



Studienbücher
der technischen
Wissenschaften

Grundlagen der **Systemtheorie** für Nachrichtentechniker

Dieses Buch behandelt Methoden der Systemtheorie, wobei auf eine strengere mathematische Darstellung bewußt verzichtet wird. Wesentlicher Bestandteil des Buches sind die vielen voll durchgerechneten Beispiele, bei denen viele Aussagen nochmals erklärt und plausibel gemacht werden und die der Vertiefung und Einübung des Stoffes dienen. Den mathematisch nicht so informierten Lesern wird dadurch geholfen, daß viele Begriffe aus der Mathematik nochmals kurz angegeben und ggf. erläutert werden.

Neben einer Einführung besteht das Buch aus 5 Abschnitten. Im besonders wichtigen 1. Abschnitt wird zunächst der Dirac-Impuls eingeführt, und es werden die wichtigsten Systemeigenschaften besprochen. Ausgehend von der hier eingeführten Übertragungsfunktion wird ein Zusammenhang zur komplexen Rechnung hergestellt. Weiterhin nimmt das Duhamel- oder Faltungsintegral einen großen Raum ein. Die Abschnitte 2–4 behandeln die Fourier- und die Laplace-Transformation mit ihren Anwendungen in der Systemtheorie sowie idealisierte Übertragungssysteme. Im Abschnitt 5 werden zeitdiskrete Signale und Systeme sowie die z-Transformation behandelt.

Hanser

ISBN 3-446-13442-5





Studienbücher
der technischen
Wissenschaften

Otto Mildenberger

Grundlagen der

Systemtheorie

für

Nachrichtentechniker

Hanser



TN91
M7

8263921

Grundlagen der **Systemtheorie** für Nachrichtentechniker

von Prof. Dr.-Ing. Otto Mildenberger

Mit 144 Abbildungen und vielen Beispielen



E8263921



Carl Hanser Verlag München Wien

847

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Mildenberger, Otto:

Grundlagen der Systemtheorie für Nachrichtentechniker/von Otto Mildenberger. – München;
Wien: Hanser, 1981.

(Studienbücher der technischen Wissenschaften)

ISBN 3 446-13442-5.

Alle Rechte vorbehalten

© 1981 Carl Hanser Verlag, München, Wien

Gesamtherstellung: Courier Druckhaus Ingolstadt

Printed in Germany

Vorwort

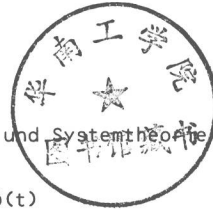
Dieses Buch ist aus einem Vorlesungsmanuskript für eine 4-stündige Vorlesung Systemtheorie an der Fachhochschule Wiesbaden entstanden. Ziel des Buches ist es, eine erste Einführung in die Grundlagen der Systemtheorie zu vermitteln. Es ist als Begleitbuch zu Vorlesungen und auch für das Selbststudium konzipiert.

Eine Einführung in die Systemtheorie ist ohne einen gewissen mathematischen Aufwand nicht möglich, es wurde aber versucht, mit möglichst geringen mathematischen Voraussetzungen auszukommen. Häufig enthält das Buch ausführlichere Erklärungen zu Ableitungen, wie dies bei Büchern über die Systemtheorie sonst üblich ist. Andererseits wird oft auf eine mathematisch strenge Durchführung von Beweisen zugunsten von Plausibilitätserklärungen verzichtet. Zum guten Verständnis des Stoffes sollen auch die zahlreichen durchgerechneten Beispiele dienen.

Das Buch gliedert sich in 5 Abschnitte. Im 1. Abschnitt wird zunächst der Dirac-Impuls eingeführt und es werden die wichtigsten Systemeigenschaften besprochen. Nach einer Einführung der Begriffe Übertragungsfunktion und Impulsantwort wird die Berechnung von Systemreaktionen mit dem Duhamel- oder Faltungs-Integral behandelt. Im 2. Abschnitt wird die Fourier-Transformation eingeführt, sie wird zur Beschreibung von Signalen und bei der Berechnung von Systemreaktionen angewandt. Die Fourier-Transformation ist auch ein wichtiges Hilfsmittel bei der Behandlung von idealisierten Übertragungssystemen, denen der Abschnitt 3 gewidmet ist. Der Abschnitt 4 befaßt sich mit der Laplace-Transformation und deren Anwendung in der Systemtheorie. Schließlich werden im 5. Abschnitt die immer wichtiger werdenden zeitdiskreten Systeme und Signale besprochen. In diesem Abschnitt wird auch die z-Transformation eingeführt.

Inhalt

0.	Einleitung	11
0.1	Aufgaben der Systemtheorie	11
0.2	Die Signale	12
0.3	Normierung	13
1.	Die wichtigsten Grundlagen aus der Signal- und Systemtheorie	17
1.1	Die Impulsfunktion oder der Dirac-Impuls $\delta(t)$	17
1.1.1	Eine wichtige Eigenschaft der Impulsfunktion	20
1.1.2	Die Sprungfunktion $s(t)$ und ihr Zusammenhang zu $\delta(t)$	22
1.1.3	Die Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion	29
1.1.4	Zusätzliche Beispiele zum Abschnitt 1.1	31
1.2	Systemeigenschaften	33
1.2.1	Linearität	34
1.2.2	Zeitinvarianz	37
1.2.3	Stabilität	38
1.2.4	Kausalität	39
1.3	Die Übertragungsfunktion	40
1.3.1	Definition der Übertragungsfunktion	40
1.3.2	Der Zusammenhang zur komplexen Rechnung	43
1.4	Das Faltungs- oder Duhamel-Integral	48
1.4.1	Die Sprungantwort und die Impulsantwort	48
1.4.2	Eine Ableitung des Duhamel-Integrals	51
1.4.3	Beispiele zur Auswertung des Duhamel-Integrals	54
1.4.4	Der Zusammenhang zwischen Impulsantwort und Übertragungsfunktion	65
1.4.5	Ein Stabilitätskriterium	68
1.5	Zusätzliche Beispiele	69
2.	Die Fourier-Transformation und Anwendungen	73
2.1	Periodische Funktionen	73
2.2	Die Grundgleichungen der Fourier-Transformation	77
2.3	Zusammenstellung von wichtigen Eigenschaften der Fourier-Transformation	79



2.3.1	Die Existenz von Fourier-Transformierten	79
2.3.2	Darstellungsarten für $F(\omega)$	80
2.3.3	Zusammenstellung weiterer Eigenschaften	81
2.4	Grundlegende Beispiele und Folgerungen aus der Fourier-Transformation	84
2.4.1	Die Fourier-Transformierte von $\delta(t)$	84
2.4.2	Die Fourier-Transformierten der Signum- und der Sprungfunktion	86
2.4.3	Fourier-Transformierte von periodischen Signalen	90
2.4.4	Impulsbreite und Bandbreite	93
2.4.5	Die Fourier-Transformierte von $f(t) = s(t)e^{-at}$	96
2.4.6	Zusätzliche Beispiele	97
2.5	Die Berechnung von Systemreaktionen mit der Fourier-Transformation	100
2.5.1	Systemreaktionen von Systemen mit einem Energiespeicher	102
2.5.2	Systeme mit zwei Energiespeichern	111
2.5.3	Weitere Beispiele	116
2.6	Das Abtasttheorem	119
3.	Ideale Übertragungssysteme	125
3.1	Dämpfung und Phase	125
3.2	Die verzerrungsfreie Übertragung	127
3.3	Der ideale Tiefpaß	130
3.3.1	Die Übertragungsfunktion	130
3.3.2	Impuls- und Sprungantwort	132
3.3.3	Beispiele	135
3.4	Der ideale Hochpaß	139
3.5	Der ideale Bandpaß	141
3.5.1	Übertragungsfunktion und Impulsantwort	141
3.5.2	Die Reaktion eines Bandpasses auf amplitudenmodulierte Signale	143
4.	Die Laplace-Transformation und einige Anwendungen in der Systemtheorie	149
4.1	Die Grundgleichungen und einführende Beispiele	149
4.1.1	Die Grundgleichungen	149
4.1.2	Einführende Beispiele, der Konvergenzbereich	151
4.1.3	Zusammenhang zwischen Fourier- und Laplace-Transformation	155

4.2	Zusammenstellung von wichtigen Eigenschaften der Laplace-Transformation	157
4.3	Rationale Laplace-Transformierte	159
4.3.1	Das Pol-Nullstellenschema	159
4.3.2	Die Rücktransformation bei einfachen Polstellen	161
4.3.3	Die Rücktransformation bei mehrfachen Polen	167
4.4	Die Berechnung von Systemreaktionen mit der Laplace-Transformation	170
4.4.1	Voraussetzungen und die Methode	170
4.4.2	Beispiele	172
4.5	Die Berechnung von Netzwerkreaktionen bei gegebenen Anfangsbedingungen	175
4.5.1	Differentiation im Zeitbereich	175
4.5.2	Die Problemstellung	179
4.5.3	Berechnung am Beispiel von Netzwerken mit zwei Energiespeichern	182
5.	Zeitdiskrete Systeme	189
5.1	Einleitung	189
5.2	Die Faltungssumme	192
5.3	Die Übertragungsfunktion	198
5.4	Die z-Transformation	201
5.4.1	Die Grundgleichungen und einführende Beispiele	201
5.4.2	Zusammenstellung von wichtigen Eigenschaften der z-Transformation	205
5.4.3	Rationale z-Transformierte	206
5.4.4	Die Berechnung von Systemreaktionen mit der z-Transformation	211
5.5	Die Beschreibung diskreter Systeme durch Differenzengleichungen	214
5.5.1	Differenzengleichungen 1. und 2. Ordnung	214
5.5.2	Der allgemeine Fall	219
5.6	Der Ersatz kontinuierlicher durch diskrete Systeme	220
5.6.1	Der Ersatz für bestimmte Eingangssignale	220
5.6.2	Die Bilinear-Transformation	222
	Anhang: Korrespondenzen-Tabellen	227
	Verzeichnis der wichtigsten Formelzeichen	229
	Literaturverzeichnis	230
	Sachregister	231

0 Einleitung

0.1 Aufgaben der Systemtheorie

Übertragungssysteme der Nachrichtentechnik sind i.a. komplizierte Anordnungen, deren Analyse häufig außerordentlich kompliziert oder sogar praktisch unmöglich ist. Darüber hinaus ist die Rechnung oft unanschaulich und läßt nicht wesentliche Eigenschaften der Übertragungssysteme erkennen. Dies gilt oft auch noch, wenn das Übertragungssystem aus einer Zusammenschaltung von Teilsystemen besteht und die Analyseaufgabe sich im wesentlichen auf eine Analyse der Teilsysteme reduziert.

In der Systemtheorie werden Übertragungssysteme durch wenige (idealisierte) Kenngrößen beschrieben, die es gestatten, bei beliebigen vorgegebenen Eingangssignalen, die Systemreaktionen zu berechnen. Die Übertragungsfunktion eines (linearen) Systems ist eine solche Kenngröße und beschreibt das System im oben genannten Sinne vollständig.

Die das System beschreibenden Kenngrößen (z.B. Übertragungsfunktionen) sind unabhängig von der tatsächlichen Realisierung. Man kann z.B. einen Tiefpaß auf sehr verschiedene Arten realisieren, etwa als Schaltung mit passiven Bauelementen (passives Filter) oder unter Verwendung von aktiven Bauelementen (aktives Filter). Auch eine mechanische Anordnung kann zur Realisierung verwendet werden (mechanisches Filter). Wenn Ein- und Ausgangssignale elektrische Größen sein sollen, benötigt man in diesem Fall noch geeignete Signalwandler. Schließlich ist auch eine digitale Realisierung des Tiefpasses denkbar (digitales Filter), wenn analoge Ein- und Ausgangssignale verlangt sind, benötigt man auch hier geeignete Signalwandler. Alle diese verschiedenartig realisierten Systeme haben eines gemeinsam, sie reagieren auf gleiche Eingangssignale mit gleichen Ausgangssignalen und rechtfertigen daher eine gemeinsame Beschreibungsort.

In der Systemtheorie beschreibt man die Systeme durch möglichst einfache Kenngrößen, die eine einfache Berechnung gestatten und natürlich andererseits eine hinreichend gute Annäherung an die wirklichen Verhältnisse gewährleisten. Man kann auf diese Art vergleichsweise einfache Entwicklungsrichtlinien für zu konzipierende Systeme finden, oder die grundsätzlichen Eigenschaften eines bestehenden Systems ermitteln.

Das vorliegende Buch beschränkt sich auf die Behandlung linearer Systeme, die in der Nachrichtentechnik besonders wichtig sind. Oft ist es auch möglich, nichtlineare Systeme durch lineare anzunähern, z.B. dann, wenn im Betrieb nur kleine Aussteuerungen von Bedeutung sind (Kleinsignalbetrieb). Systeme in der Regelungs- und auch der Meßtechnik sind oft Zusammenschaltungen aus linearen und nichtlinearen Teilsystemen, so daß auch hier Kenntnisse über lineare Systeme wichtig sind.

0.2 Die Signale

Eine zentrale Rolle in der Systemtheorie spielt die (mathematische) Beschreibung der Signale. In [6] wird ein Signal in der Nachrichtentechnik als Darstellung einer Nachricht durch physikalische Größen definiert. Signale, die eine besonders einfache mathematische Beschreibung gestatten und die i.a. technisch leicht erzeugt werden können, werden dort Elementarsignale genannt.

Ein Beispiel für ein Elementarsignal ist die Sprungfunktion. Sie hat die Eigenschaft, daß sie 0 für alle Zeiten $t < 0$ und 1 für alle Zeiten $t > 0$ ist. Durch die Sprungfunktion kann man beispielsweise eine Eingangsspannung für ein System annähern, die für $t < 0$ praktisch verschwindet und die bei $t = 0$ sehr schnell auf 1 (V) ansteigt und diesen Wert dann beibehält.

Aus Elementarsignalen lassen sich oft Signale allgemeinerer Art zusammensetzen. So kann bekanntlich ein periodisches Signal durch eine Summe von Sinusschwingungen beliebig genau angenähert werden.

Von großer Bedeutung für die Signalbeschreibung ist die Fourier-Transformation (2. Kapitel). Durch sie wird einer Zeitfunktion $f(t)$ eine von der Frequenz abhängige Funktion $F(\omega)$ umkehrbar eindeutig zugeordnet. Man bezeichnet $F(\omega)$ auch als Spektrum. Je nach Zweckmäßigkeit kann man das Signal im Zeitbereich (durch $f(t)$) oder im Frequenzbereich (durch $F(\omega)$) beschreiben. Bei zeitdiskreten Signalen tritt die z-Transformation an die Stelle der Fourier-Transformation (5. Kapitel).

In diesem Buch befassen wir uns ausschließlich mit determinierten Signalen. Dies sind Signale mit völlig bekanntem Verlauf, die in günstigen Fällen durch geschlossene mathematische Ausdrücke beschrieben werden können.

Im Gegensatz zu determinierten Signalen stehen zufällige oder stochastische Signale. Während man bei determinierten Signalen angeben kann, wie groß der

Signalwert zu einem bestimmten Zeitpunkt sein wird, ist dies bei zufällig verlaufenden Signalen nicht möglich. Die Beschreibung von Zufallssignalen erfolgt mit Mitteln der Wahrscheinlichkeitsrechnung (vgl. z.B. [9], [10]). Oft kann man Zufallssignale mit Hilfe von "Kennfunktionen" beschreiben (z.B. Autokorrelationsfunktionen, Leistungsdichtefunktionen), die auch meßtechnisch ermittelt werden können.

Im Sinne der Informationstheorie (vgl. z.B. [2]) kann man durch völlig determinierte Signale keine Informationen übertragen. Ein determiniertes Signal ist ja in seinem Verlauf völlig bestimmt, eine zunächst unbekannte Nachricht kann nicht in ihm enthalten sein. Trotzdem spielen determinierte Signale in der Systemtheorie eine große Rolle. Es ist meist wesentlich einfacher, das Übertragungsverhalten von Systemen mit determinierten Signalen mathematisch oder experimentell zu untersuchen. Determinierte Signale können oft als Ersatz für Zufallssignale verwendet werden. Schließlich setzt die Beschäftigung mit der "Statistischen Systemtheorie" Kenntnisse voraus, die auf der Beschreibung mit determinierten Signalen basieren.

0.3 Normierung

In der Systemtheorie rechnet man in der Regel mit dimensionslosen Größen. Dies kann im einfachsten Fall dadurch erreicht werden, daß man Ströme auf 1 A, Spannungen auf 1 V, Zeiten auf 1 s usw. bezieht. Man spricht in diesem Fall von einer Normierung (vgl. z.B. [2]).

Auf diese Weise werden die abgeleiteten Beziehungen einfacher und zugleich allgemeiner. Die für eine "elektrische Übertragung" abgeleiteten Beziehungen kann man dann ggf. auch zur Beschreibung einer "akustischen Übertragung" anwenden.

Durch die dimensionslose Rechnung gehen Größengleichungen in Zahlenwertgleichungen über und eine Dimensionskontrolle der Ergebnisse ist nicht mehr möglich.

An einigen Stellen in diesem Buch wird eine Normierung in etwas allgemeinerer Art durch die Einführung von Bezugsgrößen verwendet. Dort, wo dies geschieht, erfolgen Hinweise auf diesen Abschnitt. Der folgende Teil dieses Abschnittes kann daher bei der ersten Lektüre auch übergangen werden.

Um Verwechslungen zu vermeiden, kennzeichnen wir hier Bezugsgrößen mit dem Index "b", die wirklichen (dimensionsbehafteten) Größen durch den Index "w" und die normierten durch den Index "n". Sind z.B. U_b und I_b die Bezugsgrößen für Spannung und Strom, so sind

$$U_n = U_w / U_b, \quad I_n = I_w / I_b$$

die entsprechenden normierten Größen.

Aus der Beziehung

$$R_w = \frac{U_w}{I_w} = \frac{U_n U_b}{I_n I_b} = R_n R_b$$

ergibt sich ein Bezugswiderstand $R_b = U_b / I_b$ und der normierte Widerstand

$$R_n = \frac{U_n}{I_n} = \frac{R_w}{R_b}.$$

Von größerer Bedeutung ist die Normierung dieser Art bei Schaltungen. Um eine Schaltung zu normieren, führt man zusätzlich eine Bezugskreisfrequenz ω_b ein, d.h.

$$\omega_n = \frac{\omega_w}{\omega_b}.$$

Alle Impedanzen eines Netzwerkes werden auf den Bezugswiderstand R_b normiert. Die Tabelle 0.1 zeigt, wie man die normierten Bauelemente findet. In der letzten Spalte der Tabelle sind Gleichungen für die Entnormierung angegeben.

Berechnet man die Reaktion einer normierten Schaltung auf ein Eingangssignal, so erhält man dieses in Abhängigkeit von der normierten Zeit t_n . Das wirkliche Zeitverhalten findet man durch die Beziehung

$$t_w = t_n / \omega_b,$$

d.h. $t_b = 1 / \omega_b$ ist die Bezugsgröße der Zeit.

Tabelle 0.1: Gleichungen zur Normierung und Entnormierung der Bauelemente eines Netzwerkes (ω_b : Bezugskreisfrequenz, R_b : Bezugswiderstand)

wirkliches Bauelement	wirkliche Impedanz	normierte Impedanz	normiertes Bauelement	Entnormierung
R_w	R_w	$\frac{R_w}{R_b}$	$R_n = \frac{R_w}{R_b}$	$R_w = R_n R_b$
L_w	$j \omega_w L_w$	$\frac{j \omega_w L_w}{R_b} = j \omega_n \frac{\omega_b L_w}{R_b}$	$L_n = \frac{\omega_b L_w}{R_b}$	$L_w = L_n \frac{R_b}{\omega_b}$
C_w	$\frac{1}{j \omega_w C_w}$	$\frac{1}{j \omega_w C_w R_b} = \frac{1}{j \omega_n \omega_b C_w R_b}$	$C_n = \omega_b C_w R_b$	$C_w = C_n \frac{1}{\omega_b R_b}$

Hinweis zur Erklärung:

Bei einer Sinusschwingung als Ein- bzw. Ausgangssignal muß gelten

$\sin \omega_w t_w = \sin \omega_n t_n$. Daraus folgt $\omega_w t_w = \omega_n t_n$ und mit $\omega_n = \omega_w / \omega_b$ erhält man $t_w = t_n / \omega_b$.

Gibt man allen Bezugsgrößen den Wert 1, d.h. $U_b = 1 \text{ V}$, $\omega_b = 1 \text{ s}^{-1}$ usw., dann geht diese Art der Normierung in die anfangs besprochene über, bei der die wirklichen Größen zahlenwertmäßig den normierten entsprechen. Im weiteren wird auf Indizes zur Unterscheidung zwischen normierten und nicht normierten Größen verzichtet. In Zweifelsfällen erfolgen Hinweise.

