

DAQIFEIXINGQI  
ZITAI  
DONGLIXUE

赵汉元 编

# 大气飞行器姿态动力学

国防科技大学出版社

# 大气飞行器姿态动力学

赵汉元 编



\*30206563\*

国防科技大学出版社

621008

## 内 容 提 要

本书主要研究大气飞行器绕质心的运动特性，讨论大气飞行器作为一个刚体的姿态运动问题。首先讨论运动稳定性的概念，介绍研究稳定性的方法，并对大气飞行器的运动方程进行线性化和分组。其次研究作为刚体的飞行器的运动稳定性，把飞行器作为控制系统的一个环节研究弹体的传递函数，并研究其过渡过程。然后把弹体作为弹性体建立了弹性弹体的传递函数，研究结构的弹性变形给传递函数带来的影响。最后讨论了小型弹头再入时的新问题——弹头再入时的滚转异常，它包括滚转共振和滚速过零两个问题。

本书可作为航天航空院校飞行力学、总体和飞行控制专业大学本科生的教材。对于航天航空设计和应用部门的工程技术人员、有关专业的研究生也有参考价值。

### 大气飞行器姿态动力学

赵汉元 编

责任编辑 王金荣

封面设计 侯云

\*

国防科技大学出版社 出版

湖南省新华书店发行  
国防科技大学印刷厂印装

\*

开本：787×1092 1/16 印张：16 字数：370千  
1987年4月第1版 1987年4月第1次印刷 印数1—1000册

统一书号 15415·019

ISBN 7-81024-003-X

TP·2 定价：2.70元

## 前 言

飞行力学是研究飞行器运动规律的一门应用力学的分支。飞行器飞行力学由弹道学、大气飞行器姿态动力学、制导方法、航天飞行器轨道动力学，航天飞行器姿态动力学等几部分组成。

本书是在弹道学的基础上讨论飞行器绕质心的运动特性，研究大气飞行器的姿态运动问题，即通常所说的研究飞行器的稳定性和操纵性。全书共分六章。第一章阐述运动稳定性和操纵性的一些概念，介绍研究运动稳定性的方法，并把运动方程线性化。第二章研究飞行器纵向运动的稳定性。第三章把飞行器作为一个刚体研究飞行器的传递函数，研究飞行器运动参数对舵偏角的反应。第四章研究侧向运动的稳定性和操纵性。第五章建立对称和不对称旋转弹头的运动方程，研究近廿年出现的弹头再入时的滚转共振问题。第六章研究飞行器作为弹性体的传递函数，讨论大型飞行器弹性变形对控制系统的影响。

本书是在国防科技大学程国采、肖峰、常文森和张最良等编的讲义《弹道导弹飞行力学》、《导弹动态分析》、《飞行器控制系统的分析和设计》和《弹道导弹的制导与控制》的基础上，参考兄弟院校的教材和国内外教材、文献资料而编写的。本书的编写得到国防科技大学程国采教授、沈为异同志的大力支持，详细审阅了原稿，对本书的结构、内容提出了宝贵的意见，国防科技大学黄增民同志、研究生尹坚、朱明新、汤国建等在审稿绘图方面也给予支持，在此对他们表示谢意。

限于编者水平，书中定有不少缺点和错误，欢迎读者批评指正。

编 者

1987年1月

# 目 录

## 第一章 运动稳定性和操纵性的概念

§ 1-1 飞行器的空间运动方程 .....	1
§ 1-2 运动稳定性的概念 .....	7
§ 1-3 研究运动稳定性的方法 .....	12
§ 1-4 动稳定性和静稳定性的概念 .....	24
§ 1-5 操纵性的概念 .....	27
§ 1-6 空气动力和空气动力矩的线性表示 .....	28
§ 1-7 飞行器运动方程的线性化及分组 .....	33

## 第二章 导弹的纵向稳定性分析

§ 2-1 纵向扰动运动的解, 特征方程式 .....	43
§ 2-2 纵向扰动运动特性分析及纵向稳定性条件 .....	46
§ 2-3 扰动运动的典型例子, 扰动运动的两种模态 .....	53
§ 2-4 短周期运动的简化分析 .....	65
§ 2-5 弹道导弹纵向扰动运动分析 .....	68

## 第三章 导弹弹体的纵向操纵性

§ 3-1 弹体的纵向传递函数及结构图的组成 .....	77
§ 3-2 弹体纵向传递函数的简化 .....	87
§ 3-3 舵作阶跃偏转时, 纵向动态特性讨论 .....	94
§ 3-4 弹体的对数频率特性 .....	109

## 第四章 弹体的侧向稳定性和操纵性

§ 4-1 侧向扰动运动方程及其简化 .....	114
§ 4-2 侧向稳定性分析 .....	123
§ 4-3 侧向稳定性边界的讨论 .....	134
§ 4-4 弹体的侧向传递函数 .....	136

## 第五章 弹头再入时的滚转共振问题

§ 5-1 概述 .....	148
§ 5-2 考虑速度高度变化时, 再入攻角的变化规律 .....	149
§ 5-3 对称旋转弹头的运动方程和动态特性 .....	159
§ 5-4 弹头质量和气动力不对称时, 旋转弹头的运动方程 .....	178
§ 5-5 弹头质量和气动力不对称时, 旋转弹头的动态特性 .....	183
§ 5-6 $M_{y0}$ 、 $M_{z0}$ 和 $\Delta y$ 、 $\Delta z$ 组合不对称对滚转速率的影响 .....	200
§ 5-7 弹头不对称因素引起的持续滚转共振和滚速过零 .....	206

## 第六章 弹性弹体的传递函数

§ 6-1 概述 .....	215
§ 6-2 弹性弹体的运动方程 .....	215
§ 6-3 作用在弹性弹体上的力和力矩 .....	232
§ 6-4 弹性弹体的传递函数 .....	238

## 参考文献

# 第一章 运动稳定性和操纵性的概念

## § 1-1 飞行器的空间运动方程

在弹道学里我们讨论了与质心运动有关的一些问题，例如椭圆弹道理论完全把飞行器看作一个质点来考虑。而在弹道主动段虽然在建立运动方程时把飞行器作为一个刚体，但实际处理问题时又把它当作一个可控制的质点。即认为：

(1) 飞行器是瞬时平衡的，即在力矩方程中略去惯性力矩和阻尼力矩，认为飞行器的稳定力矩和控制力矩平衡，当有一舵偏角 $\delta_\varphi$ ，瞬时就会有一个相应的 $\alpha$ 与之对应，忽略从一个平衡状态过渡到另一平衡状态的过渡过程。

(2) 控制系统是理想的，认为一有误差信号，舵偏角马上完成偏转，即

$$\delta_\varphi = \alpha_0^\circ (\varphi - \varphi_{pr})$$

(3) 无任何干扰力和干扰力矩，作用在飞行器上的力和力矩是按给定的规律变化，或者说是在标准情况下讨论问题。

在上述假设下讨论的主要问题是与弹道有关的一些问题，例如飞行方案的设计、主要参数的选择、质心弹道的计算等。但实际上飞行器不是一个可控制的质点，而是一个刚体，进一步应认为是一个弹性体。飞行器的运动除质心运动外，还有绕质心的转动，而且飞行器正是利用绕质心的转动、即飞行器姿态改变来控制质心的运动轨迹——弹道。有控制信号，舵偏角并不是马上转到平衡位置，而且有舵偏角 $\delta_\varphi$ ，飞行器迎角（攻角）更不是马上达到所要求的值，均有一个过渡过程，如果我们要研究这样一个过渡过程，要更精确地研究飞行器的运动，就需要把飞行器看作是一个刚体而不是一个可控制的质点。所以要建立飞行器的一般运动方程——刚体运动方程，把飞行器的质心运动和绕质心转动放在一起研究。

在弹道学里已经推导出飞行器的一般运动方程，并且分析了在什么样的条件下可以得到简化一些的运动方程。

一般运动方程中最重要的是动力学方程，它们一个是力的方程，即质心运动方程，另一个是力矩方程，即绕质心的转动方程。弹道学中力的方程是投影到速度坐标系各轴上去建立起其标量方程，也称在速度坐标系中列写质心动力学方程。而力矩方程是投影到弹体坐标系各轴上去建立起其标量方程，也称在弹体坐标系中列写绕质心转动的动力学方程。此外为解运动方程，还建立了一些补充关系。这样条件下的一般运动方程如下：

$$\begin{aligned}
m\dot{v} &= P_e \cos \alpha \cos \beta - C_x q S - mg \left( \frac{x}{r} \cos \theta \cos \sigma + \frac{R+y}{r} \sin \theta \cos \sigma - \frac{z}{r} \sin \sigma \right) \\
&\quad - R' \delta_\varphi \sin \alpha \cos \beta - R' \delta_\psi \sin \beta \\
mv(\dot{\theta} \cos \sigma \cos \nu - \dot{\sigma} \sin \nu) &= P_e \sin \alpha + C_y^\alpha \alpha q S - mg \left[ \frac{x}{r} (\cos \theta \sin \sigma \sin \nu - \sin \theta \cos \nu) \right. \\
&\quad \left. + \frac{R+y}{r} (\sin \theta \sin \sigma \sin \nu + \cos \theta \cos \nu) \right. \\
&\quad \left. + \frac{z}{r} \cos \sigma \sin \nu \right] + R' \delta_\varphi \cos \alpha \\
-mv(\dot{\sigma} \cos \nu + \dot{\theta} \cos \sigma \sin \nu) &= -P_e \cos \alpha \sin \beta + C_z^\beta \beta q S - mg \left[ \frac{x}{r} (\cos \theta \sin \sigma \cos \nu \right. \\
&\quad \left. + \sin \theta \sin \nu) + \frac{R+y}{r} (\sin \theta \sin \sigma \cos \nu - \cos \theta \sin \nu) \right. \\
&\quad \left. + \frac{z}{r} \cos \sigma \cos \nu \right] - R' \delta_\varphi \cos \beta + R' \delta_\psi \sin \alpha \sin \beta \\
I_{x_1} \dot{\omega}_{x_1} &= M_{x_1} + M_{x_1}^\delta \delta_\nu - (I_{x_1} - I_{y_1}) \omega_{y_1} \omega_{z_1} \\
I_{y_1} \dot{\omega}_{y_1} &= M_{y_1} + M_{y_1}^\delta \delta_\psi - (I_{x_1} - I_{z_1}) \omega_{x_1} \omega_{z_1} \\
I_{z_1} \dot{\omega}_{z_1} &= M_{z_1} + M_{z_1}^\delta \delta_\varphi - (I_{y_1} - I_{x_1}) \omega_{y_1} \omega_{x_1} \\
\dot{x} &= v \cos \theta \cos \sigma \\
\dot{y} &= v \sin \theta \cos \sigma \\
\dot{z} &= -v \sin \sigma \\
\omega_{x_1} &= \dot{\psi} - \dot{\varphi} \sin \psi \\
\omega_{y_1} &= \dot{\psi} \cos \psi + \dot{\varphi} \cos \psi \sin \psi \\
\omega_{z_1} &= \dot{\varphi} \cos \psi \cos \psi - \dot{\psi} \sin \psi \\
\cos \sigma \sin \nu &= -\sin \alpha \sin \psi + \cos \alpha \cos \psi \sin \gamma \\
\cos \theta \sin \sigma \sin \nu - \sin \theta \cos \nu &= \sin \alpha \cos \varphi \cos \psi + \cos \alpha \cos \varphi \sin \psi \sin \gamma - \cos \alpha \sin \varphi \cos \gamma \\
\sin \sigma &= \cos \alpha \cos \beta \sin \psi + \sin \alpha \cos \beta \cos \psi \sin \gamma - \sin \beta \cos \psi \cos \gamma \\
F_1(\delta_\nu, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \dots) &= 0 \\
F_2(\delta_\psi, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \psi, \dot{\psi}, \ddot{\psi}, \dots) &= 0 \\
F_3(\delta_\varphi, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, \dots) &= 0 \\
h &= \sqrt{x^2 + (y+R)^2 + z^2} - R \\
m &= m_0 - mt
\end{aligned} \tag{1.1}$$

式中  $v$  —— 飞行速度  $\alpha$  —— 迎角  $\beta$  —— 侧滑角  $q$  —— 动压 (速度头)  
 $S$  —— 飞行器最大横截面  $g$  —— 重力加速度  $R$  —— 地球半径  $r$  —— 地心距  
 $P_e$  —— 有效推力  $m$  —— 飞行器质量  $h$  —— 几何高度  $t$  —— 飞行时间  
 $m = |dm/dt|$  —— 质量秒消耗  $C_x, C_y, C_z$  —— 阻力、升力、侧力系数  
 $M_{x_1}, M_{y_1}, M_{z_1}$  —— 滚动、偏航、俯仰力矩  $\theta, \sigma, \nu$  —— 速度倾角、航迹偏航角、倾斜角

$\varphi, \psi, \gamma$ ——弹体俯仰角、偏航角、滚动角  $x, y, z$ ——质心对发射坐标系的坐标  
 $\delta_\varphi, \delta_\psi, \delta_\gamma$ ——俯仰、偏航、滚动通道的等效舵偏角  $\omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}$ ——飞行器转动角速度在  $x_1, y_1, z_1$  轴上的投影  $I_{x_1}, I_{y_1}, I_{z_1}$ ——飞行器绕  $x_1, y_1, z_1$  轴的转动惯量

上述20个方程，有20个未知量： $v, x, y, z, h, \theta, \sigma, \nu, \varphi, \psi, \gamma, \alpha, \beta, \omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}, \delta_\nu, \delta_\varphi, \delta_\psi, m$ 。说明它是封闭的，当给出微分方程的初始条件，它可以进行数值积分得到一条弹道，但实际数值积分时，上述方程的第二、第三方程即力在  $oy_v, oz_v$  上的投影方程是不便于积分的，因为它不是微分方程组的标准形式，左端同时含有两个一次导数项  $\dot{\theta}, \dot{\sigma}$ ，为了真正算出弹道，应该把  $\dot{\theta}, \dot{\sigma}$  分别解出来，这实际上是把力的方程投影到半速度坐标系各轴上去，这一点也是后面线性化飞行器运动方程所必需的。

### 一、在半速度坐标系列写质心运动方程

所谓半速度坐标系也称航迹坐标系，用  $ox_h y_h z_h$  表示。它的原点在质心  $o$ 、 $ox_h$  轴与飞行器质心速度方向重合， $oy_h$  轴位于铅垂面且与  $ox_h$  垂直， $oz_h$  与  $ox_h, oy_h$  组成右手坐标系，它与速度坐标系的关系仅相差一个倾斜角  $\nu$ ，半速度坐标系与地面坐标系仅用二个欧拉角  $\sigma, \theta$  来表示。如图1.1所示

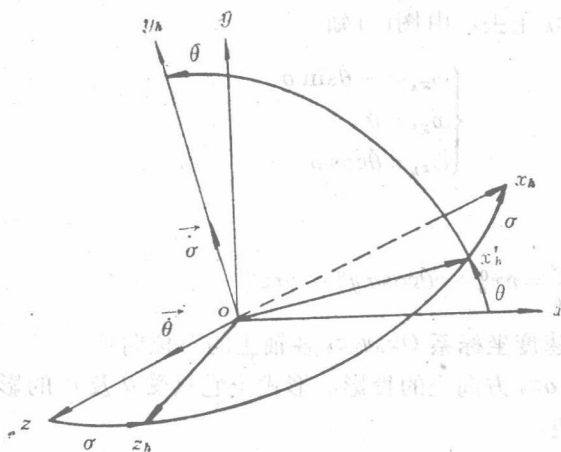


图 1.1 半速度坐标系和地面坐标系的关系

此时速度坐标系  $ox_v y_v z_v$  和半速度坐标系  $ox_h y_h z_h$  之间的转换矩阵为

$$\begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \nu & -\sin \nu \\ 0 & \sin \nu & \cos \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

由弹道学知相对于地面坐标系的质心动力学方程的向量表达式为

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{R} + m\vec{g} + \vec{F}_a + \vec{F}_k - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c \quad (1.3)$$

在讨论飞行器绕质心转动运动时，一般认为地球是一个不旋转的圆球，可以不考虑由旋转引起的哥氏惯性力  $-ma_c$  及牵连惯性力  $-ma_e$ ，而  $\vec{F}_k$  因其本身较小可以忽略，则式(1.3)变成



$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + m\vec{g} + \vec{F}_c + \vec{R} \quad (1.4)$$

为了把向量方程(1.4)投影到半速度坐标系各轴上去, 应把式(1.4)的每一项分别投影到半速度坐标系各轴上去。

### 1. 加速度 $\frac{d\vec{v}}{dt}$ 在半速度坐标系上的投影

把式(1.4)左边投影到半速度坐标系  $Ox_h y_h z_h$  可以得到

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv\vec{x}_h^0}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{x}_h^0 + v\frac{d\vec{x}_h^0}{dt} \quad (1.5)$$

$\vec{x}_h^0$  为速度方向上的单位向量,

$$\frac{d\vec{x}_h^0}{dt} = \vec{\omega}_h \times \vec{x}_h^0$$

其中  $\vec{\omega}_h$  为半速度坐标系  $Ox_h y_h z_h$  相对于地面坐标系的转动角速度, 由图1.1知

$$\vec{\omega}_h = \vec{\theta} + \vec{\sigma}$$

把  $\vec{\omega}_h$  投影到  $Ox_h y_h z_h$  上去, 由图1.1知

$$\begin{cases} \omega_{x_h} = -\dot{\theta} \sin \sigma \\ \omega_{y_h} = \dot{\sigma} \\ \omega_{z_h} = \dot{\theta} \cos \sigma \end{cases} \quad (1.6)$$

代入式(1.5)得

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = v\dot{\vec{x}}_h^0 + v\dot{\theta}\cos\sigma\vec{y}_h^0 - v\dot{\sigma}\vec{z}_h^0 \quad (1.7)$$

而  $\vec{x}_h^0$ 、 $\vec{y}_h^0$ 、 $\vec{z}_h^0$  为半速度坐标系  $Ox_h y_h z_h$  各轴上的单位向量。

所以加速度在  $oy_h$ 、 $oz_h$  方向上的投影, 形式上它只受  $\dot{\theta}$  及  $\dot{\sigma}$  的影响, 这给方程式的积分和线性化带来方便。

### 2. 推力 $\vec{P}$ 在半速度坐标系上的投影

推力在弹体坐标系  $ox_1$  方向上, 已知在速度坐标系  $ox_v y_v z_v$  上的投影为

$$\begin{cases} P_{x_v} = P \cos \alpha \cos \beta \\ P_{y_v} = P \sin \alpha \\ P_{z_v} = -P \cos \alpha \sin \beta \end{cases} \quad (1.8)$$

则在半速度坐标系上的投影  $P_{x_h}$ 、 $P_{y_h}$ 、 $P_{z_h}$  为

$$\begin{bmatrix} P_{x_h} \\ P_{y_h} \\ P_{z_h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \nu & -\sin \nu \\ 0 & \sin \nu & \cos \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \cos \alpha \cos \beta \\ P \sin \alpha \\ -P \cos \alpha \sin \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \cos \alpha \cos \beta \\ P \sin \alpha \cos \nu + P \cos \alpha \sin \beta \sin \nu \\ P \sin \alpha \sin \nu - P \cos \alpha \sin \beta \cos \nu \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

### 3. 空气动力 $\vec{R}$ 在半速度坐标系的投影

空气动力在速度坐标系的投影

$$\begin{cases} R_{x_v} = -X = -C_x \frac{\rho v^2}{2} S \\ R_{y_v} = Y = C_y \frac{\rho v^2}{2} S \\ R_{z_v} = Z = C_z \frac{\rho v^2}{2} S \end{cases}$$

则空气动力在半速度坐标系的投影  $R_{x_h}$ ,  $R_{y_h}$ ,  $R_{z_h}$  为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R_{x_h} \\ R_{y_h} \\ R_{z_h} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \nu & -\sin \nu \\ 0 & \sin \nu & \cos \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{x_v} \\ R_{y_v} \\ R_{z_v} \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -C_x \frac{\rho v^2}{2} S \\ C_y \frac{\rho v^2}{2} S \cos \nu - C_z \frac{\rho v^2}{2} S \sin \nu \\ C_x \frac{\rho v^2}{2} S \cos \nu + C_y \frac{\rho v^2}{2} S \sin \nu \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.10)$$

#### 4. 重力 $m\vec{g}$ 在半速度坐标系的投影

根据简化假设重力  $\vec{G} = m\vec{g}$  在地面坐标系  $oy$  方向上, 利用速度坐标系和地面坐标系的关系 (令  $\nu = 0$ ) 就可以得

$$\begin{bmatrix} G_{x_h} \\ G_{y_h} \\ G_{z_h} \end{bmatrix} = -mg \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \sigma \\ \cos \theta \\ \sin \theta \sin \sigma \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

#### 5. 控制力 $\vec{F}_c$ 在半速度坐标系上的投影

控制力  $\vec{F}_c$  因不同的控制类型和不同的配置方式, 其表达式是不一样的, 这点, 在弹道学中已作过分析。这里只讨论等效的情况, 其中起控制作用的两个附加力  $Y_{1c}$  和  $Z_{1c}$  称为控制力, 而另一个附加力  $X_{1c}$  为等效舵偏转引起的阻力损失, 往往与推力合并为有效推力, 即

$$P_e = P - X_{1c}$$

而  $Y_{1c}$ 、 $Z_{1c}$  是在弹体坐标系的  $oy_1$  和  $oz_1$  方向上。

当等效偏转角较小时, 有

$$\begin{cases} Y_{1c} = R' \delta_\varphi \\ Z_{1c} = -R' \delta_\psi \end{cases} \quad (1.12)$$

其中  $R'$  为单位偏转角产生的控制力。

已知控制力在速度坐标系三轴上的投影为

$$\begin{cases} F_{ox_v} = -R' \delta_\varphi \sin \alpha \cos \beta - R' \delta_\psi \sin \beta \\ F_{oy_v} = R' \delta_\varphi \cos \alpha \\ F_{oz_v} = R' \delta_\varphi \sin \alpha \sin \beta - R' \delta_\psi \cos \beta \end{cases} \quad (1.13)$$

故在半速度坐标系  $ox_h y_h z_h$  上的投影  $F_{ox_h}$ 、 $F_{oy_h}$ 、 $F_{oz_h}$  是

$$\begin{bmatrix} F_{ox_h} \\ F_{oy_h} \\ F_{oz_h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \nu & -\sin \nu \\ 0 & \sin \nu & \cos \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{ox_v} \\ F_{oy_v} \\ F_{oz_v} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

展开式(1.14)其表达式很繁, 因控制力本身较小, 一般可近似认为  $Y_{10}$  在  $oy_v$  方向上,  $Z_{10}$  在  $oz_v$  方向上, 即

$$\begin{cases} F_{ox_v} = 0 \\ F_{oy_v} = R' \delta_\varphi \\ F_{oz_v} = -R' \delta_\psi \end{cases} \quad (1.15)$$

则

$$\begin{bmatrix} F_{ox_h} \\ F_{oy_h} \\ F_{oz_h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R' \delta_\varphi \cos \nu + R' \delta_\psi \sin \nu \\ R' \delta_\varphi \sin \nu - R' \delta_\psi \cos \nu \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

所以质心运动方程在半速度坐标系各轴上的投影为

$$\begin{cases} m\dot{v} = P_e \cos \alpha \cos \beta - C_x \frac{\rho v^2}{2} S - mg \sin \theta \cos \sigma \\ m v \dot{\theta} \cos \sigma = P_e (\sin \alpha \cos \nu + \cos \alpha \sin \beta \sin \nu) + C_y \frac{\rho v^2}{2} S \cos \nu - C_z \frac{\rho v^2}{2} S \sin \nu \\ \quad - mg \cos \theta + R' \delta_\varphi \cos \nu + R' \delta_\psi \sin \nu \\ - m v \dot{\sigma} = P_e (\sin \alpha \sin \nu - \cos \alpha \sin \beta \cos \nu) + C_y \frac{\rho v^2}{2} S \sin \nu + C_z \frac{\rho v^2}{2} S \cos \nu \\ \quad - mg \sin \theta \sin \sigma + R' \delta_\varphi \sin \nu - R' \delta_\psi \cos \nu \end{cases} \quad (1.17)$$

方程式(1.17)便是力的方程投影在半速度坐标系的表达式。它也可以这样得到: 首先令方程式(1.1)的前三个方程中的  $z/r$ 、 $x/r$  等于零,  $(R+y)/r=1$ , 设  $Y_{10}$ 、 $Z_{10}$  在  $oy_v$ 、 $oz_v$  方向上, 这时式(1.1)的前三个方程变成如下形式:

$$\begin{cases} m\dot{v} = P_e \cos \alpha \cos \beta - C_x \frac{\rho v^2}{2} S - mg \sin \theta \cos \sigma \\ m v (\dot{\theta} \cos \sigma \cos \nu - \dot{\sigma} \sin \nu) = P_e \sin \alpha + C_y \frac{\rho v^2}{2} S \\ \quad - mg (\sin \theta \sin \sigma \sin \nu + \cos \theta \cos \nu) + R' \delta_\varphi \\ m v (\dot{\sigma} \cos \nu + \dot{\theta} \cos \sigma \sin \nu) = -P_e \cos \alpha \sin \beta + C_z \frac{\rho v^2}{2} S \\ \quad - mg (\sin \theta \sin \sigma \cos \nu - \cos \theta \sin \nu) - R' \delta_\psi \end{cases} \quad (1.18)$$

其次将上式写成矩阵形式后, 两边各乘转换矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \nu & -\sin \nu \\ 0 & \sin \nu & \cos \nu \end{bmatrix}$$

便可以得到方程式(1.17)。这里详细地再推导一次是为了更熟练地掌握建立一般运动方程的方法。

从式(1.17)和(1.18)看出,就左边来讲,投影到半速度坐标系各轴上简单一些,而就力的投影来讲,有些在半速度坐标系简单一些,有些就复杂一些,如空气动力、推力、控制力。

## 二、在弹体坐标系列写质心运动方程

质心运动方程目前已经分别在速度坐标系、半速度坐标系和地面坐标系中列写出来,而在国内外文献中还有把质心运动方程投影到弹体坐标系,这是因为绕质心转动方程一般是投影到弹体坐标系中的各轴上去。为了便于使绕质心转动方程与质心运动方程发生联系,可以统一起来均投影到弹体坐标系各轴上,有时,这会带来方便。甚至有的文献上把力的方程投影到不同的坐标系,例如把力的方程投影到半速度坐标系  $ox_h$ 、 $oy_h$  及弹体坐标系的  $oz_1$  三个方向。

下面我们不加推导地写出在简化条件下力的方程在弹体坐标系的投影。设  $v_{x_1}$ 、 $v_{y_1}$ 、 $v_{z_1}$  为速度在弹体坐标系各轴上的投影,  $\omega_{x_1}$ 、 $\omega_{y_1}$ 、 $\omega_{z_1}$  为弹体坐标系相对于平动坐标系的角速度在弹体坐标系各轴上的投影,则

$$\left\{ \begin{aligned} m \left( \frac{dv_{x_1}}{dt} + \omega_{y_1} v_{z_1} - \omega_{z_1} v_{y_1} \right) &= P_x - C_x \frac{\rho v^2}{2} S \cos \alpha \cos \beta + C_y \frac{\rho v^2}{2} S \sin \alpha \\ &\quad - C_z \frac{\rho v^2}{2} S \cos \alpha \sin \beta - mg \sin \varphi \\ m \left( \frac{dv_{y_1}}{dt} + \omega_{x_1} v_{z_1} - \omega_{z_1} v_{x_1} \right) &= C_x \frac{\rho v^2}{2} S \sin \alpha \cos \beta + C_y \frac{\rho v^2}{2} S \cos \alpha \\ &\quad + C_z \frac{\rho v^2}{2} S \sin \alpha \sin \beta - mg \cos \varphi \cos \gamma + R' \delta \varphi \\ m \left( \frac{dv_{z_1}}{dt} + \omega_{x_1} v_{y_1} - \omega_{y_1} v_{x_1} \right) &= -C_x \frac{\rho v^2}{2} S \sin \beta + C_z \frac{\rho v^2}{2} S \cos \beta \\ &\quad + mg \cos \varphi \cdot \sin \gamma - R' \delta \varphi \end{aligned} \right. \quad (1.19)$$

$$\text{而} \quad v = \sqrt{v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2 + v_{z_1}^2} \quad (1.20)$$

在不同坐标系中列写的质心运动方程具有不同的形式,但本书绕质心转动的动力学方程均是在弹体坐标系中列写,具有相同的形式。相应的还需要补充一些方程,这要根据需要来加以补充。如果质心运动方程在半速度坐标系中列写,其辅助方程同方程式(1.1)中的一样。

## § 1-2 运动稳定性的概念

### 一、干扰力和干扰力矩

上一节列写了飞行器的一般运动方程,如果已知  $\delta_\varphi$ 、 $\delta_\psi$ 、 $\delta_\gamma$  的变化规律,例如其特殊情况令  $\delta_\psi = \delta_\varphi = \delta_\gamma = 0$ , 当已知微分方程的初始条件,通过积分是否可以得到一条弹道呢? 回答是不一定。原因是从弹道学知,影响飞行器运动的因素很多,归纳起来说,

这些因素一方面是飞行器本身的因素，另一方面就是飞行器运动的环境条件。前者如飞行器的几何尺寸、重量、发动机以及控制系统的参数等因素，后者如重力加速度、风、气温、气压等地球物理因素。当给定了上述条件，通过积分运动方程便可以得到一条弹道。如果不唯一确定上述条件，那便不能唯一地确定一条弹道。为了进行弹道计算，唯一地确定一条弹道，应该取一个标准条件，我们称为标准飞行条件。标准飞行条件是取上述影响弹道因素的平均值，概括起来有下列三个方面：

(1) 地理条件。认为地球是半径为  $R$  的圆球，且不考虑地球的旋转，认为重力加速度与质心到地心的距离平方成反比，即

$$g = g_0 \left( \frac{R}{R+h} \right)^2 \quad g_0 = 9.81 \text{ 米/秒}^2$$

(2) 气象条件。认为大气相对于地球是静止的，风速为零，地面气温为  $15^\circ\text{C}$ ，地面气压为

$$P_0 = 10332.3 \text{ 公斤/米}^2$$

(3) 弹道条件。认为飞行器的几何尺寸，空气动力系数，重量，发动机推力和秒流量，控制系统的放大系数，等等，这些参数为实验的平均值。

用这样条件计算的弹道叫标准弹道，也称未扰动弹道、未干扰弹道、理想弹道，其运动参数称为未扰动运动参数，其运动称为未扰动运动。但飞行器在实际飞行中并不完全满足上述条件，作用在飞行器上的力和力矩除了规定的力和力矩外，还会有附加的力和力矩，我们称之为干扰力和干扰力矩。在干扰力和力矩作用下，飞行器的运动参数会发生变化，我们称有干扰作用下的运动称为扰动运动，也称干扰运动或实际运动，其弹道为实际弹道，也称干扰弹道。

由于有干扰存在，运动参数会有变化，而运动参数如何变化是与干扰的种类和运动的稳定与否有关，所以先讨论一下干扰的性质。

干扰就其作用在飞行器上的特点可分成两类：

#### (1) 瞬时干扰（脉冲干扰）

这类干扰是瞬时作用、瞬时消失，或者说短时间作用，很快消失，例如偶然的阵风，发射时的起始扰动，一、二级分离时的干扰，受无线电干扰引起舵的突然偏转等。对这一类干扰我们是研究在干扰作用消失之后，由于干扰作用而引起的恢复运动的运动特性，因而干扰只影响描述这些运动微分方程的初始条件，本书不研究这类干扰如何引起初始条件的改变，这属于专门的课题。

#### (2) 经常干扰

这类干扰作用是经常作用在飞行器上，例如导弹弹体，弹身各段的制造公差、安装误差、发动机的推力偏心、控制系统的误差，以及建立未干扰运动时所略去的力，例如重力由于扁率造成的影响，对弹体而言，也可以把控制系统使舵偏转而产生的控制力矩看成经常干扰。很明显这类干扰不仅对运动的初始条件有影响，而且干扰力和干扰力矩本身也加于运动方程，所以是研究干扰作用下的运动特性。

干扰的存在会引起运动参数对未干扰运动方程所确定的运动参数产生偏差，对某些运动这种影响在整个过程中并不显著，因而干扰运动和未干扰运动所确定的运动参数相

差不多，我们把这种未干扰运动称为稳定的，反之对某一些运动，干扰的影响随时间的增加愈来愈明显，以致无论干扰作用多么小，干扰运动和未干扰运动所确定的运动参数都相差很大，我们称这种未干扰运动是不稳定的。

## 二、运动稳定性概念

上面我们定性地说明了运动的稳定性，它实质上就是在标准飞行条件下计算的弹道，当受到干扰作用，其运动参数的变化，或者说其增量随着飞行时间的增加是减小呢？还是增加？如果是减小的，我们说飞行器的飞行是稳定的，或者说飞行器具有飞行稳定性，反之则说飞行器的飞行是不稳定的，或者说飞行器不具有飞行稳定性。运动的稳定性，或者对飞行器而言飞行的稳定性是一个很重要的问题，这一问题虽然早就有学者研究，但目前有些问题仍然没有彻底解决。

飞行器的运动是通过微分方程来描述的，如前述的飞行器的一般运动方程，虽然它既有微分方程，又有代数方程，但通过变量置换便可以消除代数方程而得到一个微分方程组，这个微分方程组的解便代表了飞行器的运动。

受不同干扰后的运动特性，从数学的观点来看，瞬时干扰是引起微分方程组初值的变化，而经常干扰是微分方程组本身有微小变化。所以初值条件变化或微分方程本身的微小变化对微分方程解的影响，就是干扰对飞行器运动的影响。所以说研究运动的稳定性也就是研究描述这个运动的微分方程组某一解的稳定性的问题。

上面我们定性地说明了运动的稳定性，但不够严格，而且稳定性的定义在不同学科又不全同，所以应给它下一个严格的定义。我们采用的是李雅普诺夫意义下的运动稳定性。

设任意的动力学系统，它的运动可用以下规范形式的微分方程组表示：

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.21)$$

其中 $y_i$ 为与运动有关的参数，对于飞行器的运动来讲，它可以是飞行速度、坐标、迎角、速度倾角等。

动力系统的某一特殊运动，对应于方程组(1.21)未受干扰的特解，以

$$y_i = f_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.22)$$

表示之，以区别于其它受干扰运动，对于瞬时干扰作用下的运动稳定性，李雅普诺夫作如下定义：

“如果对于任意正数 $\varepsilon$ ，无论它多么小，可以找到另一个正数 $\eta(\varepsilon)$ ，使得对于所有受干扰的运动 $y_i = y_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 当其初始时刻 $t=t_0$ 时满足不等式

$$|y_i(t_0) - f_i(t_0)| \leq \eta(\varepsilon) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.23)$$

而在所有 $t > t_0$ 时满足不等式

$$|y_i(t) - f_i(t)| < \varepsilon \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.24)$$

则未受干扰的运动对于量 $y_i$ 是稳定的”

未受干扰运动如果不是稳定的，则称为运动不稳定，由此可知如果存在有任何固定的数 $\varepsilon$ ，而在任何无论多么小的 $\eta$ ，即使只有一种受干扰的运动，它满足不等式(1.23)，但在某一时刻不等式(1.24)中即使只有一个变成等式，那么运动就是不稳定的。

为了研究运动的稳定性,最好将方程组(1.21)变换到新坐标

$$x_i = y_i(t) - f_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.25)$$

其中 $x_i$ 是参数的增量,它表示扰动运动和未扰动运动在同一时刻对应参数的增量。

将式(1.25)代入式(1.21),则方程组(1.21)变为

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = & Y_i(t, x_1 + f_1, x_2 + f_2, \dots, x_n + f_n) \\ & - Y_i(t, f_1, f_2, \dots, f_n) \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (1.26)$$

称方程组(1.26)为干扰运动的微分方程组,受干扰后的每一运动对应于方程组(1.26)一个特解,特别是未干扰运动显然应该对应于零解

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

所以对于干扰运动的微分方程,其零解对应于未受干扰的运动,对于这个零解的稳定性也就是未干扰运动的稳定性,这一点在以后的讨论中常用到。

相应的式(1.23)、(1.24)变成

$$|x_i(t_0)| \leq \eta(\varepsilon) \quad (1.27)$$

$$|x_i(t)| < \varepsilon \quad (1.28)$$

因而稳定性的定义可以改为:

“如果对于任何正数 $\varepsilon$ ,无论它多么小,总可以选择另一正数 $\eta(\varepsilon)$ ,使得对于所有受干扰运动,当其初始条件满足式(1.27),而在所有 $t > t_0$ 时满足不等式(1.28)则未受干扰的运动是稳定的”

如果未受干扰的运动是稳定的,并且数 $\eta$ 可以选择得如此之小,使对于所有满足不等式

$$|x_i(t_0)| = |y_i(t_0) - f_i(t_0)| \leq \eta$$

的干扰运动满足条件

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$$

则未受干扰的运动称为渐近稳定。

上述稳定性定义若用状态向量、状态方程来叙述要简单和明了得多。

设  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

则方程组(1.26)可以改写成

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (1.29)$$

其中 $x$ 为 $n$ 维向量, $f(x, t)$ 为 $n$ 维向量函数,式(1.29)为系统的状态方程,根据前面假设 $x=0$ 为系统的平衡状态,其解对应于未干扰运动。这时稳定性的定义如下:

“若对任意给定的小数 $\varepsilon > 0$ ,可以找到另一正数 $\eta(\varepsilon)$ ,使得一切满足 $\|x(0)\| \leq \eta(\varepsilon)$ 的系统响应 $x(t)$ ,在所有的时间内满足 $\|x(t)\| < \varepsilon$ ,则称系统的平衡状态 $x=0$ 是稳定的。”

上述定义的几何解释如下,若所有的初始扰动都包括在状态空间中半径为 $\eta(\varepsilon)$ 的超球域( $n$ 维球域)内,即

$$\|x(0)\| = \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2(0) \right]^{\frac{1}{2}} \leq \eta(\varepsilon)$$

当 $\eta(\varepsilon)$ 选择得足够小时,则由初始扰动引起的系统响应在所有时间内包含在另一个超球域中,即

$$\|x(t)\| = \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2(t) \right]^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

在二维情况下示意图如图 1.2 所示。这时渐近稳定性的定义如下:“若系统是稳定的,且任何起点靠近平衡状态的响应,在时间趋于无穷大时,都收敛于平衡状态,换句话说,设有一实常数 $\eta(t_0) > 0$ ,对每个实数 $\mu > 0$ ,对应着一个时间 $T$ ,当 $\|x_0\| \leq \eta(t_0)$ 时,对于所有的 $t > t_0 + T$ 都有 $\|x(t)\| \leq \mu$ 成立,则系统的平衡状态是渐近稳定的。”

图 1.3 表示渐近稳定的含义。

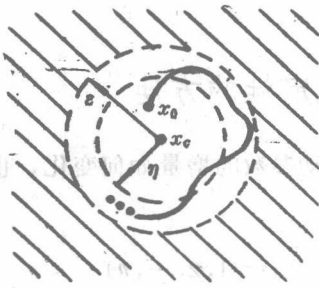


图 1.2 系统稳定性的几何解释

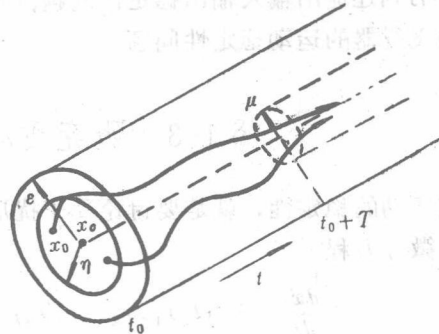


图 1.3 系统的渐近稳定性

前面叙述的李雅普诺夫的稳定性定义是考察未干扰运动对初始条件的稳定,物理上表示的是对于瞬时干扰的稳定性。实际上动力学系统还常常受到某一些力和力矩的经常作用,而在建立方程时要完全考虑它们,实际上又不可能,所以常把这些量当作干扰量来处理,因此研究运动对这种经常作用的干扰的稳定性也是重要的,从数学观点来看,这就表示不但要考虑初始条件的扰动,而且还必须考虑运动方程本身的扰动,也即是要研究经常干扰作用下的稳定性。本书不研究关于经常干扰作用下的稳定性,以后不加说明提到的运动稳定性即短促干扰作用下的稳定性。对短促干扰作用下的稳定性的严格的解析定义,可以用下述定义来代替:“当作用在飞行器上的瞬时干扰消失后,由于干扰而引起的运动参数的增量随时间的增加而逐渐衰减。”

上面我们讨论了李雅普诺夫定义的运动稳定性,即研究 $t \rightarrow \infty$ 时系统的渐近性能,但这一定义并不完全适合所有的运动,例如飞行器的飞行时间有限, $t$ 趋于无穷大并不完全符合实际情况,为了适应这种需要,有人提出有限时间内的稳定性。

设系统的微分方程组如下:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad 0 \leq t < \infty \quad (1.30)$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,  $A(t)$ 为一矩阵,如果有三个常数 $\varepsilon$ 、 $\delta$ 和 $T$ ,其中 $T$ 是系统工作的时间,若系统的初始扰动满足限制条件



$$\|x_0\| \leq \delta \quad (1.31)$$

且对时间区间  $[t_0, t_0 + T]$  内的任何  $t$  都有

$$\|x(t)\| \leq \varepsilon \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T$$

则说系统对给定的一对数  $\delta$  和  $\varepsilon$  在  $T$  时间内稳定。

相应地有些定理可用来判定有限时间内运动稳定性问题，有兴趣的读者可参考有关文献。

在飞行器的飞行稳定性中，人们从实际情况出发，提出一部分变量的稳定性更合适，例如控制飞行器角运动时，一般对扰动运动中飞行速度变化并不感兴趣，而仅注意迎角  $\alpha$  的稳定性问题，有些情况对坐标  $x$ 、 $y$  的稳定性不要求，也可能有的参数是渐近稳定的，有的参数仅是稳定，但不是渐近稳定的，这点以后会经常遇到。

除上述经常干扰作用下飞行器的运动稳定性、飞行器在有限时间内的运动稳定性外，有的书刊还提出输入输出稳定性问题。本书只讨论在短促干扰作用下，李雅普诺夫意义下的飞行器的运动稳定性问题。

### § 1-3 研究运动稳定性的方法

研究运动的稳定性，就是要讨论受干扰后运动参数的增量如何变化，也就是要解干扰运动的微分方程

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.32)$$

方程式(1.32)可能是非线性的微分方程组，也可能是线性微分方程组，而线性微分方程组又细分为变系数线性微分方程组和常系数线性微分方程组，所以先要讨论一下动力学系统的分类，如果微分方程的每项中最多只包含有未知函数或者未知函数各阶时间导数的一次方幂，而不包括未知函数和它的各阶时间导数的高次方幂，也不包括这些函数的乘积，这类方程称为线性微分方程，而把它描述的系统称为线性系统，反之我们就称为非线性微分方程，它描述的系统称为非线性系统。而线性系统又可以分为常系数线性系统和变系数线性系统两类，前者是指描述系统状态的线性微分方程的每一项系数都是常数，后者指这些系数不全是常数，有些是时间  $t$  的函数。从各类微分方程的解的特性来看，以上的分类方法是合理的，因为每个系统运动状态的特性和描述这个系统的微分方程的类型有密切关系。

关于非线性系统、变系数线性系统和常系数线性系统的特点在自动控制原理书中已讨论过，这里不重复，只是指出一点，除了常系数线性微分方程组可以求得解析解外，其他的情况一般得不到解析解，要得到解只有借助数值积分来求得数值解。

为了解决运动稳定性问题，除了上述的无论是用数值积分的方法，还是用解析解的方法，归根结底是根据受干扰后的运动特点来判断运动是否稳定的方法外，是否还有其他方法来判断运动是否稳定呢？李雅普诺夫最早回答了这个问题，他把根据受干扰后运动解的性质来判断未扰动运动是否稳定的方法称为判别稳定性的第一种方法，也称间接方法。而把他提出来的不要求干扰运动方程的解，而是把问题归结于是否能找到满