

导数与微分

李长明

贵州人民出版社

微积分教期限表

导 注意按照期限归还图书
电 话：微分

李 长 明

贵州人民出版社

(中) 常用数学符号表

责任编辑 何伊德

封面设计 李华年

技术设计 荀新馨

导数与微分

李长明

贵州人民出版社出版发行

(贵阳市延安中路5号)

贵州新华印刷厂印刷 贵州省新华书店经销

787×1092毫米 32开本 25.75印张 552千字

1987年1月第1版 1987年1月第1次印刷

印数1—2,040

书号7115·856 定价4.95元

不展常常，何之示单个一学新五青学既于盖，面衣一民
御即御，滑小丁时代早新，宋文章各五许本，此因。既要升
而半路出突又，承知南回之顺序，容肉更生出讲，念期本基
基一丁费更善学，点一似于扶。将式麻微想些一物用常中突

实践诚然是科学诞生和发展的原动力，但也不能否认，科学内在的逻辑、它的完善和严密化的要求，也能促进科学向着高、深发展并进而开拓出新的园地。

事实上，当我们回顾数学发展的历史时，不难看出，实践的需要在很多方面都起着主导作用：如几何学起源于田土测量，微积分诞生于力学的摇篮，计算数学的发展依赖于计算机的广泛使用，……；但是，另一方面，理论内在的要求，也常居于首要地位：如现在应用已很普遍，而原以为是空幻缥缈的虚数，最早出现于求解二次方程之中；作为近世代数的基础，十分抽象的群论，萌芽于求解五次方程碰壁之后；在几何上以至整个数学中都具有革新意义的非欧几何，却是长期孕育在企图证明欧氏平行公理的过程之中；……；反过来，这些新兴数学分支的大量运用，又促进了近代科学技术的飞跃发展。

历史的发展有它的复杂性和局限性，然而，教材的编写及课堂教学就没有必要、也不应该重演这种有局限性的过程。一本好的教材、一堂成功之课，都应当把内、外的需要有机地结合在一起，这样，既能深入揭示此门学科的本质和各个问题的来龙去脉，又能激发学生强烈的求知欲和浓厚的学习兴趣，从而体现出科学性、系统性、主动性和积极性等教学原则。特别是学习的主动性和积极性更为可贵，因为在学习的园地里，获得成功的公开秘诀是：积极地独立思考，主动地深思穷究，潜在的智慧就会迸发出创新的火花。

另一方面，鉴于初学者在每学一个单元之后，常常抓不住要领。因此，本书在各章之末，都尽力作了小结，既明确基本概念，指出主要内容和它们之间的联系，又突出数学研究中常用的一些思路和方法。对于后一点，笔者更费了一番功夫，因为近年来，许多著名的科学家、教育家都大声疾呼：

“能力的培养胜于知识的传授”。

这种真知灼见若能在教学中得以普遍的贯彻，教育质量无疑将大大地提高。因此，本书除了处处都注意阐明来源和思路、着重分析和应用以外，在小结里，特别强调数学中某些常用的思路、方法和技巧，为了真正掌握和运用它们，本书不惜多费一点篇幅，精选一些典型且有说服力的实例，使抽象的原则生动地显现出来；同时，还以方法为主线，试图熔初等数学和高等数学于一炉。如此，既明这些方法产生的渊源和发展的脉络，又见其应用的广泛与效力之宏大，这些尝试效果如何，有待广大读者审评。

本书上册《数列与极限》出版后，受到中国科学院数学研究所李培信副研究员的热情鼓励，倘若《数列与极限》中有可取之处，又能在本书得以保持和发扬，首先应该感谢李培信老师的悉心指教；另外，本书初稿完成之后，叶凤常、林敬藩、庞之垣、张国滨、张明义、马文、李虎航几位同志分别看过部分章节，都提过宝贵意见，在此一并表示深切的谢意！

本书初稿早于一九八一年冬写于南宁，三年来虽数易其稿，然限于水平，仍难尽人意，缺点错误在所难免，敬请读者不吝指正！

李长明

一九八四年十二月于贵州教育学院

目 录

第一章 函数的极限

- § 1. 函数在无穷远处的极限..... 2
- 一、问题的引入(2) 二、极限的描述与定义(8) 三、函数的无界与无穷大量(12) 四、依定义求极限之例(15) 五、几个数列极限的推广(19)
- § 2. 函数在 ∞ 处极限的等价定义——序列语言..... 25
- 一、与数列极限的关系(25) 二、函数极限的等价定义(29) 三、柯西准则(30)
- § 3. 函数在有限点处的极限..... 31
- 一、问题的引入(31) 二、极限的描述与定义(37) 三、依定义求极限之例(46)
- § 4. 复合函数的极限..... 51
- 一、复合函数的极限(52) 二、极限在不同处的转化(54) 三、 e 的一般形式(55)
- § 5. 函数极限的序列语言..... 56
- 一、函数极限的等价定义(56) 二、柯西准则(58)
- § 6. 函数极限的基本理论..... 59
- 一、基本性质(60) 二、极限的四则运算(62) 三、不等式的极限与夹值定理(66) 四、一个重要的极限—— $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (67)
- § 7. 无穷小量..... 71
- 一、研究无穷小量的重要性(71) 二、无穷小分析(82) 三、等价无穷小(85) 四、无穷小量的主部(87)

§ 8. 函数极限的各种求法.....88

- 一、直接利用极限定义(88)
- 二、运用极限的四则运算(92)
- 三、分解因式以消去趋于零的公因式(94)
- 四、有理化后约去趋于零的公因式(99)
- 五、重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 的运用(101)
- 六、重要极限 e 的运用(104)
- 七、夹值定理的应用(110)
- 八、等价无穷小的代换(114)
- 九、函数连续性的利用(118)
- 十、中值定理的应用(118)
- 十一、洛彼塔法则(118)
- 十二、泰勒级数的利用(118)

本章小结.....118

- 一、基本概念(118)
- 二、主要内容(120)
- 三、常用方法(122)1. ϵ - σ 方法(122)
- 2. 转化法(125)

习题.....129

第二章 连续函数及其性质

§ 1. 连续与间断的意义134

- 一、区分连续与间断的重要性(134)
- 二、连续与间断的定义(142)
- 三、连续与极限的异同(147)

§ 2. 初等函数的连续性148

- 一、连续函数与四则运算(149)
- 二、单调函数的连续之判定(149)
- 三、几类初等函数的连续性(154)
- 四、复合函数的连续性(155)

§ 3. 间断的类型及其例159

- 一、可去间断点(159)
- 二、广义可去间断点(无穷间断点)(160)
- 三、单方连续的间断点——跳跃性的间断点(163)
- 四、无任何极限的间断点——振荡间断点(166)
- 五、杂例(167)

§ 4. 连续函数的性质175

- 一、收敛子数列的存在性(175)
- 二、连续函数的基本性质 I——有界性(176)
- 三、连续函数的基本性质 II——确界可达性(181)
- 四、连续函数的基本性质 III——介值性(186)

§ 5. 应用191

- 一、根的存在与唯一(191)
- 二、拉格朗日定理(195)
- 三、二分法——

根的逐次逼近法之一(200) 四、一维的不动点原理(202) (根的逐次逼近法之二)(208) 五、媒介作用(213) 六、反函数的连续性(218)

本章小结.....220

一、基本概念(220) 二、主要内容与体系(221) 三、常用方法——归谬法与举反例(222) 1. 归谬法(222) 2. 举反例(226) 1) 找特殊、走极端(227) 2) 利用直观(236) 3) 借鉴和改造(242)

习题.....244

第三章 一致性

§ 1. 函数的一致连续250

一、问题的引入(250) 二、一致连续的定义(254) 三、一致连续的性质(258) 四、一致连续的判定(260)

§ 2. 函数列的一致收敛265

一、问题的引入(265) 二、一致收敛的定义(269) 三、一致收敛的性质(271) 四、一致收敛的判定(282)

§ 3. 函数列的一致有界288

一、问题的引入(288) 二、一致有界的定义(289) 三、一致有界的性质(289)

§ 4. 普遍的一致性296

一、记号与术语(296) 二、一致性的普遍定义(298)

§ 5. 等度连续性298

一、问题的引入(298) 二、等度连续的性质(299) 三、阿采拉 Arzela定理——收敛子函数列的存在定理(304)

本章小结.....307

一、基本概念(307) 二、主要内容与体系(308) 三、常用方法(308) 1. 抽象化(309) 2. 构造性证法(311) i) 逐步逼近(312) ii) 几何启示(313)

习题.....315

第四章 导数及其应用

§ 1. 导数的意义320

一、导数的来源(320) 二、瞬变与均变(326) 三、导数的定义(329) 四、几何意义(332) 五、导数的基本性质(333) 六、几个基本初等函数的导数(334)

§ 2. 求导法则337

一、复合函数的导数(338) 二、导数的四则运算(340) 三、初等函数的导数(342) 四、运用求导法则的几点注意(347) 五、隐函数的求导法则(351) 六、高阶导数的求法(354)

§ 3. 不可导的类型及其例360

一、有单边导数的情况(361) 二、无单边导数的情形(366) 三、导数存在但导函数不连续(369) 四、孤立可导点(376)

§ 4. 处处不可导的连续函数378

一、构造的思路和步骤(378) 二、意义与简史(385)

§ 5. 单调性与不等式393

一、函数的单调性(394) 二、一元不等式(396) 三、二元不等式(401) 四、多元(三元以上)不等式(412)

§ 6. 凸性与密切圆415

一、凸函数的引入(415) 二、凸函数的定义(418) 三、凸函数的判定(421) 四、琴生不等式及其应用(425) 五、曲率与密切圆(429)

§ 7. 极值问题437

一、研究极值的重要性(437) 二、极值的意义(439) 三、极值的判定(442) 四、极值和最大、最小的求法(445) 五、应用之例(445)

§ 8. 洛彼塔法则 I470

§ 9. 导数在代数中的应用473

一、求和问题(473) 二、切线法(牛顿法)——根的逐步逼近法之三(479) 三、根的判定(481)

本章小结484

- 一、基本概念(484) 二、主要内容和体系(486) 三、常用方法(486)
 1. 分解法(487) 2. 降维法(492) i) 变量代换(495) ii) 权把变量当常量(496)

习题.....499

第五章 微分、中值定理和泰勒公式

§ 1. 微分510

- 一、微分的引入(510) 二、微分与导数的关系(513) 三、微分法则(514) 四、参数方程的求导法则(515) 五、微分在近似计算中的作用(519)

§ 2. 拉格朗日中值定理521

- 一、中值定理的导出(521) 二、罗尔定理(523) 三、中值定理的改进——拉格朗日中值定理(530) 四、柯西中值定理(532) 五、柯西中值定理的应用(534) 六、柯西中值定理的推广(538) 七、三点附注(539)

§ 3. 中值定理的应用541

- 一、导数恒为零的函数必为常量(542) 二、单调性的判定与不等式的证明(544) 三、在求极限中的应用(548) 四、在级数中的应用(555)

§ 4. 洛彼塔法则564

- 一、洛彼塔法则 2——不定式“ $\frac{0}{0}$ ”的解法(564) 二、洛彼塔法则 1、2 的比较(566) 三、一点技巧(569) 四、洛彼塔法则 3——“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”的定值法(573) 五、其他不定式的求法(581) 六、局限性(585) 七、重根的中值定理(588)

§ 5. 泰勒公式591

- 一、问题的引入(591) 二、泰勒公式的导出(592) 三、泰勒级数(594)

- 四、 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ 与泰勒级数的异同(596) 五、初等函

数的展开之一(598) 六、欧拉公式(603)

§ 6. 双曲函数605

一、双曲函数的引入(605) 二、与三角函数的异同(605) 三、
面积角——角的概念之推广(607) 四、双曲函数的几何意义(613)
五、双曲函数的展开(614)

§ 7. 对数函数及二项式展开614

一、柯西型余项(614) 二、对数函数的展开(618) 三、二项式
展开(619)

§ 8. 泰勒公式和泰勒级数的应用630

一、极值存在的充要条件(631) 二、泰勒级数与高阶导数的求法
(632) 三、利用泰勒公式求极限(633) 四、根的近似求法与误差
估算(637)

§ 9. 多项式的一致逼近649

一、问题的引入(649) 二、多项式的一致逼近(651) 三、伯恩
斯坦多项式(656)

本章小结657

一、基本概念(657) 二、主要内容与体系(659) 三、常用方法(660)1.
特殊化(660) (1)特殊化的意义(660) (2)特殊化与举反例(661)
(3)特殊化运用之例(662) (4)特殊化的功效(670) (5)沟通普遍
与特殊的手段(671) 2.辅助函数的引法(672) (1)意义(672)
(2)作用和引法(672)

习题681

第六章 函数项级数

§ 1. 研究函数项级数的必要性689

一、数项级数的普遍化(689) 二、泰勒展开的捷径(692) 三、构
造函数的工具(693)

§ 2. 敛散性694

一、敛散性的定义(694) 二、敛散判别法(695)

§ 3. 与函数列的关系697

§ 4. 一致收敛性	699
一、一致收敛的重要性(699)	
二、一致收敛的定义(700)	
三、一致收敛的判别法(701)	
四、几点附注(703)	
五、阿贝尔变换(707)	
六、阿贝尔判别法(709)	
七、二项式展开的一致收敛性(711)	
§ 5. 级数和的连续性	712
一、级数和的连续性(712)	
二、二项式展开的补遗(713)	
三、逐项取极限(713)	
§ 6. 级数和的导数	714
一、逐项求导(714)	
二、改进(716)	
三、应用之例(718)	
§ 7. 幂级数	722
一、幂级数的意义(722)	
二、幂级数的特性(723)	
三、收敛域的类型(725)	
四、类型的异同(726)	
五、类型的判定和半径的确定(727)	
§ 8. 幂级数的可导性与泰勒展开	728
一、幂级数的一致收敛性(729)	
二、幂级数的连续性(730)	
三、幂级数的导数(731)	
四、幂级数的泰勒展开(736)	
五、幂级数的唯一性(737)	
六、反正弦、反余弦的展开(738)	
七、反正切、反余切的展开(741)	
§ 9. 幂级数的四则运算与泰勒展开	744
一、级数的和、差(745)	
二、幂级数的可换性(746)	
三、级数的乘积(750)	
四、级数的倒数(753)	
五、级数的商(754)	
六、正、余割的展开(755)	
七、正、余切的展开(756)	
§ 10. 级数的求和	757
一、直接求和法(758)	
(1) 表出 S_n (758)	
(2) 找出 S_n 所满足的方程(759)	
(3) 两边夹(761)	
二、幂级数法(768)	
(1) 逐项求导(769)	
(2) 分解化简(772)	
(3) 组合消元(779)	
本章小结	781
一、基本概念(781)	
二、本章体系一览表(783)	
三、常用方法(784)	
1 组合法(785)	
(1) 组合与分解(785)	
(2) 组合的手段(786)	
i) 精选典型、集腋成裘(787)	
ii) 寻联系、觅规律, 组合本天成(789)	
iii) 着意搭配、组成反例(792)	
iv) 重新巧安排、旧貌换新颜	

(793) v) 分合相济、各显神通(798) 2 普遍化(801) (1) 与特殊化的比较(801) (2) 普遍化的意义(804) (3) 普遍化的功效(805) . i) 适用面广(805) ii) 加深认识(806) (4) 普遍化应用的范围(806)

习题.....807

..... 807

..... 808

..... 809

..... 810

..... 811

..... 812

..... 813

..... 814

..... 815

..... 816

..... 817

..... 818

..... 819

..... 820

..... 821

..... 822

..... 823

..... 824

..... 825

..... 826

..... 827

..... 828

..... 829

..... 830

..... 831

..... 832

..... 833

..... 834

..... 835

..... 836

..... 837

..... 838

..... 839

..... 840

..... 841

..... 842

..... 843

..... 844

..... 845

..... 846

..... 847

..... 848

..... 849

..... 850

..... 851

..... 852

..... 853

..... 854

..... 855

..... 856

..... 857

..... 858

..... 859

..... 860

..... 861

..... 862

..... 863

..... 864

..... 865

..... 866

..... 867

..... 868

..... 869

..... 870

..... 871

..... 872

..... 873

..... 874

..... 875

..... 876

..... 877

..... 878

..... 879

..... 880

..... 881

..... 882

..... 883

..... 884

..... 885

..... 886

..... 887

..... 888

..... 889

..... 890

..... 891

..... 892

..... 893

..... 894

..... 895

..... 896

..... 897

..... 898

..... 899

..... 900

第一章 函数的极限

在上册《数列与极限》中，曾系统地研究了数列的极限，其实，数列只不过是函数的一种特殊形式——自变量是离散变量。对于函数，无论是理论研究中，抑或是解决实际问题时，大量遇到的则是自变量为连续变量的情形。例如在几何中，圆面积是半径的函数，而半径可以取任意的正实数；又如在物理中，运动着的物体，其位移、速度，都是时间的函数，而时间在某个期间内却是连续地改变着。再如，气体的体积也随温度的升降而变化，可温度的改变也是连续地变化着，……，诸如此类，举不胜举。

既然函数是比数列更为普遍的形式，而在《数列与极限》一书中，我们已经看到：极限方法，是研究数列变化状态的有力工具。因此，很有必要把数列的极限推广为函数的极限，以便利用极限方法，深入地研究函数的各种性质。事实上，一些如连续、间断等貌似简单的概念，只有用极限才能正确、严格地表达出来；而微积分中诸如导数、微分、积分等基本概念也都是离不开极限的；至于泛函分析和拓扑学等，则是极限的发展和深化，由此可见：极限理论不但是研究函数的重要工具，而且它的方法，内容和思想也都渗透到近代数学的各个分支。因此，若不深刻地理解和牢固地掌握极限的思想和方法，就难以深入到近代数学的各个领域之中。

本章是在数列极限的基础上，先研究自变量无限增大时

函数相应的极限；然后，再进而讨论，自变量趋于某一定值时，函数相应的极限。

§1. 函数在无穷远处的极限

(一) 问题的引入

1. 实际的需要

① 电磁单位的确定

十九世纪初 (1819年), 丹麦的奥斯特 (Oersted 1777—1851) 发现了电流可使磁针偏转的磁效应, 为深刻揭示电和磁之间的关系开辟了道路。

电流的磁效应是很容易验证的, 只要把一个小磁针放在导线下面, 当导线有电流通过时, 就会看到磁针在电流的作用下必然产生旋转, 这就是运动着的电荷, 在它周围激发出磁场的有力证据。然而, 为了精确地描述这种现象, 还需要确切地算出这类磁场的方向和大小, 为此, 应先定出这种磁场的强度单位。

为简单计, 假定导线为直线段 AB (如图1.1), 通过它的

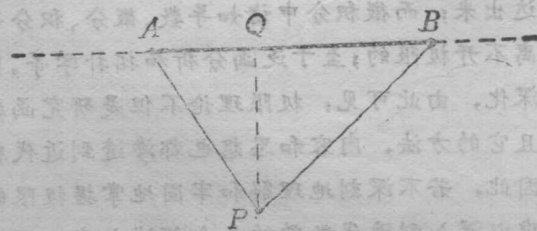


图1.1

电流之强度为 J ，又 P 为它周围的一定点，设 Q 是 AB 上与 P 最近的点，令 $PQ = R$ ， $AQ = l_1$ ， $QB = l_2$ ，则导线 AB 的电流在 P 处所激发的磁场，其总强度 H 通过计算应为

$$H = \frac{J}{R} \left[\frac{l_2}{\sqrt{R^2 + l_1^2}} + \frac{l_1}{\sqrt{R^2 + l_2^2}} \right]$$

当导线两端很长时，两端的电流对 P 点几乎没有影响，这时，不妨设导线为无限长，相应的，总强度 H 的极限为

$$H_0 = \frac{2J}{R}$$

在物理学中，正是以此作为规定磁场强度单位的依据。实际上，取 J 为 1 个绝对电磁单位， R 为 2 厘米时，便将 P 点处的磁场强度定义为 1 个奥斯特。

由此看出：为规定磁场强度的单位，需要解决当 $x \rightarrow \infty$ 时，函数

$$\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

所趋的极限，而在物理学中经常采用的办法是：把有限的长，设想为无限长，以便使计算的结果比较简捷，并因此突出主要的物理内容。由此可见，研究函数 $y = f(x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时的极限有着广泛的实际意义。

② 宇航中的轨道问题

根据牛顿的万有引力定律，可以算出物体挣脱太阳引力的束缚，飞到太阳系以外的宇宙空间去，至少具有 16.7 千米/秒的速度。这个速度叫做逃逸速度，通常也叫第三宇宙速度（第二宇宙速度为 11.2 千米/秒，可以挣脱地球引力的束缚，故也叫脱离速度；第一宇宙速度为 7.9 千米/秒，是物体围绕

地球作匀速圆周运动必需的速度，故也叫环绕速度)。

以第三宇宙速度或大于它的速度，虽然都可挣脱太阳引力的束缚，飞向太阳系以外的宇宙空间去，但它们的轨道却不相同(如图1.2)。等于第三宇宙速度时，轨道是以太阳为焦点的抛物线；而大于第三宇宙速度时，轨道却是以太阳为焦点的一支双曲线。

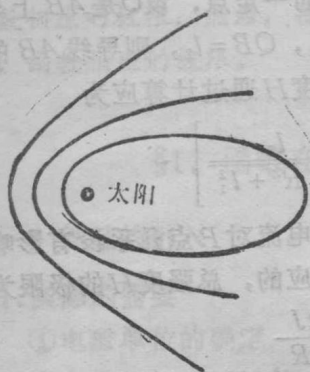


图1.2

粗略地看，抛物线和双曲线的一支也有相似之处。譬如，二者都是凸的，又都无限延伸。但却不能把抛物线与双曲线的一支等同起来，因为二者无限远离的趋势有着重大的差异。事实上，沿一支双曲线无限远离时，存在着一个渐近方向(如图1.3a)，而沿抛物线远离时，却无任何渐近方向(如图1.3b)

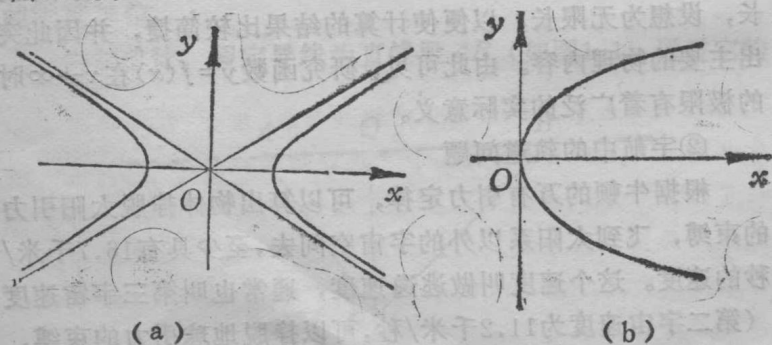


图1.3