张量分析与连续介质力学

〔美〕W.弗留盖

白　铮译

中国建筑工业出版社

张量分析与连续介质力学

[美] W.弗留盖

白 铮 译

中国建筑工业出版社

本书深入浅出地介绍了普遍张量分析的有关要点，不着重严格的数学论证和推导，而着重张量在连续介质力学中的应用，例如，应力和应变概念、粘性流和渗流的规律、以及弹性理论等有关张量的应用问题。

书中强调了数学与力学的结合，注意用图示加强直观性，并采用最新符号，每章附有习题。最后分别将张量公式及特殊座标公式汇总各成一章，以便查找。只要具备矢量分析的基础知识，对本书是不难理解和接受的。

本书可供学习和研究工程力学及工程设计的技术人员、科研工作者、大学高年级学生以及研究生参考。

TENSOR ANALYSIS AND
CONTINUUM MECHANICS
Wilhelm Flugge
Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1972

* * *

张量分析与连续介质力学
白 铮 译
*
中国建筑工业出版社出版（北京西郊百万庄）
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
中国建筑工业出版社印刷厂印刷（北京阜外南礼士路）
*
开本：850×1168毫米1/32 印张：7 3/8 字数：197 千字
1980年9月第一版 1980年9月第一次印刷
印数：1—7,640 册 定价：0.71元
统一书号：15040·3703

序

几个世纪以来，数学和力学之间的相互作用是十分活跃的。一方面，力学利用数学，把一些基本定律表述成公式，同时把数学应用到大量问题上，以便对某些力学作用的结果作出定量的预测。另一方面，力学的需要也促进了数学理论的发展。由于牛顿动力学的需要产生了微积分；为了对力系的描述而发展了矢量代数；对速度场和力场的研究发展了矢量分析；从力学的能量原理中产生了变分法。

近来，张量理论吸引了力学工作者的注意。张量这个名字本身就表明它的来源是弹性理论。在弹性理论这个领域里，很长时间之中，张量是用得很少的；但在近十年中，人们普遍认识到它在连续介质力学中的用途。我国（指美国——译者）的大学教材已经"矢量化"（比欧洲差不多落后半个世纪），研究连续介质力学各方面的书应用了张量，真好比如鱼得水。但由于很多作者对他们的读者是否充分熟悉张量没有什么把握，所以他们或者增加一章有关张量的内容，或者就单独写一本论述张量的书。在这一过程中，张量分析也经历了显著的变化，特别是在名词和术语方面的变化；与此同时，在重点方面有所转移；张量分析与吉布斯(Gibbs)型矢量（"黑体矢量"）之间的互相联系也建立起来了。

近代许多连续介质力学的书籍中，使用张量的程度只不过是在写方程时把笛卡尔张量符号用作一种方便的速记记号。这样使用张量是比较无害的。实际上，普遍的非笛卡尔张量是一种锐敏得多的思想工具；正如其它的锐利工具一样，它可以是非常有益的，也可以是非常危险的，这要取决于它是怎样使用的。在张量符号的后面，可能隐藏着很多毫无意义的东西，但是它也可能对一个困难问题，给以新的启发。新一代的工程师对张量学习和理

解得越透彻，使用得越广泛，张量的用处将越大。

本书是根据作者为研究生讲授的张量分析在力学中的应用这样一门课程的讲义编写的。书中每提出一个数学概念，就立即采用力学术语来表达，并指出它在连续介质中的应用。因此，书中将数学章节和力学章节交替安排。其目的在于能使高深的理论通俗化，从而帮助工程师们用他们熟悉的东西去理解抽象的思想创造。

要想掌握一门数学工具，不是单靠读书就能办到的，而必须实践。为了使读者进行一些初步的实践，多数章节中都附有习题。解决这些习题将鼓舞读者进一步提高，并应用所学到的知识去解决自己的问题。这正是作者几十年以前所做过的。当时，作者最初面临的是要穿越那个时代有关张量书籍的丛林去掌握张量方法。

作　者

目　　录

第一章　矢 量 和 张 量

本书假定读者已熟悉用箭头表示矢量、矢量的加法和矢量的分解，也就是假定读者已熟悉矢量平行四边形法则及其推广到三维的情况；同时还假定读者已熟悉点乘和后面(第38页)的矢积。书中把服从这类特殊代数运算的矢量叫做吉布斯（Gibbs）型矢量，并用黑体字母表示。

在本节和下面各节中，读者将学习描述同样一些物理量的完全不同的方法，这种方法叫做张量代数。这两种不同的表述法各有其利弊。吉布斯型矢量代数不依赖于座标系，直观性强，易于采用图解法；而张量代数则离不开座标系，抽象，非常形式化，这就使物理问题的张量表示法在处理简单问题时显得不方便。然而对过于复杂、不能直观化的问题，张量却成为一种有力的工具。吉布斯表述法能推广到比矢量更复杂的物理量（惯性矩、应力、应变），但是这种推广相当麻烦，很少使用。而另一方面，在张量代数中，矢量是作为更普遍的概念的一种特殊情况出现的，这种更普遍的概念包括应力张量和应变张量，并且容易推广到超出应力、应变张量的范围。

1-1　点积（Dot Product）、矢量的分量

在笛卡尔座标系 x、y、z 中（图 1-1），可以定义一个由沿座标轴的单位矢量 $\mathbf{i}_x$、$\mathbf{i}_y$、$\mathbf{i}_z$ 组成的参照标架，并利用这个参照标架，将力矢量 $\mathbf{P}$ 表示为：

$$\mathbf{P}=P_x\mathbf{i}_x+P_y\mathbf{i}_y+P_z\mathbf{i}_z, \tag{1-1a}$$

位移矢量 $\mathbf{u}$ 表示为：

$$\mathbf{u}=u_x\mathbf{i}_x+u_y\mathbf{i}_y+u_z\mathbf{i}_z。 \tag{1-1b}$$

这些公式包含了大家熟知的将矢量按平行四边形法则相加的定义。

在力学中，把产生位移u时力P所做的功W，定义为P和u这两个矢量的绝对值P、u与它们之间的夹角β的余弦的积：

$$W=Pu\cos\beta。$$

这个式子可以解释为P乘上u在P方向的投影，也可以解释为u乘上P在u方向的投影。通常把它写作两个矢量的点积❶：

$$W=\mathbf{P}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{P}=Pu\cos\beta。\qquad(1\text{-}2)$$

这个方程式是点积的定义，适用于任何两个矢量。由于矢量$\mathbf{u}=\mathbf{v}+\mathbf{w}$在P方向的投影等于v和w的投影之和，显然，点积服从分配律：

$$\mathbf{P}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{P}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{P}\cdot\mathbf{w}。$$

因任一单位矢量$\mathbf{i}_x$、$\mathbf{i}_y$、$\mathbf{i}_z$自身的点积，由于（1-2）式中的β角为0，而有

$$\mathbf{i}_x\cdot\mathbf{i}_x=\mathbf{i}_y\cdot\mathbf{i}_y=\mathbf{i}_z\cdot\mathbf{i}_z=1。$$

另一方面，如果两个不同的单位矢量互相点乘，则由于它们成直

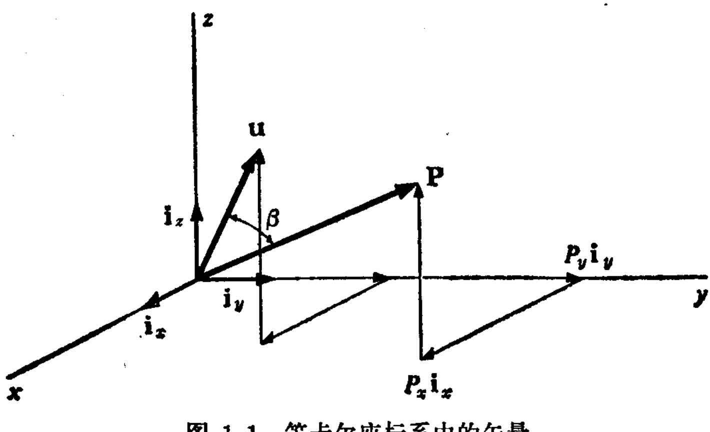

图 1-1 笛卡尔座标系中的矢量

---

❶ 在通用高等数学中，叫做标积或数量积。但如果两个相乘之量不是矢量，（譬如张量），乘得的结果不是标量（可能是矢量或张量），则采用点积这个名称就更恰当。——译者

角，$\cos\beta = 0$，因此

$$\mathbf{i}_x \cdot \mathbf{i}_y = \mathbf{i}_y \cdot \mathbf{i}_z = \mathbf{i}_z \cdot \mathbf{i}_x = 0\text{。}$$

如果用下式引进克罗内克尔（Kronecker）记号δ_{mn}：

$$\begin{aligned} &m = n\text{时，}\delta_{mn} = 1, \\ &m \neq n\text{时，}\delta_{mn} = 0, \end{aligned} \tag{1-3}$$

那末，上面的三个关系式就可以合并成一个式子：

$$\mathbf{i}_m \cdot \mathbf{i}_n = \delta_{mn}\text{，其中}m\text{、}n = x\text{、}y\text{、}z\text{。} \tag{1-4}$$

现在写出（1-1a）和（1-1b）两式右端的点积

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{u} = (P_x \mathbf{i}_x + P_y \mathbf{i}_y + P_z \mathbf{i}_z) \cdot (u_x \mathbf{i}_x + u_y \mathbf{i}_y + u_z \mathbf{i}_z)\text{。}$$

当把上式右边的两个和逐项相乘时，就遇到（1-4）式中m和n所有可能的组合。根据（1-3）式，九个乘积中只剩下三项，于是就得到熟知的初等矢量代数公式：

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{u} = P_x u_x + P_y u_y + P_z u_z\text{。} \tag{1-5}$$

现在把这种方法在斜角直线座标系中再重复一遍。为了简化论证，只论述二维情况(图 1-2)。首先把功——即力与位移的点积——写成$P_x \mathbf{i}_x$所做的功加上$P_y \mathbf{i}_y$所做的功：

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{u} = W = P_x(u_x + u_y \cos\alpha) + P_y(u_y + u_x \cos\alpha)\text{。} \tag{1-6a}$$

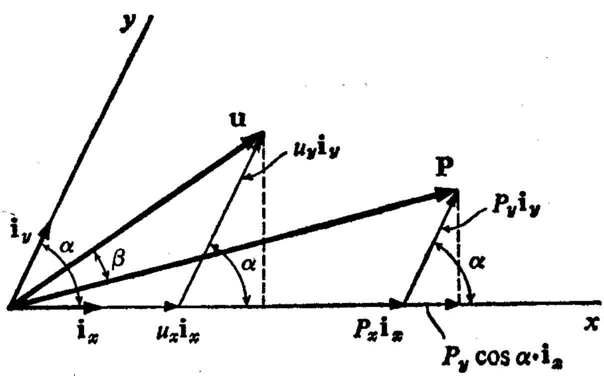

图 1-2　斜角直线座标系中的矢量

然后，把它写成$\mathbf{P}$依次对位移$u_x \mathbf{i}_x$和位移$u_y \mathbf{i}_y$所做的功：

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{u}=W=u_x(P_x+P_y\cos\alpha)+u_y(P_y+P_x\cos\alpha)。$$

(1-6b)

(1-6a)和(1-6b)两式都能写成如下的形式：

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{u}=P_xu_x+P_yu_y+(P_xu_y+P_yu_x)\cos\alpha。$$

这给出了结果，但并未开扩我们的眼界。最好撇开(1-6)式，而考虑我们要处理的是每一矢量的两组不同的分量：

(Ⅰ)通常的分量，譬如P_x、P_y，是以$\mathbf{P}$为对角线，以两邻边平行于座标轴作成的平行四边形得出的。

(Ⅱ)分量($P_x+P_y\cos\alpha$)和($P_y+P_x\cos\alpha$)，是$\mathbf{P}$在x轴和y轴上的投影。

在仔细考察这些分量之前，先介绍张量理论中的基本记号，本书从现在起将使用这种记号。采用带上标的P^1、P^2来代替分量P_x、P_y，并把这些量叫做矢量$\mathbf{P}$的逆变分量。对于第二组分量，可写成

$$P_x+P_y\cos\alpha=P_1,$$
$$P_y+P_x\cos\alpha=P_2,$$

并称为$\mathbf{P}$的协变分量。P^n是通常意义下的矢量分量。用单位矢量$\mathbf{i}_x=\mathbf{i}_1$和$\mathbf{i}_y=\mathbf{i}_2$乘它们，并将各乘积加起来，就得到矢量$\mathbf{P}$：

$$\mathbf{P}=P^1\mathbf{i}_1+P^2\mathbf{i}_2=\Sigma P^n\mathbf{i}_n。\qquad(1\text{-}7a)$$

如果象图1-3所示那样来解释协变分量，那它们也能用类似的方法相加。图1-3除轴1和轴2之外还包括另外两个轴，它们分别与轴1和轴2成直角。把$\mathbf{P}$用通常的平行四边形法则投射到这两个轴上，就得到两个分量，其大小为：

$$\frac{P_x+P_y\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{P_1}{\sin\alpha}$$

和

$$\frac{P_y+P_x\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{P_2}{\sin\alpha}。$$

当把它们当作两个矢量时，它们相加，就得到$\mathbf{P}$，用参考矢量$\mathbf{i}^1$、$\mathbf{i}^2$来表示它们($\mathbf{i}^1$、$\mathbf{i}^2$不是单位矢量，其绝对值为$1/\sin\alpha$)，可以写出矢量$\mathbf{P}$的第二种分量表示：

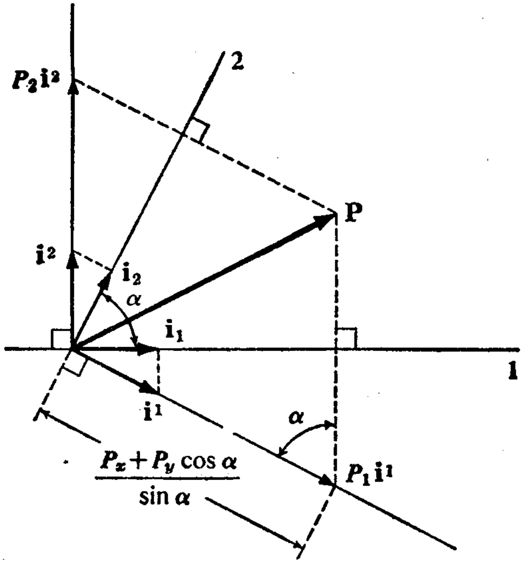

图 1-3　矢量的协变分量和逆变分量

$$\mathbf{P}=P_1\mathbf{i}^1+P_2\mathbf{i}^2=\sum_m P_m\mathbf{i}^m。\qquad (1\text{-}7b)$$

这里阐述的二维的概念不难推广到三维（和多维）的情况。选择任意一组单位矢量 $\mathbf{i}_1$、$\mathbf{i}_2$、$\mathbf{i}_3$，并把它叫做参照标架。然后，把任意一个矢量 $\mathbf{v}$ 用通常的办法沿着这三个单位矢量的方向分解成分量，并把它们写为 $v^n\mathbf{i}_n$，其中 $n=1$、2、3。于是，矢量 $\mathbf{v}$ 就是这三个逆变分量的和：

$$\mathbf{v}=\sum_n v^n\mathbf{i}_n。\qquad (1\text{-}8)$$

接着，选择矢量组 $\mathbf{i}^m$，使它们满足条件：

$$\mathbf{i}^m\cdot\mathbf{i}_n=\delta^m_n,\qquad (1\text{-}9)$$

其中δ^m_n是（1-3）式中定义的克罗内克尔记号 δ_{mn}的另一种写法。（1-9）式定义的每一个矢量$\mathbf{i}^m$与$n\neq m$的诸矢量 $\mathbf{i}_n$成直角，且它的绝对值 $|\mathbf{i}^n|$（即大小)是cos（$\mathbf{i}_n$，$\mathbf{i}^n$）的倒数。现在可以在矢量 $\mathbf{i}^m$的方向把 $\mathbf{v}$ 分解成分量，并写出

$$\mathbf{v}=\sum_m v_m\mathbf{i}^m。\qquad (1\text{-}10)$$

因为一般说来 $|\mathbf{i}^m| \neq 1$，所以协变分量 v_m 并不就是分矢量 $v_m\mathbf{i}^m$ 的绝对值。

考虑任意两个矢量$\mathbf{u}$和$\mathbf{v}$时，可以按（1-8）式把其中的一个分解成逆变分量，而按（1-10）式把另一个分解成协变分量：

$$\mathbf{u}=\sum_n u^n \mathbf{i}_n, \quad \mathbf{v}=\sum_m v_m \mathbf{i}^m 。$$

然后，点乘这两式，得

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\sum_n\sum_m u^n v_m \mathbf{i}_n\cdot\mathbf{i}^m=\sum_n\sum_m u^n v_m \delta_n^m。 \qquad (1\text{-}11)$$

这个二重和包含了 n 和m所有可能的组合，一共九项。然而，只有$n=m$ 的三项使克罗内克尔记号 $\delta_n^m=1$，其它六项都等于零。因此，可以写成，

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\sum_n u^n v_n=u^1v_1+u^2v_2+u^3v_3 。 \qquad (1\text{-}12)$$

这个式子表明，如果对一个矢量采用逆变分量，对另一个矢量采用协变分量，则在斜角直线座标系中，两个矢量点乘的公式也象（1-5）式一样简单。

现在可以最后确定在矢量和张量中应用的记号了。今后，经常会遇到必须对某个指标求和的情况，而这个指标在每一项中出现两次，一次是在一个逆变分量中作为上标，一次是作为一个协变分量的下标。在所有这些情况中都将略去求和符号，而使用下述约定的求和简记法：

无论什么时候，只要同一个拉丁字母（譬如说 n ）在乘积中出现两次，一次作为下标，一次作为上标，则理解为对所有同类项求和（即关于 $n=1$、2、3 求和）。

按此约定的记法，把（1-12）式重新写为：

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=u^n v_n 。 \qquad (1\text{-}13)$$

把（1-11）式重新写为：

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=u^n v_m \mathbf{i}_n\cdot\mathbf{i}^m=u^n v_m \delta_n^m, \qquad (1\text{-}14)$$

在这种情况下，意思是指遍及所有 n 和所有m求和。

由于在这样求得的和的结果中，求和指标不再出现，因此，对于用哪一个字母来作这个指标是无关紧要的，这样的指标叫做

哑指标。必要时，可以在这一方程式中用某个字母作哑指标，而到下一个方程换用另一个字母作哑指标；也可以在同一个方程的左端用某个字母作哑指标，而在它的右端换用另一个字母。这样做常常是必要的，因为必须避免由于对两个和采用同一字母而使约定的求和记法含糊不清。

1-2 基矢量、度量张量（Metric Tensor）

在（1-7a）式中，把单位矢量 $\mathbf{i}_n$ 用作定义逆变分量的基矢量；而在（1-7b）式中，又发现必须选择一种大小不为 1 的矢量 $\mathbf{i}^n$ 作基矢量。为了扩充我们的经验，下面考虑极座标系中的矢量（图1-4），选择线元 $d\mathbf{s}$ 作为待研究的矢量。把单位矢量 $\mathbf{i}_1$、$\mathbf{i}_2$ 定义为沿座标增加的方向，就能写出

$$d\mathbf{s}=\mathbf{i}_1 dr+\mathbf{i}_2 r d\theta。\qquad (1-15)$$

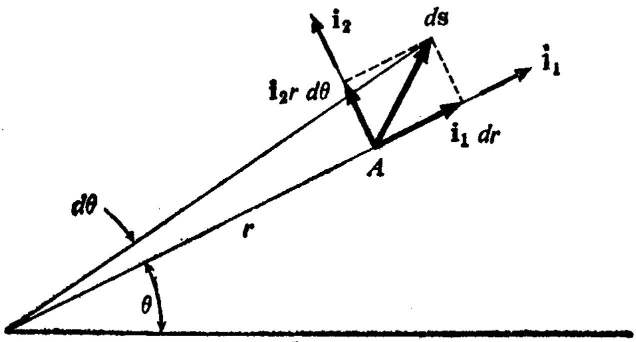

图 1-4 极座标系中的基矢量

在这里和其它地方一样，我们打算把座标的微分看作是线元矢量 $d\mathbf{s}$ 的逆变分量：

$$dr=dx^1,\qquad d\theta=dx^2。$$

这样，就需要用（1-15）式中两个微分的系数

$$\mathbf{g}_1=\mathbf{i}_1,\qquad \mathbf{g}_2=\mathbf{i}_2 r。$$

作为基矢量，而不是用单位矢量作基矢量。我们把它们称为协变

基矢量❶，并把（1-15）或重新写为如下形式：

$$ds = g_1 dx^1 + g_2 dx^2 = g_i dx^i \tag{1-16}$$

尽管 g_1 仍是一个单位矢量，但 g_2 却与单位矢量不同，它的绝对值为 r，甚至还有因次。我们还看到，与直线座标不同，这些基矢量不是常矢量，而是依赖于它们所处的那一点 A 的座标。g_1 和 g_2 的方向依赖于 θ，g_2 的大小依赖于 r。

现在把（1-16）式推广到任意的（可能是曲线的）三维座标系 x^i（$i=1$、2、3）。在任一点 A，选择三个矢量 g_i 的大小和方向，使得线元矢量满足

$$ds = g_i dx^i。 \tag{1-17}$$

然后，考虑从定点 O（也许是座标原点）到点 A 引一个位置矢量 $\mathbf{r}$。线元 ds 就是从这一点到相邻一点的 $\mathbf{r}$ 的增量，即 $ds = d\mathbf{r}$。可以把这一增量写成如下形式：

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} dx^i,$$

式中又一次采用了约定的求和简记法（在分母中以上标代替所要求的下标）。把这个表达式与（1-17）式相比较，就看到

$$g_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}。 \tag{1-18}$$

把（1-17）式或（1-18）式定义的基矢量 g_i 用到位于 A 点的所有矢量。例如，作用在点 A 的力 $\mathbf{P}$ 写成

$$\mathbf{P} = g_i P^i; \tag{1-19}$$

如果 g_i 是无量纲的，象(1-16)式中的 g_1 那样，则对应的分量 P^i 就有着力的量纲，否则，P^i 的量纲就是使它与 g_i 的乘积是一个力。

第二组基矢量 g^j 是用类似于（1-9）式的如下方程式来定义的：

$$g_i \cdot g^j = \delta_i^j。 \tag{1-20}$$

每个矢量 g^j 与所有 $i \neq j$ 的矢量 g_i 成直角，而且它的大小和量纲使它与 g_j 的乘积等于1。这就完全确定了矢量 g^j，我们把这组矢量叫做逆变基矢量。用这组逆变基矢量，可以确定任何矢量 $\mathbf{P}$ 的协

❶ 原书误为逆变基矢量，这里已更正。另外，在全书翻译中根据我们的体会作了一些校正，今后将不一一注出。——译者

变分量P_j:

$$\mathbf{P}=\mathbf{g}^j P_j。 \qquad (1\text{-}21)$$

当把定义（1-19）式和（1-21）式用到任何两个矢量$\mathbf{u}$和$\mathbf{v}$时，由于

$$v_j\delta_i^j=v_i,$$

可以把$\mathbf{u}$和$\mathbf{v}$的点积写为

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=u^i\mathbf{g}_i\cdot v_j\mathbf{g}^j=u^iv_j\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}^j$$
$$=u^iv_j\delta_i^j=u^iv_i。 \qquad (1\text{-}22a)$$

也可以换一种形式，写为

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=u_i\mathbf{g}^i\cdot v^j\mathbf{g}_j=u_iv^j\delta_j^i=u_iv^i。 \qquad (1\text{-}22b)$$

每个矢量都可以分解成协变分量或逆变分量。当把协变基矢量$\mathbf{g}_1$用逆变分量表示时，便得到

$$\mathbf{g}_1=\mathbf{g}_1\cdot 1+\mathbf{g}_2\cdot 0+\mathbf{g}_3\cdot 0,$$

这没有什么新东西。不论$\mathbf{g}_1$的真实大小有多大，在基矢量$\mathbf{g}_i$系统中，它的分量总是（1、0、0）。然而，把一个协变基矢量分解成协变分量时，便导出一组新的重要的量:

$$\mathbf{g}_i=g_{ij}\mathbf{g}^j。 \qquad (1\text{-}23a)$$

这样定义的九个量g_{ij}的总体，叫做**度量张量**，而每个量g_{ij}就是这度量张量的协变分量。在学习张量概念时（见第16页），这个术语的含意就会清楚起来。

对照（1-23a）式，可以把$\mathbf{g}^i$分解成逆变分量

$$\mathbf{g}^i=g^{ij}\mathbf{g}_j, \qquad (1\text{-}23b)$$

这样我们就定义了度量张量的逆变分量。

现在来考虑同一组基矢量的点积:

$$\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}_j=g_{ik}\mathbf{g}^k\cdot\mathbf{g}_j=g_{ik}\delta_j^k=g_{ij} \qquad (1\text{-}24a)$$

或者

$$\mathbf{g}^i\cdot\mathbf{g}^j=g^{ik}\mathbf{g}_k\cdot\mathbf{g}^j=g^{ik}\delta_k^j=g^{ij}。 \qquad (1\text{-}24b)$$

由于点积中的两个因子可以交换，因而就有

$$g_{ij}=g_{ji}, \qquad g^{ij}=g^{ji}。 \qquad (1\text{-}25)$$

（1-24）式可用作g_{ij}和g_{ji}的定义。如果这样做，则（1-23）式

必须由（1-24）式导出。用下面的办法可以做到这点。试令

$$\mathbf{g}_i=a_{ij}\mathbf{g}^j,$$

并用$\mathbf{g}_k$点乘这个方程式的两边，就给出

$$\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}_k=a_{ij}\mathbf{g}^j\cdot\mathbf{g}_k=a_{ij}\delta^j_k=a_{ik},$$

而后根据（1-24a）式，

$$a_{ik}=g_{ik}。$$

其次，考虑两组不同基矢量的积。从（1-20）式知道$\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}^j=\delta^j_i$；另一方面，我们有

$$\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}^j=g_{ik}\mathbf{g}^k\cdot g^{jl}\mathbf{g}_l=g_{ik}g^{jl}\delta^k_l=g_{ik}g^{jk}。$$

比较这两种写法，就得到

$$g_{ik}g^{jk}=\delta^j_i。\qquad（1-26）$$

对于一个固定的j值和$i=1、2、3$，（1-26）式给出如下三个分量方程：

$$g_{11}g^{j1}+g_{12}g^{j2}+g_{13}g^{j3}=\delta^j_1,$$
$$g_{21}g^{j1}+g_{22}g^{j2}+g_{23}g^{j3}=\delta^j_2,$$
$$g_{31}g^{j1}+g_{32}g^{j2}+g_{33}g^{j3}=\delta^j_3,$$

如果g_{ik}已知，则对于$k=1$、2、3，可以从此方程组解出g^{jk}，反之，（1-26）式也可以用来从已知的g^{jk}计算g_{ik}。

作为探讨g_{ij}性质的最后一步，象在（1-17）式中一样，考虑线元矢量$d\mathbf{s}$，并用$d\mathbf{s}$自己点乘$d\mathbf{s}$：

$$d\mathbf{s}\cdot d\mathbf{s}=\mathbf{g}_i dx^i\cdot\mathbf{g}_j dx^j=g_{ij}dx^i dx^j。\qquad（1-27）$$

（1-27）式常常用来推导以座标表示g_{ij}的表达式。它的左边是线元ds的平方，通常容易把它表为座标微分dx^i的二次型，其系数即g_{ij}。当然，在这个二次型中，dx^1dx^2和dx^2dx^1的系数之间（也就是g_{12}和g_{21}间）不可能区分开；但根据（1-25）式，也用不着把它们加以区别，因为g_{12}和g_{21}，每一个都是这两个微分dx^1、dx^2之积的总系数的一半。一旦求得g_{ij}，就能用（1-26）式计算出g^{ij}。

利用g_{ij}和g^{ij}，可以把一个矢量的逆变分量用协变分量表示出来，也可以把它的协变分量用逆变分量表示出来。取任一矢量