普通高等教育"十一五"国家级规划教材

经济应用数学（第二版）

顾静相 主编
顾静相 冯 泰 编著

下 册

高等教育出版社
Higher Education Press

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

经济应用数学

（第二版）

下 册

顾静相 主编
顾静相 冯 泰 编著

高等教育出版社

内容提要

本书第一版是教育科学"十五"国家规划课题研究成果，第二版被评为普通高等教育"十一五"国家级规划教材。本书在引例、解释和应用诸多方面力争多联系与经济有关的问题，对概念、定理和方法等采用了学生容易理解的方式进行叙述，从而降低了起点，减少了难度，精简了内容。

全书分为上、下两册，共 15 章。上册是微积分的内容，主要包括：极限与连续、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、多元函数微积分、常微分方程、无穷级数；下册是线性代数、概率论与数理统计的内容，主要包括：线性代数基础、线性代数应用、基础概率、随机向量、数据处理、统计推断、方差分析与相关分析。

本书可供培养应用型人才的高等学校经济管理类专业选用，也可供有关人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

经济应用数学. 下册 / 顾静相主编. —2 版. — 北京：高等教育出版社，2009. 6
ISBN 978 - 7 - 04 - 026489 - 0

Ⅰ. 经…　Ⅱ. 顾…　Ⅲ. 经济数学 - 高等学校 - 教材
Ⅳ. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 075366 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400 - 810 - 0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010 - 58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	高等教育出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　　次	2004 年 12 月第 1 版
开　　本	787 × 960　1/16		2009 年 6 月第 2 版
印　　张	28	印　　次	2009 年 6 月第 1 次印刷
字　　数	520 000	定　　价	32.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　26489 - 00

第二版前言

为了适应当前我国高等教育的发展需要，满足社会对高校应用型人才培养的各类要求，根据应用型人才培养中经济与管理类专业培养目标及本课程的性质、地位和作用，本书的修订工作确定了“问题为‘的’，数学为‘矢’，有的放矢”的基本修改原则。内容编排上，努力寻求突破，以贴近生活和大量引进经济管理案例为原则，体现课程内容的有用、适用、应用，改变传统的数学教材过多地进行抽象的定理演绎、推导和繁杂的计算，采用几何印证、实际背景推理和简单验证等形象思维方式进行处理，简化数学定理证明、公式推导和习题演算，使学生能够从传统的数学学习负担中解放出来，并能集中精力有效关注数学作为工具的重要作用。

1. 该教材内容分为微积分、线性代数、概率论与数理统计三个模块，在每一模块前增加一篇简要介绍这一模块的起源、发展和作用的短文，使学生初步了解它的历史背景。在每一模块后面增加一个综合案例，主要是综合利用前面所学的知识，解决一个经营管理等方面的问题，使学生进一步体会经济数学的作用。

2. 考虑学习对象的状况及特点，贴近学生，每章正文之前给出了本章导读，以日常生活及经济管理中常见和人们关心或熟悉的典型事例为引子，一开始就让学生知道本章知识的应用并产生求解问题的冲动；各章节则在该引子问题及其他更多实际问题的求解过程中自然引入数学工具，最终和学生一道在对数学的领悟和掌握之中共同完成导读中引子问题的解答。

3. 本章导读的另一作用是简介本章基本内容和学习目标，使学生一开始就明确学习内容和主要目标。每章最后安排本章内容小结、一个相关数学家的介绍和本章作业，及时归纳、小结本章主要内容，增加学生的知识面。

4. 为了更贴近社会、贴近生活、贴近应用，对各章内容进行适当增删与修改，调整和修改部分例题，增加了社会活动和经济管理方面的典型例题或案例，进一步强调本学科的实际应用，激发学生的学习兴趣。

真诚地希望广大读者能够参与到我们的数学教学改革中来，您的参与就是对我们最大的支持和褒奖，让我们一起将本教材建设成为应用型本科教育的精品教材。

本次改版工作全部由顾静相完成。

高等教育出版社的于丽娜、李华英等编辑为本次改版付出了辛勤劳动，在此表示衷心感谢。

编　者

2008 年 12 月

第一版总序

为了更好地适应当前我国高等教育跨越式发展需要，满足我国高校从精英教育向大众化教育的重大转移阶段中社会对高校应用型人才培养的各类要求，探索和建立我国高等学校应用型人才培养体系，全国高等学校教学研究中心（以下简称“教研中心”）在承担全国教育科学“十五”国家规划课题——“21世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践”研究工作的基础上，组织全国100余所以培养应用型人才为主的高等院校，进行其子项目课题——“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”的研究与探索，在高等院校应用型人才培养的教学内容、课程体系研究等方面取得了标志性成果，并在高等教育出版社的支持和配合下，推出了一批适应应用型人才培养需要的立体化教材，冠以“教育科学‘十五’国家规划课题研究成果”。

2002年11月，教研中心在南京工程学院组织召开了“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题立项研讨会。会议确定由教研中心组织国家级课题立项，为参加立项研究的高等院校搭建高起点的研究平台，整体设计立项研究计划，明确目标。课题立项采用整体规划、分步实施、滚动立项的方式，分期分批启动立项研究计划。为了确保课题立项目标的实现，组建了“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题领导小组（亦为高校应用型人才立体化教材建设领导小组）。会后，教研中心组织了首批课题立项申报，有63所高校申报了近450项课题。2003年1月，在黑龙江工程学院进行了项目评审，经过课题领导小组严格的把关，确定了首批9项子课题的牵头学校、主持学校和参加学校。2003年3月至4月，各子课题相继召开了工作会议，交流了各校教学改革的情况和面临的具体问题，确定了项目分工，并全面开始研究工作。计划先集中力量，用两年时间形成一批有关人才培养模式、培养目标、教学内容和课程体系等理论研究成果报告和在研究报告基础上同步组织建设的反映应用型人才培养特色的立体化系列教材。

与过去立项研究不同的是，“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题研究在审视、选择、消化与吸收多年来已有应用型人才培养探索与实践成果基础上，紧密结合经济全球化时代高校应用型人才培养工作的实际需要，努力实践，大胆创新，采取边研究、边探索、边实践的方式，推进高校应用型人才培养工作，突出重点目标，并不断取得标志性的阶段成果。

教材建设作为保证和提高教学质量的重要支柱和基础，作为体现教学内容

和教学方法的知识载体，在当前培养应用型人才中的作用是显而易见的。探索、建设适应新世纪我国高校应用型人才培养体系需要的教材体系已成为当前我国高校教学改革和教材建设工作面临的十分重要的任务。因此，在课题研究过程中，各课题组充分吸收已有的优秀教学改革成果，并和教学实际结合起来，认真讨论和研究教学内容和课程体系的改革，组织一批学术水平较高、教学经验较丰富、实践能力较强的教师，编写出一批以公共基础课和专业、技术基础课为主的有特色、适用性强的教材及相应的教学辅导书、电子教案，以满足高等学校应用型人才培养的需要。

我们相信，随着我国高等教育的发展和高校教学改革的不断深入，特别是随着教育部“高等学校教学质量和教学改革工程”的启动和实施，具有示范性和适应应用型人才培养的精品课程教材必将进一步促进我国高校教学质量的提高。

全国高等学校教学研究中心

2003 年 4 月

第一版前言

本书是全国教育科学“十五”国家规划课题——“21世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践”的子课题“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”项目成果之一。

经济应用数学是经济管理中所用的高等数学,该课程与通常的高等数学课相比有其特殊性,因此需要正确认识经济与数学的关系。将数学用于经济学,可以深入揭示仅靠定性分析难以表达的现代经济错综复杂的相互关系及其变化趋势,可以指出经济决策的方向,可以预测这些决策的直接效果和间接效果。但是,将数学用于经济学,绝不是用数学取代经济学,数学分析要为经济分析服务。因此,本书较好地把握了经济数学课程的定位和学科发展,力求既保持本课程学科体系的合理性和教学内容的系统性,又不失经济概念的严谨和时代特征,真正体现“数学为本,经济为用”的经济数学特点。

按照经济管理类数学课程教学基本要求和满足我国高校从精英教育向大众化教育的重大转移阶段中社会对高校应用型人才培养的各类要求,本书对基本内容做了合理的选择,分上下两册共15章,上册基本内容为:极限与连续、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、多元函数微积分、常微分方程、无穷级数;下册基本内容为:线性代数基础、线性代数应用、基础概率、随机向量、数据处理、统计推断、方差分析与回归分析。这些内容基本涵盖了高等教育经济管理类专业必需的数学基础,通过这些内容的学习,可以使学生对微积分学、线性代数、概率论与数理统计的思想和方法有初步认识,掌握微积分学、线性代数、概率论与数理统计的基本知识、基本理论和基本技能,培养学生的抽象思维、逻辑推理以及基本运算能力,使学生初步具有定性与定量相结合的方法分析和解决经济管理问题的能力,并为学生今后学习经济管理课程和从事经济管理工作打下必要的数学基础。

在贯彻“以应用为目的,以必须够用为度”的指导思想下,本书重视基本概念、基本运算技能的训练,重视培养学生运用数学分析方法解决实际问题的能力,而不拘泥于理论推导和较繁杂的运算技巧。作为经济管理类专业使用的教材,在引例、解释和应用诸多方面力争多联系与经济有关的问题。针对经济管理类专业学生的特点,本书对概念、定理和方法等采用了学生容易理解的方式进行叙述,从而降低了起点,减小了难度,精简了内容,便于普通高校的教学和学生自学。本书在各章节内容编写过程中,首先编排了本章“学习目标”,使学生一开

始就有较明确方向。为便于教师和学生使用,各章选配了适量的例题,使学生能掌握本课程的基本理论和基本方法;并在每章末配有两类习题:(A)类是计算、应用、证明等传统题型;(B)类是填空、选择等客观性题型,书末附有习题答案。

本书下册分别由顾静相(第9、10章)、冯泰(第11、12、13、14、15章)编写,全书由顾静相统纂主编。

高等教育出版社的编辑李艳馥和马丽为本教材的出版付出了辛勤劳动,在此表示衷心感谢。

因受经验和水平所限,本教材中不妥之处实属难免,敬请读者提出批评指正。

编　者

2004年8月

目　　录

第 2 篇 线性代数

第 3 篇

概率论与数理统计

第 2 篇

线性代数

线性代数是高等代数的一大分支.线性代数学科和矩阵理论是伴随着线性系统方程系数研究而引入和发展的.行列式的概念最早是由十七世纪日本数学家关孝和提出来的,他在 1683 年写了一部叫做《解伏题之法》的著作,意思是“解行列式问题的方法”,书里对行列式的概念和它的展开已经有了清楚的叙述.欧洲第一个提出行列式概念的是德国的数学家,微积分学奠基人之一莱布尼茨(Leibnitz).1750 年克拉默(Cramer)在他的《线性代数分析导言》中发表了求解线性系统方程的重要基本公式(即克拉默法则).范德蒙德(Vandermonde)是第一个对行列式理论进行系统阐述的人,并且给出了一条法则,用二阶子式和它们的余子式来展开行列式.就对行列式本身进行研究这一点而言,他是这门理论的奠基人.

《九章算术》中就有了类似于矩阵的概念,并利用矩阵的初等变换的方法求解线性方程组.自西尔维斯特(Sylvester)1850 年首次使用矩阵这个词和概念之后,矩阵理论很快得到了迅速发展.对矩阵理论发展贡献比较大的有凯利(Cayley),矩阵乘法、逆矩阵及其性质等重要概念都是他引入的.第二次世界大战后随着现代数字计算机的发展,矩阵又有了新的含义,特别是在矩阵的数值分析等方面.现在矩阵的应用十分广泛,在量子力学、统计力学、工程结构分析、系统控制等方面都有广泛应用.

高斯(Gauss)大约在 1800 年提出了高斯消元法并用它解决了天体计算和后来的地球表面测量计算中的最小二乘法问题.虽然高斯由于这个技术成功地消去了线性方程的变量而出名,但早在几世纪中国人的手稿中就出现了解释如何运用“高斯”消去的方法求解带有三个未知量的三方程系统.在当时的几年里,高斯消去法一直被认为是测地学发展的一部分,而不是数学.而高斯 - 约当消去法则最初是出现在由威廉·约当(Wilhelm Jordan)撰写的测地学手册中.许多人把著名的数学家卡米尔·约当(Camille Jordan)误认为是“高斯 - 约当”消去法中的约当.

本篇分两部分.第一部分主要介绍线性代数的基础理论,包括矩阵概念、矩阵运算、矩阵行列式的概念和计算方法、可逆矩阵和矩阵的秩;线性方程组

的解法、解的情况判定、解的结构，向量组的相关性及向量组的秩．第二部分主要介绍线性代数在社会、经济管理学科中的应用，它们是投入产出模型、线性规划问题及其解法、对偶线性规划．

第 9 章 线性代数基础

本章导读

您知道他们创造的总产值是多少吗?

某施工公司主要由建筑队、电气队、机械队三个工程队组成,该公司要求各工程队在对外服务的同时,工程队之间也要互相提供服务. 经过测算:建筑队每单位产值分别需要电气队、机械队的 0.1,0.3 单位服务,电气队每单位产值分别需要建筑队、机械队的 0.2,0.4 单位服务,机械队每单位产值分别需要建筑队、电气队的 0.3,0.4 单位服务. 同时我们还知道在某一时期内,每个工程队对外服务所创造的产值分别为建筑队 500 万元,电气队 700 万元,机械队 600 万元. 那么在这一时期内,每个工程队创造的总产值是多少?

我们首先设三个工程队的总产值是分别为 $x_i(i=1,2,3)$ 万元,那么建筑队的总产值应该包含提供给电气队每单位产值 0.2 单位的服务费,即 $0.2x_2$ 万元;提供给机械队每单位产值 0.3 单位的服务费,即 $0.3x_3$ 万元;以及建筑队对外服务创造了 500 万元的产值. 因此建筑队在这一时期内的总产值满足:

$$0.2x_2 + 0.3x_3 + 500 = x_1;$$

同理得到电气队、机械队的总产值分别满足:

$$0.1x_1 + 0.4x_3 + 700 = x_2;$$

$$0.3x_1 + 0.4x_2 + 600 = x_3.$$

由此我们得到一个含有三个元素三个方程的方程组:

$$\begin{cases} 0.2x_2 + 0.3x_3 + 500 = x_1, \\ 0.1x_1 + 0.4x_3 + 700 = x_2, \\ 0.3x_1 + 0.4x_2 + 600 = x_3, \end{cases}$$

那么这样的线性方程组是否有解呢? 如果有解,又如何求出三个工程队的总产值呢? 要回答这些问题就需要学习线性代数的基础知识.

本章主要介绍线性代数中的一些基础知识,如矩阵概念、矩阵运算、特殊矩阵、矩阵行列式、逆矩阵与初等变换、矩阵的秩、矩阵的分块以及线性方程组及其解的情况判定、n 维向量及其相关性、线性方程组解的结构等内容.

通过本章学习,希望大家:

· 理解矩阵的概念,熟练掌握矩阵加法、减法、数乘和乘法的运算规则,了解

其经济背景.

· 了解矩阵行列式的定义及其性质.掌握矩阵行列式的计算方法,知道克拉默法则.

· 理解可逆矩阵的概念及其性质,会用伴随矩阵求矩阵的逆,熟练掌握用初等行变换的方法求矩阵的逆.

· 了解初等矩阵的概念及它们与矩阵初等变换的关系.

· 了解矩阵的秩的概念,掌握求矩阵的秩的方法.

· 了解矩阵分块的原则,掌握分块矩阵的运算法则.

· 理解向量的概念,熟练掌握向量的加法和数乘运算.

· 了解向量组的线性相关和线性无关、向量组的秩的概念,掌握求向量组的极大无关组的方法.

· 掌握线性方程组有解判别定理,了解线性方程组的特解、一般解、基础解系和通解的概念.

· 熟练掌握用矩阵初等行变换求线性方程组的一般解和通解的方法.

9.1　矩阵概念

在线性代数中,矩阵是一个重要概念,它是从许多实际问题的计算中抽象出来的一个数学概念,是研究线性函数的一个有力工具,它在自然科学、工程技术和经济管理的许多学科中有广泛的应用.

9.1.1　矩阵概念

矩阵是数(或函数)的矩形阵表.在工程技术、生产活动和日常生活中,我们常常用数表表示一些量或关系,如工厂中的产量统计表、市场上的价目表等等.在给出矩阵定义之前,先看几个例子.

例1　在物资调运中,某类物资有三个产地、四个销地,它在某一周期内的调运情况如表9-1所示:

表9-1　调运方案表

调运吨数 / 销地 / 产地	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
A	30	25	17	0
B	20	0	14	23
C	0	20	20	30

如果我们用一个三行四列或 3×4 的数表表示该调运方案，可以简记作

$$\begin{pmatrix} 30 & 25 & 17 & 0 \\ 20 & 0 & 14 & 23 \\ 0 & 20 & 20 & 30 \end{pmatrix},$$

其中每一行表示一个产地调往四个销地的调运量，每一列表示三个产地调到该销地的调运量.

例 2 假设我们记录 3 名学生甲、乙、丙的 3 门课程（数学、语文、英语）的期末考试成绩. 若按百分制评分，期末考试成绩由表 9－2 所示.

表 9－2 期末考试成绩表

课程 / 成绩 / 学生	数学	语文	英语
甲	90	86	95
乙	78	80	70
丙	92	93	96

学生各门课的成绩按原来的排列顺序可以组成一个三行三列或 3×3 的数表，即

$$\begin{pmatrix} 90 & 86 & 95 \\ 78 & 80 & 70 \\ 92 & 93 & 96 \end{pmatrix}.$$

例 3 本章导读中三个工程队的总产值满足的线性方程组整理后得到

$$\begin{cases} x_1 - 0.2x_2 - 0.3x_3 = 500, \\ -0.1x_1 + x_2 - 0.4x_3 = 700, \\ -0.3x_1 - 0.4x_2 + x_3 = 600. \end{cases}$$

如果把未知数 $x_i (i = 1,2,3)$ 前面的系数和常数项按原来顺序写出，也可以得到一个三行四列的数表

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.3 & 500 \\ -0.1 & 1 & -0.4 & 700 \\ -0.3 & -0.4 & 1 & 600 \end{pmatrix},$$

那么，这个数表就可以清晰地表达这一线性方程组.

由上面三个例子可以看到，对于不同的问题可以用不同的数表表示，我们将这些数表统称为矩阵.

定义 9.1 有 $m \times n$ 个数 $a_{ij} (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$ 排列成一个 m 行 n 列，并括以圆括弧（或方括弧）的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 **m 行 n 列矩阵**,简称 **$m \times n$ 矩阵**. 矩阵通常用大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$表示,例如上述矩阵可以记作 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$,有时也记作

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}.$$

其中 a_{ij}称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**第 i 行第 j 列元素**.

特别地,当 $m=1$ 时,矩阵只有一行,即

$$\boldsymbol{A} = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}),$$

称之为**行矩阵**. 当 $n=1$ 时,矩阵只有一列,即

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},$$

称之为**列矩阵**. 当 $m=n$ 时,矩阵的行数与列数相同,即

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

称之为 **n 阶矩阵**,或 **n 阶方阵**.

在 n 阶矩阵中,从左上角到右下角的对角线称为主对角线,从右上角到左下角的对角线称为次对角线.

上述例 1、例 3 中的数表可以称为 3×4 矩阵,例 2 中的数表可以称为 3 阶矩阵或 3 阶方阵.

例 4 下列数据是某次人口普查时从某个城市获得的. 每年有 7% 的市区居民搬到市郊居住,而有 1% 的市郊居民搬入市区居住,这种情况能够用矩阵表示

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0.93 & 0.07 \\ 0.01 & 0.99 \end{pmatrix},$$

这里,第一行第二列中的元素 0.07 表示有 7% 的城市居民搬入市郊居住. 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是一个二阶方阵,对角线元素是 0.93,0.99.

所有元素全为零的 $m\times n$ 矩阵,称为**零矩阵**,记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$或 $\boldsymbol{O}$. 例如