普通高等教育"十一五"规划教材
21世纪大学数学精品教材
海军院校重点教材

工程数学 下册

主　编　戴明强　刘子瑞
副主编　任耀峰　王胜兵　金裕红　熊　萍

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”规划教材

21 世纪大学数学精品教材

海军院校重点教材

工 程 数 学

（下 册）

主 编 戴明强 刘子瑞

副主编 任耀峰 王胜兵
金裕红 熊 萍

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书共6篇30章，分为上、下两册. 上册包括线性代数、概率论、数理统计等基本内容，下册包括复变函数、积分变换、数理方程等基本内容. 全书选材适当、结构合理，每章有小结、重要词汇中英文对照，在应用性较强的章节后还配有数学实验基础知识，便于教师教学和读者自学.

本书可作为高等学校本科工学、管理学等专业教材，也可作为教研工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

工程数学. 下/戴明强，刘子瑞主编. —北京：科学出版社，2009
21世纪大学数学精品教材
ISBN 978-7-03-025015-5

Ⅰ. 工… Ⅱ. ①戴…②刘… Ⅲ. 工程数学-高等学校-教材 Ⅳ. TB11

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第119822号

责任编辑：王雨舸 / 责任校对：李磊东
责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年8月第 一 版 开本：B5(720×1 000)
2009年8月第一次印刷 印张：18 3/4
印数：1—4 000 字数：365 000

定价：31.80元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

《工程数学》是继《高等数学》之后的又一门重要的基础课程，它包括线性代数、概率论、数理统计、复变函数、积分变换和数理方程等内容.

本教材曾于 1995 年在海军工程大学内部出版，在使用了 5 年后进行过一次改编. 本次编写根据时代发展对工科数学教学的变革要求在原教材的基础上进行了较大幅度的内容调整. 在编写过程中，我们吸收了国内外同类教材的优点，并结合多年教学实践的经验，注意了理论知识实际背景的介绍、学科发展历程的叙述和数学应用软件的简介，增强了实用性. 在内容取舍、例题选择、习题配备以及叙述方式上，注意反映教学的特点和要求. 在应用性较强的章节后配备了相应的数学软件知识和程序实例，为同步进行的数学实验打下基础，帮助读者更好地体会数学的工具作用. 重要的词汇给出了中英文对照，留下延伸阅读的接口. 每章后进行了简明扼要的小结，可以帮助读者理清基本内容纲要，并便于教学和自学.

本书努力打造鲜明的特色，体现如下：

1. 在整体框架方面，保证了基本概念、基本理论和基本方法的完整. 在具体内容取舍上，则结合教学实际，侧重于工程数学的基本方法，同时又兼顾了理论上的系统性和逻辑上的严谨性.

2. 概念、理论和方法的引入，注重说明它们的实际背景，体现实践、理论、再实践的认识论原则。精心组编的教学内容，由一层知识到另一层知识，力求体现事物的矛盾运动。读者用心读完这套教材，不仅可以学到相关知识和科学思维方式，也能得到严密的逻辑训练.

3. 讲基础联系前沿，讲近代不忘历史. 在介绍工程数学主体知识的同时，注意

选择结合点,用少量的笔墨介绍有关的科学发展的史实,或点缀一些发展前沿的成就,用以开拓读者视野,激发求知欲望。

4. 本书融入编者多年的教学实践经验,在基本知识内容编排上注重读者理解和掌握,在延伸知识编排上注重读者继续学习的需要.

本书的编写大纲由戴明强拟定,戴明强、刘子瑞任主编,任耀峰、王胜兵、金裕红、熊萍任副主编.全书共6篇30章,第1篇由戴明强编写,第2篇由任耀峰编写,第3篇由金裕红编写,第4篇由刘子瑞编写,第5篇由熊萍编写,第6篇由王胜兵编写.全书由戴明强、刘子瑞统稿。

本书为海军院校重点教材,它的出版得到了海军工程大学各级领导和机关的关心和支持.艾小川、瞿勇、孙慧玲、王玉琢、袁昊劼等老师在本书编写过程中提供了热情的帮助,在此表示衷心的感谢。本书编写参考了大量资料,对于书末所列参考书目的作者们也要表示由衷的敬意和真诚的感谢.

由于编者水平有限,不足之处在所难免,敬请批评指正.

编　者

2009年4月

目　录

第四篇　复变函数

第五篇　积分变换

第六篇 数理方程与特殊函数

第四篇 GONG CHENG SHU XUE

复变函数

高等数学的研究对象是自变量为实数，函数值亦为实数的实函数，从映射的观点看，实函数是实数到实数的映射，理论的探讨和生产实践的发展，又提出了对复变函数的研究也即复数到复数之间的映射，研究复变数之间的相互依赖关系，就是复变函数的主要任务.

意大利数学家卡尔达诺（H. Cardano，1545 年）在解代数方程时，首先产生了复数开方的思想，出现了$\sqrt{-15}$，但这只不过是一种纯形式的表示，当时谁也不知道这样的表述有什么好处，用类似形式的数进行计算又得到一些矛盾，因而长期以来都被视为不能接受的虚数，一直到 17 世纪和 18 世纪，随着微积分的发明与发展，情况才逐渐有了改变，负

数开方以及所对应的复数逐渐被人们所认识.

关于复数理论最系统的论述，是由瑞士数学家欧拉(L. Euler)作出的.他在1777年系统地建立了复数理论，发现了复指数函数和三角函数之间的关系，创立了复变函数论的一些基本定理，用符号“i”作为虚数单位，也是他首创的，此后复数才被人们广泛承认和使用.

在19世纪，复变函数的理论经过法国数学家柯西(A. Cauchy)、德国数学家黎曼(B. Riemann)和魏尔斯特拉斯(K. Weierstrass)的巨大努力，形成了非常系统的理论，并且深刻地渗入到代数学、数论、微积分方程等数学分支，同时，它在热力学、流体力学、电学等方面也有很多应用.

20世纪以来，复变函数已被广泛地应用在理论物理、弹性理论、天体力学等方面，与数学中其他分支的联系也日益密切，致使经典的复变函数理论，如整函数与亚纯函数理论、解析函数的边值问题等有了新的发展和应用，并且开辟了一些新的方向，如多元复变函数论、广义解析函数论等.

复变函数研究的中心对象是解析函数，因此，复变函数论又称为解析函数论.

由于实数是复数的特殊情况，因此复变函数理论中的许多结论与实函数中是类似的.在学习复变函数中，我们应注意与高等数学中关于实函数中的概念和性质进行比较，找出其共同点，但更重要的是找出其不同点，这样便于我们从更高的角度认识问题、研究问题.这也是学好复变函数课程行之有效的方法.

第 15 章　复数与复变函数

本章介绍复数的概念、复数的运算以及复数的几种不同表示方法,使读者对复数有一些基本的了解,同实变数一样,每一个复变数都有自己的变化范围,由此引入区域的概念并在此基础上引入复变函数的概念以及复变函数的极限及连续性等概念,它们是高等数学中函数、极限及连续概念的推广.

§ 15.1　复数及其代数运算

复数的概念来源于解代数方程,例如方程 $x^2=-1$ 在实数范围内无解,若令 $i^2=-1$,则 $i=\sqrt{-1}$ 为方程 $x^2=-1$ 的解,称 i 为虚数单位.

形如 $z=x+iy$ 或 $z=x+yi$ 的数,称为复数,其中 x 和 y 是任意实数,分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**,常记为

$$x=\mathrm{Re}(z),\quad y=\mathrm{Im}(z)$$

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$ 的加、减、乘法运算定义如下:

$$(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$$

$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

以上两式分别称为复数 z_1 与 z_2 的和、差与积.

称满足 $z_2\cdot z=z_1(z_2\neq 0)$ 的复数 z 为 z_1 与 z_2 的商,记为$\dfrac{z_1}{z_2}$,由乘法定义得

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

容易验证复数的加法满足交换律和结合律,复数的乘法满足交换律与结合律,且满足乘法对于加法的分配律.

实部为 0 的复数称为纯虚数,复数 $x+iy$ 与 $x-iy$ 称为**共轭复数**,即 $x+iy$ 是 $x-iy$ 的共轭复数,或 $x-iy$ 是 $x+iy$ 的共轭复数. 复数 z 的共轭复数记为$\bar{z}$,于是 $x-iy=\overline{x+iy}$.

共轭复数满足以下运算性质:

性质 1　$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$, $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

性质 2　$\bar{\bar{z}}=z$

性质 3 $z \cdot \bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$

性质 4 $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z) \quad z - \bar{z} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$

全体复数并引进上述算术运算后就称为复数域. 实数域和复数域都是代数中所研究的“域”的实例. 和实数域不同的是，在复数域中不能规定复数的大小.

注：在计算$\dfrac{z_1}{z_2}$时，常利用共轭复数的性质 3，分子分母同乘以分母的共轭复数.

例 15.1 设 $z_1 = 5 - 5\mathrm{i}$，$z_2 = -3 + 4\mathrm{i}$，求$\dfrac{z_1}{z_2}$及$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-5\mathrm{i}}{-3+4\mathrm{i}} = \frac{(5-5\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})}{(-3+4\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})}$$
$$= \frac{(-15-20)+(15-20)\mathrm{i}}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}\mathrm{i}$$
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}\mathrm{i}$$

例 15.2 设 $z = -\dfrac{1}{\mathrm{i}} - \dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，求 $\mathrm{Re}(z)$，$\mathrm{Im}(z)$与 $z\bar{z}$.

解
$$z = -\frac{1}{\mathrm{i}} - \frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}} - \frac{3\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \mathrm{i} - \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$$

所以
$$\mathrm{Re}(z) = \frac{3}{2}, \quad \mathrm{Im}(z) = -\frac{1}{2}, \quad z\bar{z} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

例 15.3 设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$，$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，证明：$z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$

证 $z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} = 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$.

§ 15.2 复数的几何表示

1. 复平面

由于任一复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 与一对有序实数(x, y)成一一对应，所以，对于平面上给定的直角坐标系，复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 可以用该平面上坐标为(x, y)的点来表示，x 轴称为实轴，y 轴称为虚轴，两轴所在的平面称为复平面或 z 平面. 这样复数与复平面上的点成一一对应，所以常把点 z 称为复数 z.

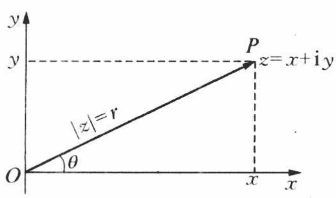

图 15.1 复数的向量表示

复数 z 还能用从原点指向点(x, y)的平面向量来表示(见图 15.1)，向量的长度称为 z 的**模**或**绝对值**，记为

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

以下各式的成立是显然的

$$|x| \leqslant |z|, \quad |y| \leqslant |z|, \quad |z| \leqslant |x| + |y|, \quad z\bar{z} = |z|^2 = |z^2|$$

在 $z \neq 0$ 的情况下,表示 z 的向量与 x 轴正向间的交角 θ 称为 z 的**辐角**,记为 $\operatorname{Arg} z$. 显然

$$\tan(\operatorname{Arg} z) = \tan\theta = \frac{y}{x}$$

若 θ 是 $z \neq 0$ 辐角,则 $\theta + 2k\pi$(k 为整数)也是 z 的辐角.

$$\operatorname{Arg} z = \theta + 2k\pi \text{ 为 } z \text{ 的全部辐角 } (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

在 z 的辐角中,我们把满足 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$ 的 θ_0 称为 $\operatorname{Arg} z$ 的主值,记为 $\arg z$.

当 $z = 0$ 时,$|z| = 0$,此时 z 的辐角不确定.

两个复数 z_1 与 z_2 的加、减法运算和相应向量的加减法运算一致.

利用直角坐标和极坐标的关系 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$ 可以把 z 表示成下面的形式:

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \quad \text{(该形式称为复数的三角表示法)}$$

利用高等数学中介绍过的欧拉公式:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

得 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,把该形式称为复数的指数表示法.

复数的各种表示法可以相互转换,下面是一些例子:

例 15.4 将下列复数化成三角表示式与指数表示式:

(1) $z = -\sqrt{12} - 2\mathrm{i}$ (2) $z = 1 - \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \ (0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$

解 (1) $r = |z| = \sqrt{12 + 4} = 4$, $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{-2}{-\sqrt{12}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

由于 z 在第三象限,所以 $\theta = -\dfrac{5}{6}\pi$. 由此得 z 的三角表示式

$$z = 4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right]$$

z 的指数表示式为 $z = 4\mathrm{e}^{-\frac{5}{6}\pi\mathrm{i}}$.

(2) $1 - \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$

$$= 2\sin^2\frac{\varphi}{2} + \mathrm{i} \cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = 2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2} + \mathrm{i}\cos\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)\right] = 2\sin\frac{\varphi}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)}$$

例 15.5 求下列方程所表示的曲线：

(1) $|z-\mathrm{i}|=2$ (2) $|z-2\mathrm{i}|=|z+2|$ (3) $\mathrm{Im}(\mathrm{i}+\bar{z})=4$

解 (1) 从几何上可以看出，$|z-\mathrm{i}|=2$ 表示以 i 为中心，半径为 2 的圆周(见图 15.2(a)). 事实上该圆周的直角坐标方程为：$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=2$，即

$$x^2+(y-1)^2=4$$

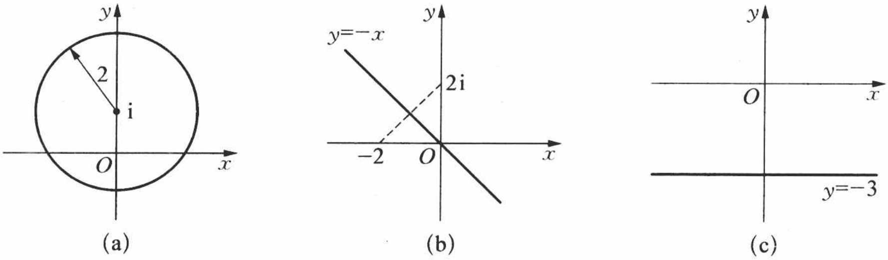

图 15.2 复数方程表示曲线

(2) 该方程表示到点 2i 和 −2 距离相等的点的轨迹，所表示的曲线就是连接点 2i 和 −2 的线段的垂直平分线(见图 15.2(b))，它的方程为 $y=-x$.

(3) 设 $z=x+\mathrm{i}y$，则 $\mathrm{i}+\bar{z}=x+(1-y)\mathrm{i}$，所以 $\mathrm{Im}(\mathrm{i}+\bar{z})=1-y$ 从而可求得曲线方程为 $y=-3$，即一条平行于 x 轴的直线(见图 15.2(c)).

2. 复球面

除了用平面内的点或向量来表示复数外，还可以用球面上的点来表示复数，下面介绍此方法.

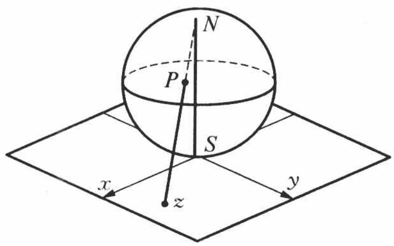

图 15.3 复球面

取一个与复平面切于原点 $z=0$ 的球面，球面上的一点 S 与原点重合，通过 S 作垂直于复平面的直线与球面相交于 N 点. 我们称 N 为北极，S 为南极(见图 15.3).

考虑起点在北极 N 并通过球面上任意点 P 的射线，它与 xOy 平面相交于一点，记作 z；反之，起点在北极 N 并通过 xOy 平面上任一点 z 的射线与球面也只交于一点. 这样，xOy 平面上所有的点与球面上所有的点(除了北极 N 以外)就建立了一一对应关系. 由前述可知，复数可以视为复平面内的点，所以我们就可以用球面上的点来表示复数.

但是，对于球面上的北极 N，还没有复平面内的一个点与它对应. 为了使复平面与球面上的点都能一一对应起来，规定：复平面上有一个唯一的“无穷远点”，它与球面上的北极 N 相对应. 相应地，我们又规定：复数中有一个唯一的“无穷大”与

复平面上的无穷远点相对应，并把它记为∞，因而球面上的北极 N 就是复数无穷大∞的几何表示. 这样，球面上的每一个点，就有唯一的复数与它对应，这样的球面称之为复球面.

复平面再加上无穷远点称为扩充复平面. 对复数∞而言，实部、虚部与辐角的概念均无意义. 注意，这里的无穷远点∞不像在微积分中把它视为符号，而是视为一个确定的点. 这个点的引入既是为了今后理论上的需要，也是为了能够更好地反映客观事物.

关于∞的四则运算作以下规定(设 z 是复数)：

$$\infty + z = z + \infty = \infty, \quad \infty - z = z - \infty = \infty$$

$$\infty \cdot z = z \cdot \infty = \infty \quad (z \neq 0)$$

$$\frac{z}{\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{z} = \infty \quad (z \neq \infty,\ z \neq 0)$$

而对于$\infty \pm \infty$, $0 \cdot \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$则没有定义.

无特殊声明，所谓“平面”一般仍指有限平面，所谓“点”仍指有限平面上的点.

数学实验基础知识

基本命令	功　能
real(z)	返回复数 z 的实部
imag(z)	返回复数 z 的虚部
complex(a, b)	返回复数 $a+bi$
conj(z)	返回复数 z 的共轭复数
abs(z)	返回复数 z 的模(绝对值)
angle(z)	返回复数 z 的辐角

例　求复数 $z = 3 + 6\mathrm{i}$ 的实部、虚部、模、辐角和共轭复数.

```
>>z = 3 + 6i;
>>re = real(z);
>>im = imag(z);
>>ab = abs(z);
>>an = angle(z);
>>ag = conj(z)
```

§ 15.3　复数的乘幂与方根

设有两个复数 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$, 则

$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$$
$$= r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

所以

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|, \qquad \mathrm{Arg}(z_1z_2) = \mathrm{Arg}\,z_1 + \mathrm{Arg}\,z_2$$

由于辐角的多值性,该等式应理解为对于左端的任一个值,右端必有一个值和它相等,反过来也一样.

因此,两个复数乘积的模等于它们模的乘积,两个复数乘积的辐角等于它们的辐角之和.另外复数相乘的几何意义是将复数 z_1 的模放大 $|z_2|$ 倍,然后将其辐角按逆时针方向旋转一个角度 $\mathrm{Arg}\,z_2$,即先作一个相似变换,然后再作一个旋转变换.

n 个相同复数 z 的乘积称为 z 的 n 次幂,记为 z^n,即 $z^n = \underbrace{z\cdot z\cdot\cdots\cdot z}_{n个}$.

设 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$,由复数的乘法运算可得

$$z^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta)$$

如果定义 $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$,可证上式当为 n 负整数时也成立.

例 15.6 求复数 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 的正整数次幂 z^n

解 $z^n = \underbrace{z\cdot z\cdot\cdots\cdot z}_{n个} = \underbrace{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdot r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdots r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}_{n个} = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta)$

特别地,取 $r=1$,上面的等式就是

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$$

这就是著名的棣莫弗(De Moivre)公式.

例 15.7 求证:

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta, \quad \sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

证 根据棣莫弗公式

$$\begin{aligned}&\cos 3\theta + \mathrm{i}\sin 3\theta\\ &= (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3\cos^2\theta(\mathrm{i}\sin\theta) + 3\cos\theta(\mathrm{i}^2\sin^2\theta) + (\mathrm{i}\sin\theta)^3\\ &= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + \mathrm{i}(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)\end{aligned}$$

比较上式两端的实部与虚部即得证.

按照商的定义,当 $z_1 \neq 0$ 时,有 $z_2 = \dfrac{z_2}{z_1}\cdot z_1$,由复数的乘法法则

$$|z_2| = \left|\frac{z_2}{z_1}\right||z_1.|, \quad \mathrm{Arg}\,z_2 = \mathrm{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) + \mathrm{Arg}\,z_1$$