

高等学校教学用书

彈性与塑性理論

C. H. 尼基伏罗夫著

高等教育出版社

高等学校教学用书



彈性与塑性理論

C. H. 尼基伏罗夫著
徐芝綸 吳永祺譯

高等教育出版社

本書系根据苏联国立建筑書籍出版社 (Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре) 出版的技术科学博士尼基伏罗夫 (С. Н. Никифоров) 教授所著“彈性与塑性理論” (Теория упругости и пластичности) 1955 年版譯出。原書經苏联高等教育部审定为土建高等学校教科書。

本書講述彈性与塑性理論的要义, 精簡了某些数学推演, 而着重說明物理概念和工程应用。重要的章节多半附有土木建筑和水工建筑的实用例題, 並將所得的結果与材料力学中已有的初等解答加以比較; 在第四篇实用彈性理論中, 除了板的弯曲以外, 还講述了板的穩定, 並介紹了用有限差計算板的方法, 这是一般教科書里所沒有的。

本書可作为我国高等学校土建水利專業的教学参考書, 也可以供土木建筑和水工建筑設計工程师們的参考。

本書由华东水利学院徐芝綸、吳永禎翻譯。

彈 性 与 塑 性 理 論

С. Н. 尼基伏罗夫著

徐芝綸 吳永禎譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

商務印書館上海廠印刷 新華書店總經售

統一書號 15010·315 開本 850×1168 1/32 印張 9 9/16 字數 227,000

一九五七年四月第一版

一九五七年四月上海第一次印刷

印數 1—6,200

定價 (10) ¥ 1.40

目 录

緒論	9
1. 概說	9
2. 彈性与塑性理論的發展簡史	12
第一篇 彈性理論的基本方程式	
第一章 应力理論	19
§ 1. 数学彈性理論中所采用的基本假定	19
§ 2. 力与应力	20
1. 面力与体力	20
2. 应力的概念	21
3. 应力的記号与符号規則	22
§ 3. 平衡微分方程式。剪应力的互等性	24
§ 4. 在彈性体内一点的应力状态	31
1. 斜面上的应力	31
2. 应力張量的概念	34
§ 5. 主应力。应力状态的不变量	35
第二章 形变理論	38
§ 6. 彈性体内的位移与形变	38
1. 物体的約束。位移	38
2. 線形变与角形变	39
3. 形变張量的概念	44
4. 体积形变	44
§ 7. 形变連續方程式	45
第三章 应力与形变之間的关系	50
§ 8. 关于应力与形变之間的線性关系的一般見解	50

§ 9. 用应力表示形变	52
1. 正应力与線形变之間的关系	52
2. 剪应力与剪变之間的关系	53
3. 应力与体积形变之間的关系	55
§ 10. 用形变表示应力	56

第二篇 应用彈性理論的基本方程式解答問題

第四章 論彈性理論問題的解答	58
----------------------	----

§ 11. 解答彈性理論問題的兩種基本方法	58
1. 彈性理論問題的提法	58
2. 按应力求解彈性理論問題	59
3. 按位移求解彈性理論問題	60
§ 12. 彈性理論基本方程式中变量的变换	61
1. 用位移表明的平衡微分方程式	61
2. 用位移表明的边界条件	63
3. 在常体力情況下函数 θ 和 Θ 的性質	64
4. 在常体力情況下应力表明的連續方程式	66

第五章 最簡單的彈性理論問題	69
----------------------	----

§ 13. 柱形直桿的純弯曲	69
§ 14. 常截面圓桿的扭轉	72
§ 15. 彈性理論問題的解答的唯一性。彈性理論的三类問題。初应力的概念	75

第三篇 彈性理論的平面問題

第六章 用直角坐标解答平面問題	78
-----------------------	----

§ 16. 平面形变	78
§ 17. 广义平面应力状态	82
§ 18. 按应力求解平面問題	85
1. 連續方程式变换为应力的方程式	85
2. 应力函数的引用	87
3. 平面問題的双諧方程式	90
§ 19. 半逆解法。多項式解答	91
§ 20. 平面問題方程式应用於具体例題。悬臂梁一端受力时的弯曲	97

1. 应力函数的选定	97
2. 各任意系数的确定	101
3. 位移的确定	103
§ 21. 森維囊原理的論証	108
§ 22. 簡支梁在勻布載荷下的弯曲	111
§ 23. 三角形截面的壩	117
§ 24. 用三角級数求解平面問題。簡支梁受到依任何方式而变化的載荷时的 弯曲	124
第七章 用極坐标解答平面問題	134
§ 25. 用極坐标表示的平面問題方程式	134
1. 基本的概念和特征	134
2. 平衡微分方程式	135
3. 式位移与形变	139
4. 連續方程式。应力函数	141
5. 应力与形变之間的关系	142
6. 在应力与極角無关的情形下的解答	142
§ 26. 应用基本方程式解答問題。处於均匀压力下的厚壁管的計算 (拉密与伽 道林的問題)	144
§ 27. 曲桿的純弯曲 (郭洛文問題)	149
第八章 平面問題方程式的各种应用	152
§ 28. 被圓孔削弱了的条板的拉伸	152
§ 29. 加在半平面体边界上的集中力的作用	157
1. 应力表达式。应力函数	157
2. 半平面体的水平截面和鉛直截面上的应力	163
3. 多个集中載荷	168
4. 連續勻布載荷	169
5. 關於集中力对半空間体的作用的概念 (布希涅斯克問題)	170
§ 30. 在頂点受載荷的楔	173
1. 楔在頂点受力时的压縮	173
2. 楔在頂点受力时的弯曲	175
3. 楔受別种情形的載荷	178
§ 31. 關於梯形截面壩的計算的概念 (伽辽尔金院士的方法)	180
§ 32. 球形支座和圓柱形滾子的計算	185

1. 關於接触於一點的兩個彈性體的挤压的概念(赫爾茨問題).....	185
2. 兩球體的挤压.....	188
3. 兩個圓柱體的挤压.....	190
§ 33. 兩圓柱體挤压的問題作為彈性理論平面問題求解.....	191

第四篇 實用彈性理論

第九章 板的彎曲	197
----------------	-----

§ 34. 基本概念與假設.....	197
1. 定義.....	197
2. 假設和由假設得來的推論.....	199
3. 板的類型.....	200
§ 35. 板順着柱面的彎曲.....	202
§ 36. 板的純彎曲.....	204
§ 37. 板的扭轉.....	208
§ 38. 板受到垂直於板平面的載荷而彎曲的一般情形.....	212
§ 39. 板的邊界條件.....	216
§ 40. 板的微分方程的解答的最簡單情形。邊界固定的橢圓板.....	218
§ 41. 沿邊界鉸支、受連續載荷的矩形板的彎曲	222
1. 解答的一般程序.....	222
2. 連續勻布載荷.....	227
3. 表格的使用.....	228
§ 42. 兩個對邊用鉸支承而其餘兩邊具有任意邊界條件的矩形板的彎曲.....	231
§ 43. 用有限差的方法計算板.....	234
1. 四階微分方程分解為兩個二階微分方程.....	234
2. 與彈性薄膜的垂度相比擬.....	236
3. 用彈性網代替薄膜,而用有限差方程式代替微分方程式	238
4. 板的計算舉例.....	240
§ 44. 關於圓板的計算的概念.....	245

第十章 板的穩定	248
----------------	-----

§ 45. 關於穩定的基本概念。研究時應用的方法.....	248
§ 46. 板受到橫向載荷和位於中間平面內的力的作用時,中間曲面的微分方程 式.....	250
§ 47. 板的形變勢能.....	252

1. 弯曲时的形变能	252
2. 随同板的弯曲而發生的扭轉的形变能	253
3. 板的总形变能	253
§ 48. 全部边缘支承、在一个方向被力压缩的矩形板的稳定	254
1. 临界载荷的一般表达式	254
2. 在板边的各种不同比值下, 临界载荷的最小值的确定	256
3. 关于合理引用加勁肋条的見解	261
§ 49. 关于在縱边缘的各种不同条件下單向受压的矩形板的稳定的概念	262
§ 50. 沿边界支承的矩形板在剪力作用下的稳定	266

第五篇 塑性理論初步

第十一章 微小彈塑性形变的理論 268

§ 51. 关于塑性問題的兩种不同提法的概念	268
§ 52. 單向应力状态下的基本关系式	271
§ 53. 論金屬的塑性形变的本質	275
§ 54. 在空間应力状态下与应力有关的基本概念	277
1. 应力張量及其分解为球面張量与应力离差. 应力离差的不变量	277
2. 剪应力. 八面体应力. 应力強度	280
3. 关于应力指向張量的概念	284
§ 55. 在空間应力状态下各形变的关系式	284
1. 形变張量及其分解为形变球面張量与形变离差	284
2. 剪变強度. 形变強度	286
3. 关于形变指向張量的概念	287
§ 56. 在彈性範圍內应力与形变之間的关系式的变换	287
§ 57. 塑性条件	289
§ 58. 关于塑性理論的任务的概念. 簡單加载. 主动变形与被动变形	290
§ 59. 微小彈塑性形变的理論	292
§ 60. 卸載定理	295
§ 61. 塑性理論問題的提出. 彈塑性形变理論的基本方程式. 解答方法	298
§ 62. 簡單塑性問題的解答举例	300
1. 桿的純弯曲	300
2. 圓截面桿的扭轉	302

中俄人名对照表 305

緒 論

1. 概 說

按照高等建筑工業学校的教学計劃,彈性与塑性理論是一門学科,其中講述兩方面的初步知識:(1)彈性理論;(2)塑性理論。

彈性理論中研究力对彈性体的作用,分析这时所發生的应力和形变。

最近,在塑性理論的發展上,获得了特別大的成就。在这里,不限於研究物体的彈性应力状态,还考察它在进一步受力而隨着有塑性形变出現和發展时的表現。在高等建筑工業学校中,學習彈性与塑性理論的最終的实用目的是使一个工程师有可能推想物体在通常工作情況下以及在極限情況下的应力状态。这也就使他能够确保建筑物、机械結構的強度、剛度和稳定性,同时也能夠最合理地使用那些修建和制造时所需用的材料。

如我們所見,本学科的任务和材料力学相同,但是,問題的提法却不同。为着了解这一点,試將計算时所遇到的物体按它們的形狀加以考察。

所有一切物体可以按它們的形狀分为四类:



圖 1.

(1) 一个尺寸超过其他兩個(橫向)尺寸很多倍的物体;这就是所謂梁或是桿(圖 1)。

(2) 兩個尺寸远大於第三个尺寸(厚度)的物体。如果这样一个物体是由平行的兩個平面界成的,就称为板,厚度很小的就称为

薄板(圖 2, *a*)。如果它是由曲面界成的,就叫做壳(圖 2, *b*)。有

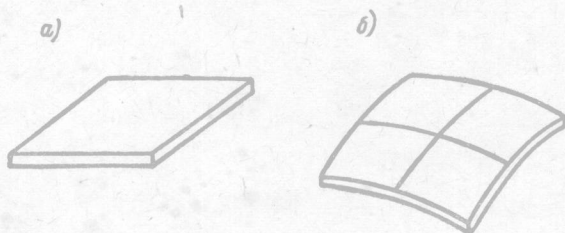


圖 2.

名的莫斯科天文台的圓屋頂就是壳的最簡單的实例:主厅上盖着一个壳——一个沒有肋条好像半个蛋壳的構造。

(3) 三个尺寸都是同階大小的物体,也就是空間体(圖 3. *a*),



圖 3.

例如,机器的大塊基座(圖 3, *b*)、球形支座、短滾輪等等。

(4) 三个尺寸都是不同階大小的物体;这就是近几十年間在建筑結構、造船和航空方面得到广泛应用的所謂薄壁桿(圖 4)。这

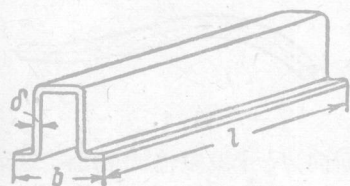


圖 4.

些桿的長度 l 远大於橫截面的特征尺寸 b , 而后者又远大於截面各部分的厚度。

在材料力学中,基本上只研究桿件,而在結構力学中,主要是研究桿件系統(桁架、剛架)。第二类和第三类的物体(平板、壳、空間体)只在彈性理論和塑性理論中加以充分研究。因此,彈性理論和塑性理論所包括的問題的种类要比材料力学和結構力学广泛得

多。可是，彈性理論與材料力學的差別還不止於此，它們研究的方法也不同。

材料力學中容許某些簡化，引用一些假設，例如，平面截面的假設等等。這就大大簡化了計算時所用的公式的形式，但是，得到的解答是近似的而不是完全準確的。

在彈性理論中進行研究，多半都不引用簡化解答的假設。這樣對桿件求得的解答就使我們能夠估計材料力學中得到的解答的準確程度，並確定它們的應用範圍。

有很多種的問題根本不能用材料力學的方法求解（板、殼）。在彈性理論中求解這些問題，或則不引用假設（這時，得出的解答是準確的，但是很複雜），或則引用某些假設，使解答大為簡化。

由此可見，彈性理論與塑性理論有兩個任務：（1）對一些問題的解答給以評價，這些問題的近似解答是已經用材料力學的方法求得的；（2）求出一些問題的解答，這些問題是根本不能用材料力學的方法求解的。

彈性理論分為數學的和實用的兩部分。在第一部分里，用準確的數學方法進行研究，而不引用簡化解答的假設和假定。這些問題在本教科書的下列各篇章中加以考察：“彈性理論的基本方程式”、“最簡單的彈性理論問題”和“彈性理論的平面問題”。

在實用彈性理論里，和在材料力學里一樣，也引用一些簡化研究的假設和假定。這樣，按照解答的準確程度說來，實用彈性理論是接近材料力學的；它屬於彈性理論，只是由於解答問題時所必須應用的數學工具的複雜性。本教科書中的第四篇（討論板）屬於實用彈性理論。

本教科書的最後一篇講述塑性理論。由於教程簡短，在塑性理論方面只給出一些基本概念。

2. 彈性與塑性理論的發展簡史

還在古代，人們就會建造堅固的建築物，製造簡單的機構和工具。可是，關於這些建築物和機構的強度計算，沒有任何資料傳留到現在。只有在文藝復興時代，才出現了最早的記錄，証實當時的學者們企圖理解建築物或機器的作用。最早的關於建築物構件強度的見解出現在賴昂納多·達·芬奇（1452—1519）的筆記里。可是，強度科學的創立者應該算是伽里略·伽里來（1564—1642）。在1638年出版的一本書里，他陳述了自己對於強度的見解。特別可貴的是，伽里來提出了一個完全新的問題：用計算的方法決定一個梁所能支持的載荷。伽里來的分析有錯誤，後來被改正了。

在十七和十八世紀期間，主要是材料力學被發展了。在1660年，虎克建立了拉伸情況下載荷與形變成正比的定律；在1680年，馬立奧特將這一定律應用於梁的彎曲。在1705年，雅可夫·柏努利立出了梁桿彎曲軸的方程式。著名的數學家賴昂納德·歐拉繼續他在梁桿彎曲軸方面的研究，並且創立了桿的縱彎曲理論（1744年）。偉大的俄國學者米哈依爾·瓦西列維奇·羅蒙諾索夫（1711—1765）擬定了唯物主義的物質微粒構造理論，揭露了彈性體的物理本質。世界物質性的概念是建立在他的論証的基礎上的。羅蒙諾索夫設想，物理物體是由具有長寬高和慣性，並處於運動中的基本微粒組成的。後來，庫倫分析了圓軸的扭轉，並建立了關於剪切的的基本概念（1776和1787年）。最後，楊氏在十九世紀初年確立了關於拉伸彈性模數的概念，並實行用實驗方法決定這個模數。他又確切查明了拉伸或壓縮形變與剪切形變之間的區別。這樣，到十九世紀的第二個廿五年開始，已經奠定了材料力學的基礎，同時也為建立空間物體的一般計算理論準備好了基地。

十八世紀末年的工業革命導致工廠的發展和機器的使用，這

就要求解決有关機器和建築物強度的一些實際問題。這種問題的數目在增長着而且它們的性質越來越多样化,這就迫切需要創立一個一般性的理論來解決它們。彈性理論就是這種一般性的理論。

第一個致力於建立空間物體一般平衡方程式的研究人是法國的工程師兼科學家納維葉。在 1821 年,他在巴黎科學院作了關於他的著作的報告,而這就創始了一門新的科學——彈性理論。和納維葉同時,法國數學家歌西也致力於同樣的問題。在 1822 年到 1827 年的期間,建立了關於“在物體內一點的應力狀態”和“形變成分及其與位移的關係”的概念,引出了關於形變主軸的概念。拉密,那時正在彼得堡科學院工作,借助於應力成分與形變成分之間的線性關係,從平衡方程式中消去了應力成分,結果得到位移投影所應當滿足的方程式。M. B. 奧斯特羅格拉德斯基院士 (1801—1861) 的研究——彈性介質中由於這介質的某一狹小區域內發生的擾動所引起的振動——對於彈性理論的發展是重要的。

這樣,納維葉、歌西、拉密、奧斯特羅格拉德斯基和其他一些學者(數學家和力學家)努力奠定了彈性理論這門新科學的基礎。起初,彈性理論被用來研究一般的物理問題,例如光在彈性介質(以太)中的傳播,地殼中由於冷卻而引起的應力等等。彈性理論的方法還不完善,也就沒有可能來解決技術方面提出的問題。因此,工程師們只得利用材料力學和建築力學的方法,並且繼續發展和改進它們。

在俄國,十九世紀初葉是和技术教育的廣泛發展相關聯的。1809 年,在彼得堡開設了交通工程學院,不久又開設了工藝學院,然後,在彼得堡以及其他一些城市又開設了許多其他的技術學校。這就大大促進計算理論學科的發展與教學灌輸。有很長一段時間(從 1828 年到 1860 年),M. B. 奧斯特羅格拉德斯基在彼得堡各

技术学校里講授数学和力学。他关心地注視着数理实用科学的發展,包括彈性理論在內,本人並从事研究連續介質力学方面的問題。和实用技术問題最密切相关的一些数学力学問題,特別引起 M. B. 奥斯特罗格拉德斯基的注意,这就使得他和工程界很接近。在他的学生中間,很多都成为高才的科学家和工程师,並繼續發展材料力学和建筑力学方面以及彈性理論方面有关計算理論的問題。Д. И. 茹拉夫斯基 (1821—1871) 是 M. B. 奥斯特罗格拉德斯基的高才学生之一。他曾被委托設計和建造那时正在修筑中的彼得堡—莫斯科鉄路上的桥梁。Д. И. 茹拉夫斯基在天才地拟出桥梁的新式样的同时,又創立了桁架的計算理論,他确定弯曲了的梁內有剪应力存在,並且导出公式来确定它。

彈性理論的方法还不能充分应用於工程問題的解答,因为基本方程式只能按位移求解。法国科学家森維囊發現了形变成分之間的恆等关系式(1855 年),而这就給出可能性来建立应力成分所应当滿足的一組完备的方程式。求解这一組方程式,就能直接求得应力而不必首先決定位移。这就使得彈性理論对具体工程問題的应用大为簡化。

在十九世紀的后半期,許多在技术上具有重大意义的問題得到了解答。例如,森維囊在 1855 年解答了橫截面为任意形狀(矩形、工字形等等)的桿的扭轉問題。然后,他又解决了直桿(作为三維物体)弯曲的問題。

俄国院士 A. B. 伽道林(1818—1892)詳細地分析了炮筒在射击时發生的应力,拟定了並在理論上論証了外面套上圓环的炮筒的新構造。这样的構造大大提高了炮筒的強度,因此, A. B. 伽道林的研究很快就在許多国家被应用了。彈性理論被应用到十分具体的工程問題上,这是最初几次中的一次。

彼得堡工艺学院教授 X. C. 郭洛文在 1882 年用彈性理論的

方法进行了曲桿(拱)的精确計算。他的解答給出可能性来估計当时所应用的近似解答的精确度,並查明这近似解答的应用范围。

在十九世紀末年被解決了的其他一些問題中間,對於建筑师最重要的是:半平面体或半空間体在集中力作用下的压力分布問題(布希涅斯克問題)和兩物体互压时在接触处發生的应力的問題(赫尔茨問題)。

在十九世紀末年的俄国科学家中間,必須提到 Ф. С. 雅兴斯基(1856—1899),他曾經致力於很多的实用彈性理論問題。最傑出的是他在压桿、敞頂桥梁的翼緣和多格桁架的格桿的穩定性方面的著作。

鋼筋混凝土的广泛使用標誌了二十世紀初叶。与此同时,也出現了一些新的構造形式:板、無梁頂盖、簡單形式的壳。俄国的和外国的一些科学家們都从事拟定这种構造的計算方法。

俄国造船工程师 И. Г. 布勃諾夫的工作具有最重大的意义,他拟定了船舶構造中所采用的薄板在各种載荷和不同边界条件下的計算方法。

在偉大的十月社会主义革命之后,我国(苏联——譯註)在彈性理論方面的研究达到了極大的規模。技术的發展,飞行,像伏尔霍夫河列宁水电站和德聶泊尔河列宁水电站那样巨大建筑物的建造,很多工厂的建造,都要求解決很多新的复杂的技术問題。像中央气液体动力学研究所、中央工業建筑科学研究所、全苏航空机械制造研究所等等这样大規模的研究機構被建立起来,罗致了国内一些出色的科学家們进去工作。

我們只举出對於建筑工程师有重要意义的某些計算問題。

在理論方面,佔据中心地位的是寻求彈性体平衡微分方程組的通解。在1930年,Б. Г. 伽辽尔金院士給出这样的解答:这解答是用三个独立的双諧函数表示的。Б. Г. 伽辽尔金曾把这个解

答应用到許多重要的实际問題上,例如一些水工結構的計算,在垂直於板面而按任意規律分布的載荷作用下厚板的計算。

苏联科学院通訊院士 И. Ф. 巴普柯維奇繼續 Б. Г. 伽辽尔金的研究,获得了重要的新的成果。他對於彈性体平衡微分方程組提出了自己的、包含着四个双諧函数的形式的解答,並把这解答应用到平面問題上和对称於一軸的形变問題上。

在 1946—1950 年, М. М. 費洛年柯-鮑罗几契教授拟定了一个首創的方法,用他所提出的特种函数,确定空間体(稜柱体)內的应力。

苏联科学家發展了利用复变数函数論求解平面問題的方法。Г. Б. 柯洛索夫还在 1909 年就首創了这个方法,而它的严格論証以及在各种問題上的应用却是 Н. И. 木斯海立什維立院士提出的(1933 年)。

在 1913 年, В. Л. 吉尔皮切夫教授开始运用光学方法(借助於偏極光)測定平面应力状态下的透明模型內的应力。这一方法給出可能性来校核許多問題,而且有助於求得一些在理論上还没有解答出来的新問題的解答。这一方法很广泛地被运用着,並且很多研究機構現在都有了光学實驗室。

很多苏联科学家研究过空間接触問題。例如, Н. М. 別倆也夫考察了關於兩個圓柱体或橢球体相接触的問題, И. Я. 施塔也尔芒教授給出了接触問題的創造性的解答等等。

苏联科学家在薄壁構件(薄板和壳)計算理論方面的成就是很大的。与此有关的一些問題的解答,對於工程实际說来,具有特別重要的意义。

还在革命以前的时代, И. Г. 布勃諾夫、С. И. 提摩盛科、А. Н. 季尼克、Л. С. 雷本尚、Б. Г. 伽辽尔金以及其他的人就發表过許多重要的著作。在这些著作里,提出了一些新的研究方法,並且