有理数（由此可知有理数域是一个最小的数域）.

§2. 二阶与三阶行列式

本节的主要目的是叙述行列式的来沅. 它是从二元与三元线性方程组的公式解引出来的，故首先讨论解线性方程组的问题.

设有二元线性方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2.\end{cases}\tag{1}$$

用加减消去法解此方程组：用 b_2 乘第一式各项，得

$$a_1b_2x+b_1b_2y=c_1b_2;\tag{2}$$

再用 b_1 乘第二式各项，又得

$$a_2b_1x+b_2b_1y=c_2b_1.\tag{3}$$

然后从(2)减(3)消去 y，而得

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1,$$

故当 $a_1b_2-a_2b_1\neq0$ 时，则得出

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

同理，在(1)中用 a_2 乘第一式各项，用 a_1 乘第二式各项，然后相减，亦当 $a_1b_2-a_2b_1\neq0$ 时，得出

$$y=\frac{-c_1a_2+c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

故方程组(1)只要适合条件 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$，则其解可以立即得出为：

$$\begin{cases} x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \\ y=\dfrac{-c_1a_2+c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \end{cases} \tag{4}$$

这就是一般二元线性方程组(1)的解的公式. 但(4)式颇不易记忆，应用时不方便，因而就引出了新的符号来表示(4)式这个结果，这就是行列式的起沅. 令

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2-a_2b_1, \tag{5}$$

并把此式叫做一个二阶行列式（其实标出来就是一个数）. 这样一来，(4)式就可以另外记为下百这样更奎齐的形式：

$$\begin{cases} x=\dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \\ y=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \end{cases} \tag{6}$$

此式中共出现了四个二阶行列式. 我们现在来观攴一下，这些行列式与(1)式中各系数的联系是怎样的？

首先，(6)式中居分母地位的行列式是相同的，而且都是从(1)式中未知数的系数按照其戽有的相对位置而排成的，所以(6)式中的分母是毫不费力就记住了. 下百再来看分子. 为了叙述方便起见，我们把(5)式左边 a_1，b_1 所在之位置叫做此二阶行列式的第一行；a_2, b_2 所在之位置叫第二行；a_1，a_2 所在之位置叫第一列；b_1, b_2

所在之位置叫第二列(即横的叫行，纵的叫列，故有行列式之名)；而 a_1, a_2, b_1, b_2 都叫做这个二阶行列式的元素.

这样一来，我们立即看出 x 的解答的分子，就是把行列式(5)中第一列的元素换成方程组(1)中的两个常数项，并保持该二数原有的上下相对位置；而 y 的解答的分子，则是用(1)式中常数项去换(5)式中 y 的系数(即第二列的元素)而成.

总之，当(1)式中未知数的系数所排成的二阶行列式不等于 0 时，则(1)式之解立即可由(6)式标出.

例 1 解方程组

$$\begin{cases}3x+4y=8,\\ 2x+7y=5.\end{cases}$$

解 因

$$\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 7\end{vmatrix}=21-8=13\neq 0,$$

故得

$$x=\frac{\begin{vmatrix}8 & 4\\ 5 & 7\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 7\end{vmatrix}}=\frac{56-20}{13}=\frac{36}{13},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}3 & 8\\ 2 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 7\end{vmatrix}}=\frac{15-16}{13}=\frac{-1}{13}.$$

例 2 解方程组

$$\begin{cases}2x+3y=13,\\ 5x-4y=-2.\end{cases}$$

解 因

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -8-15=-23\neq 0,$$

故得

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 13 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}}=\frac{-52+6}{-23}=2,$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}}=\frac{-4-65}{-23}=3.$$

现在再看三元线性方程组:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. \end{cases} \tag{7}$$

分别用$(b_2c_3-b_3c_2)$乘第一式;$(b_3c_1-b_1c_3)$乘第二式;$(b_1c_2-b_2c_1)$乘第三式,再把乘后的三个式相加,则 y 与 z 的项就消去了,而得

$$(a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1)x$$
$$=(d_1b_2c_3-d_1b_3c_2+d_2b_3c_1-d_2b_1c_3+d_3b_1c_2-d_3b_2c_1);$$

同理,用加减消去法,从(7)中消去 x, z 的项可得

$$(a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1)y$$
$$=(a_1d_2c_3-a_1d_3c_2+a_2d_3c_1-a_2d_1c_3+a_3d_1c_2-a_3d_2c_1);$$

从(7)中消去 x, y 的项可得

$$(a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1)z$$
$$=(a_1b_2d_3-a_1b_3d_2+a_2b_3d_1-a_2b_1d_3+a_3b_1d_2-a_3b_2d_1).$$

故当

$$a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1\neq 0$$

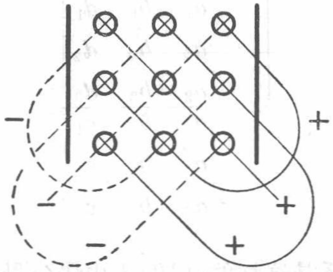
时,则(7)之解可立即得出为

$$\begin{cases} x=\dfrac{d_1b_2c_3-d_1b_3c_2+d_2b_3c_1-d_2b_1c_3+d_3b_1c_2-d_3b_2c_1}{a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1}, \\ y=\dfrac{a_1d_2c_3-a_1d_3c_2+a_2d_3c_1-a_2d_1c_3+a_3d_1c_2-a_3d_2c_1}{a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1}, \\ z=\dfrac{a_1b_2d_3-a_1b_3d_2+a_2b_3d_1-a_2b_1d_3+a_3b_1d_2-a_3b_2d_1}{a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1}. \end{cases} \tag{8}$$

如同上段一样，这又引出了三阶行列式．令

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2 \\ -a_3b_2c_1, \tag{9}$$

则(9)式就叫做一个三阶行列式．它可以由一个很简单的规则来说明，就是所谓三阶行列式的对角线规则(或又叫做沙流氏规则)：



即实线上所组成之乘积在其前再加正号，虚线上的则再加负号．

例3

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$=2\cdot2\cdot(-5)+1\cdot0\cdot3+4\cdot7\cdot(-3)-4\cdot2\cdot3-2\cdot0\cdot7$$

$$-(-3)\cdot1\cdot(-5)$$

$$=-20-84-24-15=-143.$$

有了三阶行列式以后，则(8)式可以很조齐地记为：

$$\left\{\begin{aligned} x&=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \\ y&=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \\ z&=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

此式与(7)式的关系是这样的：(10)式中居分母地位的三个三阶行列式都是从(7)式中未知数的系数按其原有相对位置而排成的. 在解题时，要首先计算出此行列式，当其不为0时，才能应用(10)式求解. x 的解答的分子位置上那个三阶行列式，是由(7)式中常数项去换分母位置上那个行列式的第一列而成，亦即常数项去换 x 的系数而成；y 的解的分子则是由常数项去换 y 的系数而成；z 的则是由常数项去换 z 的系数而成. 这和二元线性方程组的解相似. 不仅如此，以后我们还会知道：n 元线性方程组的解也同样可以用"n 阶行列式"来表出，其情况也完全相似.

例 4 解方程组

$$\begin{cases}2x-4y+z=1,\\x-5y+3z=2,\\x-y+z=-1.\end{cases}$$

解 因

$$\begin{vmatrix}2 & -4 & 1\\1 & -5 & 3\\1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-8\neq 0,$$

故立即得出

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & -4 & 1\\2 & -5 & 3\\-1 & -1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -4 & 1\\1 & -5 & 3\\1 & -1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{11}{-8},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 2 & 3\\1 & -1 & 1\end{vmatrix}}{-8}=\frac{9}{-8},\quad z=\frac{\begin{vmatrix}2 & -4 & 1\\1 & -5 & 2\\1 & -1 & -1\end{vmatrix}}{-8}=\frac{6}{-8}.$$

习 题

1. 计祘下列各行列式:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\\2 & 3 & 1\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\3 & 1 & 4\\8 & 9 & 5\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}0 & a & 0\\b & 0 & c\\0 & d & 0\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}0 & a & -b\\a & 0 & -c\\b & c & 0\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}\frac{1+t^2}{1-t^2} & \frac{2t}{1-t^2}\\ \frac{2t}{t^2-1} & \frac{1+t^2}{t^2-1}\end{vmatrix}.$$

2. 验证下列等式成立:

(1) $\begin{vmatrix} a+a_1 & b \\ c+c_1 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix}$,

(2) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$,

(3) $a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

3. 利用行列式来解下列方程组:

(1) $\begin{cases} 5x+2y=3, \\ 11x-7y=1; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x\cos\alpha - y\sin\alpha = a, \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha = b; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+\ y-2z=-3, \\ 5x-2y+7z=22, \\ 2x-5y+4z=4. \end{cases}$

§3. 置　　换

本节是为后百引进 n 阶行列式而做准备工作的. 同时也可作为第五章中"群"的重要例子.

n 个数码 $1,2,3,\cdots,n$ 的每一种有确定次序的排列简称为一个 n 排列.

命题 1　n 排列一共有 $n!$ 个

因为第一个位置可从 n 个数码中任取一个来排, 共有 n 种方法; 第二个位置只能在剩下的 $n-1$ 个数码中任取一个来排, 共有 $n-1$ 种方法; 第三个位置只能在剩下的 $n-2$ 个数码中任取一个来排, 共有 $n-2$ 种方法; 如此继续下去, 到最后一个位置, 即第 n 个位置, 只剩下一个数码, 只有 1 种方法. 故一共有 $n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1=n!$ 种排法.

在一个 n 排列中, 如果有较大数排在较小数之前, 而且这种大