

• 中学数理化发展智能丛书 •

# 怎样学好平面解析 几何



周长生 常相舜 编著  
刘 坤 谢长青

127344

中学数理化发展智能丛书

# 怎样学好平面解析几何

刘坤 常相舜 周长生 编著



株机校图书馆



1100053695

41 00100100 0A

河南科学技术出版社

中学数理化发展智能丛书  
怎样学好平面解析几何

刘坤 常相舜 周长生编著

责任编辑 韩家显

河南科学技术出版社出版

北京市门头沟区印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

787×1092毫米 32开本 18.718印张 360千字

1990年2月第1版 1991年5月第2次印刷

印数8,540—12,610

ISBN7-5349-0470-6/G·371

---

定价：6.80元

## 内 容 提 要

在教育科学研究和教学实践的基础上，本书依据部颁《全日制六年制重点中学数学教学大纲（草案）》，对高中平面解析几何从内容、体系到数学思想做了系统而详尽的分析和阐述，同时精选了适量的典型例、习题，并做了多种解法的分析和研讨，是引导读者入门，深刻理解和掌握平面解析几何的思想方法，提高数学能力的一本有用的参考书。

结合讲解数学，教学习方法本书的又一特点，其目的是帮助读者不仅学会数学，而且会学数学。

本书是专为高中学生学习平面解析几何编写的，同时，对自学数学的青年、中学数学教师也是一本较好的参考书。

# 前 言

本书是我们在北京四中从事数学教育科学的研究和教学实践的产物，是为帮助高中同学“学会”、“学好”平面解析几何这门课程编写的。书稿完成后，试教过三遍。

为了在学习这门课程之前，能使同学们对这门课有个大概的了解，首先写了绪论，通过科学史简介把解析几何的基本思想、整体结构以及研读(学习)方法做了扼要的介绍。这对你有准备地、高标准地进入这门课的学习会有很大启发。

本书既注重整体逻辑结构的安排，又注重每个概念、规律、方法的数学思想的深入剖析和阐述(剖析它的来龙去脉，揭示它的实质，指出它在科学体系中的地位和作用)，为的是使你能深刻地理解数学，为灵活运用奠定基础。

本书还安排了一些探索性的内容，为的是启发你去“发现数学”，以培养你研讨数学问题的兴趣和创造才能。书中配有不少典型例、习题，而且对典型的例题做了详尽的分析和多种解法的研讨，书末附有习题的答案或提示。

本书还有一个重要特点：结合讲数学，教学习方法(除了在各节正文中作些必要的渗透外，还在“绪论”和“本章学习指导”中集中作了专题讲解)。你最好在学每一章之

前，先读章末的“本章学习指导”，细心领悟学习方法，并把它运用到学习中去。

在写本书的时候，我们参阅了有关解析几何的多种书籍和教学研究论文，并在教研组内多次进行过研讨，本书中很多好的讲法、资料来自这些书籍、论文和讨论。在此向这些书籍、论文的作者及参加研讨的同志表示衷心的感谢。笔者水平有限，错误和不当在所难免，恳请同志们、同学们不吝指教。

作者于北京四中

1988.2

# 目 录

绪论 ..... ( 1 )

第一章 解析几何学的基础 ..... ( 10 )

## 用坐标表示点的观念

§1-1 直线上的坐标系——数轴 ..... ( 11 )

§1-2 平面上的坐标系——平面直角坐标系 ... ( 22 )

## 用方程表示曲线的观念

§1-3 笛卡儿的想法 ..... ( 40 )

§1-4 曲线与方程的定义 ..... ( 42 )

§1-5 曲线与方程的两个基本问题 ..... ( 47 )

§1-6 本章学习指导 ..... ( 57 )

第二章 对直线的研究 ..... ( 63 )

## 预备知识

§2-1 充要条件 ..... ( 63 )

## 直线的特征性质及方程

§2-2 直线的特征性质 ..... ( 68 )

- §2-3 由直线的特征性质求直线的方程 ..... ( 75 )  
§2-4 由直线的方程画直线 ..... ( 87 )

### 直线的基本问题

- §2-5 两条直线的交点 ..... ( 88 )  
§2-6 两条直线的交角 ..... ( 92 )  
§2-7 两条直线平行、垂直的条件 ..... ( 96 )  
§2-8 点到直线的距离 ..... ( 104 )

### 直线的其他问题

- §2-9 关于直线的对称点 ..... ( 113 )  
§2-10 直线系的概念 ..... ( 119 )  
§2-11 直线系的基本类型 ..... ( 124 )  
§2-12 三线共点的条件 ..... ( 130 )  
§2-13 以直线为边界的平面区域 ..... ( 135 )  
§2-14 本章学习指导 ..... ( 140 )  
复习题一 ..... ( 163 )

## 第三章 对圆的研究 ..... ( 167 )

### 圆的特征性质及方程

- §3-1 圆的特征性质及其方程 ..... ( 167 )  
§3-2 确定圆的条件 ..... ( 172 )



## 圆的基本问题和其他问题

§3-3	圆的位置关系	(181)
§3-4	圆的切线	(187)
§3-5	圆系	(196)
§3-6	平面上以圆为边界的区域	(202)
§3-7	直线与圆的参数方程	(204)
§3-8	本章学习指导	(225)
	复习题二	(248)
<b>第四章</b>	<b>对圆锥三曲线的研究</b>	<b>(252)</b>

### 预备知识

§4-1	由曲线的特征性质求曲线方程的补充	(252)
§4-2	由曲线的方程画曲线	(257)
§4-3	坐标轴的平移	(268)
§4-4	一类重要的轨迹问题	(272)

### 对圆锥三曲线的研究

§4-5	抛物线的方程	(275)
§4-6	抛物线的几何性质及其图形	(277)
§4-7	抛物线的弦、次标准方程和参数方程	(285)
§4-8	椭圆的方程	(295)
§4-9	椭圆的几何性质及其图形	(297)
§4-10	椭圆的弦、次标准方程和参数方程	(311)

- §4-11 双曲线的方程..... (327)
- §4-12 双曲线的几何性质及其图形..... (329)
- §4-13 双曲线的弦、次标准方程和参数方程... (348)

### 圆锥三曲线的切线和光学性质

- §4-14 圆锥曲线的切线的定义及方程..... (357)
- §4-15 圆锥三曲线的光学性质简介..... (378)
- §4-16 本章学习指导..... (382)

复习题三 ..... (398)

## 第五章 坐标变换 ..... (402)

### 坐标系的平移和旋转

- §5-1 利用移轴化简二元二次方程 ..... (403)
- §5-2 坐标轴的旋转 ..... (414)
- §5-3 利用转轴化简二元二次方程 ..... (420)
- §5-4 移轴、转轴中的不变量初探 ..... (427)
- §5-5 二元二次方程化简的小结 ..... (431)
- §5-6 本章学习指导 ..... (437)

## 第六章 极坐标 ..... (439)

- §6-1 极坐标系 ..... (439)
- §6-2 曲线的极坐标方程 ..... (443)
- §6-3 极坐标与直角坐标的互化 ..... (461)
- §6-4 求曲线的极坐标方程的补充 ..... (471)
- §6-5 本章学习指导 ..... (483)

<b>第七章 参数方程的概括与补充</b> .....	(486)
§7-1 已学知识的概括 .....	(486)
§7-2 用参数法求某些曲线的方程 .....	(495)
复习题四 .....	(502)
<b>附录 I 习题答案或提示</b> .....	(506)
<b>附录 I 行列式和线性方程组</b> .....	(524)

要学习一门新学科，最好先对该学科的面貌（基本思想、内容、体系和特点）有一个整体性的认识。好，那就请你先读一读本书的“绪论”吧！

## 绪 论

### 一、解析几何学（又称坐标几何学）的历史简介

17世纪上半叶，世界数学的历史在“常量数学”发展的基础上迅猛地转向了“变量数学”的发展时期。在短短的几十年内，出现了两个巨大的全新的数学分支——解析几何学和微积分学（包括微分法和积分法）。它们的出现，从本质上改变了整个数学的面貌，使当时无法解决的一系列问题一下子变得容易解决了。

变量数学的出现有着深刻的历史背景。16—17世纪，欧洲封建社会开始解体，代之而来的是资本主义的生产方式，生产力大大解放。由于资本主义工场手工业的繁荣和向机器生产的过渡，极大地促进了技术科学和数学的飞速发展。例如，航海方面，为了确定船只的位置需要更加精密的天文观测；军事方面，弹道学成了研究的中心；准确计时仪器的制造，运河的开凿，堤坝的修筑，行星椭圆轨道理论的研究等等，

所有这些新课题都需要关于圆锥曲线各种数据的计算，而自古希腊以来的常量数学方法在处理这些课题时已经显得适用范围过于狭窄、繁琐和力不能及。因此，建立一种具有广泛应用价值而又简便有效的新的数学方法就成了科学技术和数学发展的当务之急。于是，在数学的研究中“变量”和“函数”的概念被引入了。从此数学的历史进入了变量数学时期。常量数学与变量数学的根本区别，在于前者主要是用静止的观点和方法研究事物之间的数量关系和空间形式，而后者却用运动的观点探究事物发展和变化的过程。

变量数学的第一个决定性的步骤是笛卡儿和费尔马建立了解析几何学，紧接着的便是牛顿和莱布尼兹建立了微积分学。

下面介绍笛卡儿(1596—1650)和他的关于解析几何的基本思想。

笛卡儿(Ren'e Descartes)，法国杰出的近代哲学家，近代生物学的奠基人，第一流的物理学家和数学家。青少年时代的笛卡儿就有强烈的求知欲。他为了追求真理而酷爱科学，他说：“我把少有的热情用在学习科学上”，“凡是能拿到手的，内容被认为是最有趣的、最科学的书我都看完了”。笛卡儿不是死读书，而是勤于思索，坚韧不拔地思索。他常常是对所学的知识持怀疑和批判的态度，除非这些知识在思想上清楚到毫无疑问。他特别看重并致力于方法论的研究，认为有了科学的方法，真理的探求就有了保证。因此他总是把方法论的研究摆在首位，在找到了先进的方法之后再

把它应用到具体学科的研究中去。他一生中正是坚持了这一信念并付诸实践，所以在科学研究的道路上取得了巨大的成功，为全人类做出了可观的贡献。笛卡儿把他的方法论应用于数学，他认为欧几里得的几何学的证明总是要求某种新的往往是奇巧的想法，他就想，能否创造一种一般的方法，以使用来解决所有的几何问题；他对当时通行的代数也加以批评，说它完全受法则和公式的控制，“而不像一门改进思想的科学”。（当然，笛卡儿并没有否认对科学进步有巨大影响的欧几里得几何学的完美的逻辑体系和代数学所具有的深入分析和解决广泛课题的力量，而是继承和发展了这些光辉的数学思想。）他主张把代数和几何结合起来，发扬它们的长处去创造一门能“解释自然现象的”（即能满足当时技术科学需要的）统一的数学。笛卡儿首先意识到代数和数、方程有关，几何和点、线、面有关，要把两者统一起来就意味着要找到一种能使两者明确联系起来的方法。经过长时期的艰苦的思索，他创造性地提出了两个基本概念——用坐标表示点的观念和用方程表示曲线的观念（在第一章中将详细阐述），建立了一门崭新的数学分支——解析几何学，统一几何与代数的愿望终于实现了。

笛卡儿提出的两个基本概念把过去数学中对立着的两个研究对象“数”和“形”统一起来，并在数学中引入了“变量”和“函数”，开拓了变量数学这个崭新的领域，完成了数学史上一次划时代的变革。

1637年笛卡儿出版了他的著名的长篇哲学著作《方法

论》。这是一部文学和哲学的经典著作。这部书还包括三个著名的附录：<sup>11)</sup>《折光学》、《陨石学》和《几何学》。这是他把他的方法论应用于这些科学部门之后所做出的研究成果。笛卡儿写这三个附录的目的是想证明他的方法论的优越性。其中的《几何学》系统地概括了他的数学新思想，包含着解析几何学理论的十分完备的叙述，被公认为是解析几何学诞生的标志和起点。

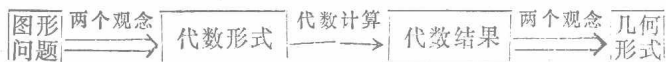
尔后，又经过许多数学家，其中特别是大数学家欧拉（1707—1783）的努力，解析几何学才发展成为像今天这样的具有丰富思想内容，而又应用非常广泛的基础性的数学分支。

## 二、解析几何的基本思想、内容体系和学习方法

解析几何学的研究对象仍然是几何图形，但是它的研究方法却不同于欧氏几何学（这正是解析几何学与欧氏几何学的根本区别）。在创立解析几何学的时候，笛卡儿希望抛弃欧氏几何学中证明的奇巧而代之以“通法”，以使用来解所有的几何题。笛卡儿正是看到了代数具有作为一门普遍的科学方法的潜力（它从自然科学的广泛学科中来，又能回到它们之中去；它的计算方法带有程序化的特点），他创造性地把代数应用于几何，建立了解析几何学。因此，解析几何学是在引入坐标系的基础上用代数方法研究几何图形的科学。在这门学科里，几乎所有的问题都是通过代数计算的方法解决的。

要用代数方法去研究几何图形，首先需要把图形问题转化成代数形式；第二步，用代数方法算出结果；第三步，把

算出的结果再转化成几何形式（也就是给以几何解释）。这两次转化是解决问题的关键，它是通过笛卡儿的两个基本概念实现的。我们把这个研究过程图示如下：



纵观解析几何的全貌，我们可以看到它的几个显著的特点：

它既汲取了几何学和代数学的长处，又创造性地提出了一系列新概念、新见解，数学思想极其丰富。这是它的第一个特点；

它的研究对象主要是“形”，又涉及到“数”，而且矛盾的主要方面时而在这，时而在那，两个侧面互相联系，互相转化，互相依赖，互相贯通。这是它的第二个特点；

它是变量数学，用运动、变化的观点处理问题，处处充满着唯物辩证法。这是它的第三个特点；

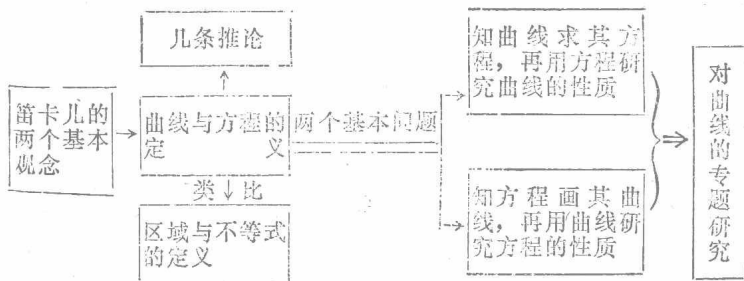
代数计算（包括列方程、解方程、式和数的运算）是研究解析几何的主要手段，几乎每个问题的解决都离不开计算，这是它的第四个特点。

解析几何学可分为平面解析几何学与空间解析几何学，本课程仅限于前者，后者要到大学才能学习。

平面解析几何的内容体系可从本书目录和下面的结构图中看出：

（一）解析几何的总体逻辑结构（基础部分）：





## (二) 对一、二次平面曲线的专题研究：

- (1) 对直线的研究；
- (2) 对二次曲线(圆、抛物线、椭圆、双曲线)的研究。

## (三) 研究平面曲线的辅助工具：

- (1) 参数方程；
- (2) 坐标变换；
- (3) 极坐标。

以下和同学们谈谈学习方法。

众所周知，做任何事情都应该讲究方法。方法对头才能事半功倍。从上面的阐述中可以看出：笛卡儿和其他众多的大科学家一样，都非常重视方法论的研究，并认为“良好的方法能使我们更好地发挥运用天赋的才能，而拙劣的方法则可能阻碍才能的发挥”<sup>①</sup>。许多优秀学生的经验也一再证明，若能经常四顾、分析自己的学习过程，“养成研究学习方法的

<sup>①</sup>这是法国大生理学家贝尔纳的话（转引自〈英〉W.I.B.贝弗里奇所著《科学研究的艺术》的序言，中译本由科学出版社出版）。