

科學圖書大庫

分析基礎課程—微積分

譯者 繆龍驥 曾俊宏

徐氏基金會出版

世界圖書出版公司

分析基礎課程—微積分

譯者 繆龍驥 曾俊宏

徐氏基金會出版
世界圖書出版公司

分析基础课程——微积分
W. 迈耶等著 缪龙骧等译

徐氏基金会 出版
世界图书出版公司

北京朝内大街137号

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1989年12月第一版 开本：850×1168 1/32
1989年12月第一次印刷 印张：9.5

ISBN 7-5062-0481-5

定价：5.90元

经徐氏基金会允许，世界图书出版公司重印，1990。

限国内发行

譯 序

本書係譯自德國W. Meyer, B. Reiners, H. Scheid, G. Taetz, H. Wellstein 等人所著之 Grundkurs Analysis, 內容為微積分基本理論及應用, 原供德國高級中學分析基礎課程教材之用, 由於本書取材豐富, 編排適當, 且深入淺出, 解說清晰, 特予以譯出, 供國內高中及大學同學自習或參考使用。

譯 者

符 號

$\mathbb{N}$ 自然數集合

$\mathbb{Z}$ 整數集合

$\mathbb{R}$ 實數集合

$\mathbb{N}_0$ 自然數連 0 的集合

$\mathbb{Q}$ 有理數集合

$\mathbb{R}^+$ 正實數集合

區 間：

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$[a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$[a; \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$

$$]-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

$$]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$]a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$]a; \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

$$]-\infty; a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, f: D_1 \rightarrow \mathbb{R}$$

函數 f ，有定義域 D 或 D_1

$$f+g: x \rightarrow f(x)+g(x)$$

函數 f 與 g 的和

$$f-g: x \rightarrow f(x)-g(x)$$

函數 f 與 g 的差

$$a \cdot f: x \rightarrow a \cdot f(x)$$

函數 f 的 a 倍， a 是實數

$$f \cdot g: x \rightarrow f(x)g(x)$$

函數 f 與 g 的積

$$\frac{f}{g}: x \rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$$

函數 f 與 g 的商

$$\frac{1}{f}: x \rightarrow \frac{1}{f(x)}$$

函數 f 的倒函數

$$g \circ f: x \rightarrow g(f(x))$$

函數 f 與 g 的合成

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

函數 f 對於 x 趨於正無限大或負無限大的極限值

$$f(x) \rightarrow \pm \infty \text{ 對於 } x \rightarrow \pm \infty$$

函數 f 的無限極限

$$f'(x_0)$$

函數 f 在點 x_0 的導數

$$x \rightarrow f'(x)$$

函數 f 的導函數

$$x \rightarrow f''(x)$$

函數 f 的二階導函數

$x \rightarrow f'''(x), x \rightarrow f^{(n)}(x)$

$\int_a^b f(x) dx$

$F_a: x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$

$[F(x)]_a^b$

$\sin$ 正弦函數

$\cos$ 餘弦函數

$\tan$ 正切函數

$x \rightarrow e^x$ 自然指數函數, e 函數

e 尤拉 Euler 數

$x \rightarrow \operatorname{sgn} x$ 符號函數

$x \rightarrow [x]$ 整數部分函數

函數 f 之三階及高階導函數

函數 f 在 $[a, b]$ 上的積分函數

$F_a(a) = 0$ 的積分函數的確實表示
差 $F(b) - F(a)$ 的簡寫

$\arcsin$ 反正弦函數

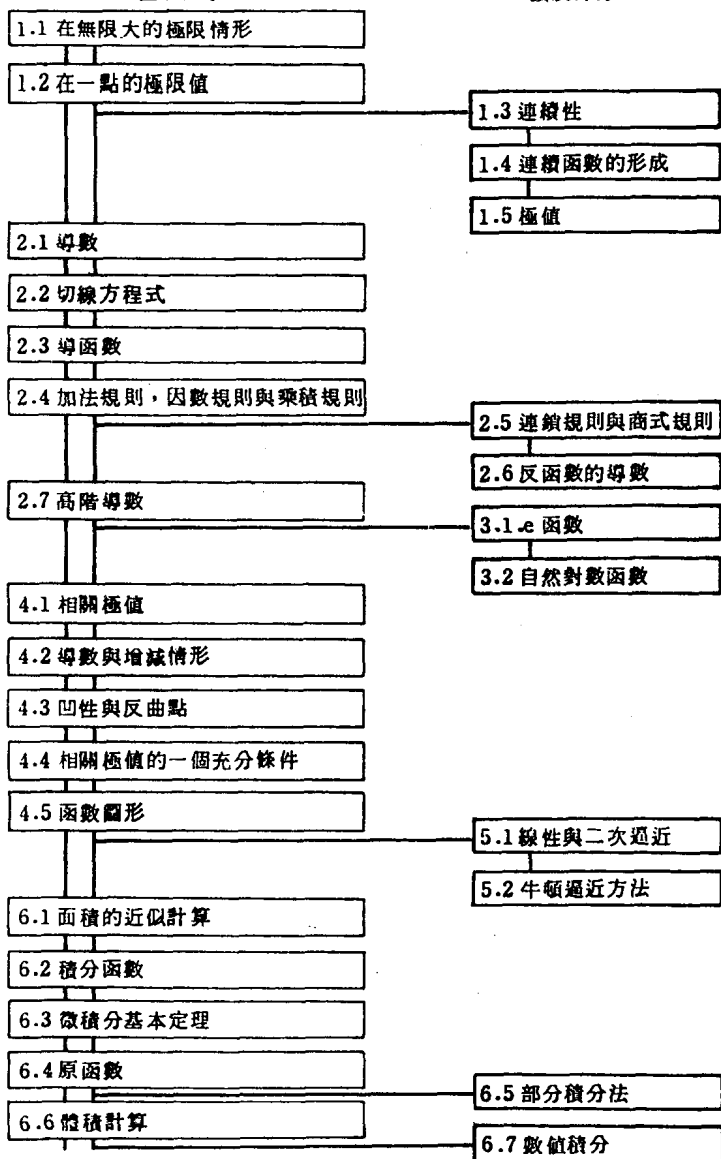
$\arccos$ 反餘弦函數

$\arctan$ 反正切函數

$x \rightarrow \ln x$ 自然對數函數

$x \rightarrow |x|$ 絕對值函數

$x \rightarrow r(x)$ 捨入函數



前 言

本書主要在數學分析的概念與方法上作應用方面的介紹。爲了複習、加強及檢驗理解的目的，在起首先編列第0章，在其中將必要的基礎知識以精簡的形式彙列。這一章使得這本書在教學計畫中沒有導引課程時也可使用。

前頁中的流程圖顯示這個課程的核心與擴展的可能性，在跳過若干章節時，不可避免會使以後章節中的習題與前面脫節，但是這些可以往前查考。

• 書中各節是依主題完整的學習單元設計，其中各學習單元的構造應能給予在方法上發展的激勵：

- (1) 預備問題 (1,2) 應使得預備知識靈活，並帶入一場主題導向的討論。將這些放到秤金的天平上去衡量，是不合適的。
- (2) 一個或幾個導引例題，多數來自應用範圍，畫出所要介紹數學概念的意義，並且顯示數學概念使得問題的解答成爲可能。
- (3) 引渡的課文將例題中一般有效的事項抽出，並將之編成數學形式。
- (4) 各節的中心內容，例如定義或定理，都加框列出。
- (5) 其後編有注解，(4)中項目的補充指示、證明、擴展、概念範圍。
- (6) 一個或幾個範例，多數以正式形式列出，指示如何處理所討論的內容。（在此“例”這個字不是以紅色印出）所作解答盡可能簡單，但學生應給予補充完整。
- ❷ 習題部分包含一般的、應用的及深入的練習。以紅色數字標示的習題較難，需要較多的計算工作或處理附加的資料。至於特別只能用

小型計算器解答的問題都已放棄，而在問題中用到小型計算器的地方則予以明白指出。當然有時一個能作程式的小型計算器能夠減輕計算工作。

在(2)至(6)中的項目在許多節中加倍編列，一個範例則可能同時也是一個導引例題。

著 者

目 錄

譯 序	I
符 號	II
內容流程	VI
前 言	VII
0. 基本知識	1
0.1 數與數對	1
0.2 函數與其圖形	4
0.3 線性函數與算術數列	5
0.4 二次函數	8
0.5 多項式函數	10
0.6 三角函數	12
0.7 指數函數與幾何數列	16
0.8 函數的計算	18
0.9 反函數	19
0.10 函數的合成	24
0.11 線性坐標變換	25

0.12 函數的零位	26
0.13 實數序列	28
0.14 複習問題	32
1. 極限值與連續性	35
1.1 在無限大的極限情形	35
1.2 在一點的極限值	41
1.3 連續性	48
1.4 連續函數的形成	53
1.5 極 值	59
2. 微分學	60
2.1 導 數	66
2.2 切線方程式	75
2.3 導函數	82
2.4 加法規則、因數規則與乘積規則	93
2.5 連鎖規則與商式規則	103
2.6 反函數的導數	110
2.7 高階導數	115
3. 指數函數與自然對數函數	120
3.1 e 函數	120
3.2 自然對數函數	129
4. 曲線討論	135
4.1 相關極值	135

4.2	導數與增減情形	145
4.3	凹性與反曲點	154
4.4	相關極值的一個充分條件	162
4.5	函數圖形	170
5.	逼近	185
5.1	線性與二次逼近	185
5.2	牛頓逼近方法	194
6.	積分學	204
6.1	面積的近似計算	204
6.2	積分函數	214
6.3	微積分基本定理	225
6.4	原函數	236
6.5	部分積分法	245
6.6	體積計算	251
6.7	數值積分	260
7.	附 錄	274
	微分學習題	274
	微分及積分學習題	274
	德文中文名詞對照	286
	中文名詞索引	291

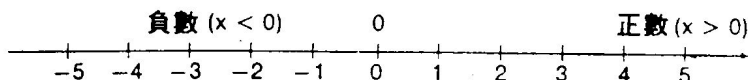
0 基本知識



笛卡兒(René Descartes 1596-1650)寧願從事哲學與數學研究，而不願從事貴族所應擔任的宮廷與軍事職務，他講授點是由坐標以及曲線是由方程式所描述，爲了使抄襲者氣餒，他寫作時常使人難以了解，並且略去證明，在這一點他也成爲在數學中的一個榜樣。

0.1 數與數對

我們在數線上表示數：



數 線
正 數
負 數

爲了表達各種類型的數，我們使用下列符號：

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ 自然數集； $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;

自然數

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ 整數集；

整 數

$\mathbb{Q}$ = 有理數集；

有理數

$\mathbb{R}$ = 實數集。

實 數

一個有理數是兩個整數的商（分母 $\neq 0$ ）；其小數表示是有限的或循環的。

一個實數，不是有理數時，叫做**無理數**；其小數表示既不是有限的也不是循環的。例如 $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt[3]{17}$ 、 π （圓周率）都是無理數。

無理數

數集的包含關係為 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ 。

當我們談到一個數的分析時，我們通常是指一個實數；其他的情形我們必須明確說出，是指一個有理數、整數，或者甚至自然數。

區間

對於 $a, b \in \mathbf{R}$ 且 $a < b$ ，在 a 與 b 之間的數形成一個區間。我們稱

閉區間

$[a; b] = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x \leq b\}$ 一個閉區間，

$[a; b[= \{x \in \mathbf{R} | a \leq x < b\}$ 一個半開區間，

開區間

$]a; b] = \{x \in \mathbf{R} | a < x \leq b\}$ 一個半開區間，

$]a; b[= \{x \in \mathbf{R} | a < x < b\}$ 一個開區間。

一端有界的區間是

$[a; \infty[= \{x \in \mathbf{R} | a \leq x\}$, $]-\infty; a] = \{x \in \mathbf{R} | x \leq a\}$

$]a; \infty[= \{x \in \mathbf{R} | a < x\}$, $]-\infty; a[= \{x \in \mathbf{R} | x < a\}$ 。

絕對值

不等式

我們用 $|x|$ 表示數 x 的絕對值，就是 x 與 $-x$ 兩個數中的正的；其中 $|0| = 0$ 。不等式 $|x| \leq 3$ 描述區間 $[-3; 3]$ ，因為恰好這個區間中的數滿足這個不等式。對於 $r > 0$ ，不等式 $|x - a| \leq r$ 的意義如同 $-r \leq x - a \leq r$ ，所以它表示區間 $[a - r; a + r]$ 。

坐標系

我們將數對在坐標系（圖 0-1）中表現，我們用 $(a|b)$ 表示有 x 坐標 a 及 y 坐標 b 的點。

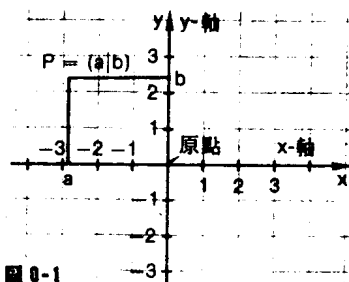


圖 0-1

滿足方程式

$$x^2 + y^2 = r^2$$

的所有數對 $(x|y)$ 的集合，形成繞原點 $O = (0|0)$ 且有半徑 r 的一個圓（圖 0-2）。

圖

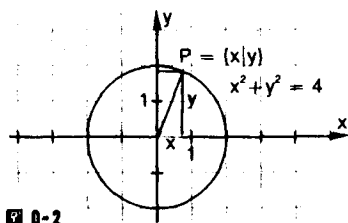


圖 0-2

若 M 是一個數對集合，我們則稱所對應的點集為 M 的圖形。下列集合圖形

集合圖形

$$\{(x|y) | y > x^2 \text{ 及 } y < x+3\}$$

是在圖 0-3 中的紅色區域。

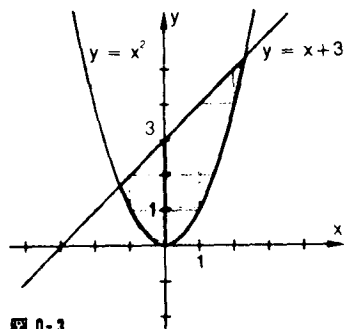


圖 0-3

0.2 函數與其圖形

定義域 在定義域 $D \subseteq \mathbb{R}$ 上的一個函數將 D 中每一個數仍對應到一個數。我們寫成

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \text{ 或 } f: x \mapsto f(x) \text{ 對於 } x \in D.$$

函數方程式 若數 $x \in D$ 對應到數 y ，我們則將它用**函數方程式** $y = f(x)$ 表示。

若 f 是一個函數，則稱集合 $\{(x|y) | y = f(x) \text{ 且 } x \in D\}$ 的圖形為**函數 f 的圖形**。一個函數 f 的圖形與 y 軸的每個平行線至多相交一點，因為對於一個 x 值，沒有不同的 y 值滿足 $y = f(x)$ 。

對應 $x \mapsto f(x)$ 時常以一個代數式 $f(x)$ 給出，例如

$$x \mapsto x^2 + 1, \quad x \mapsto \frac{1}{x+1}, \quad x \mapsto \sqrt{x}.$$

函數式 所用的式子則稱為**函數式**。

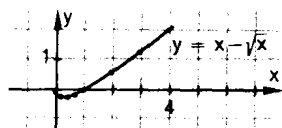
若無其他限制，我們通常考慮函數式是在最大可能的定義域上。

值表 為了畫出一個函數的圖形，我們首先列出一個**值表**。為此我們先要確定，要對定義域的那一部分畫出圖形，在圖 0-4 中是

$$f: x \mapsto x - \sqrt{x}$$

在區間 $[0; 4]$ 上的圖形。 f 在 $[0; 4]$ 上所取數值的集合（**值域**）是區間 $[-\frac{1}{4}; 2]$ 。

值域 圖 0-5 顯示**絕對值函數**對於 $x \in [-3; 3]$ 的圖形。在圖 0-6 中的圖形表示**整數部分函數** $x \mapsto [x]$ ；在此我們用 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數。



x	0	0.25	0.5	0.75	1	2	3	4
y	0	-0.25	-0.21	-0.12	0	0.59	1.27	2

圖 0-4

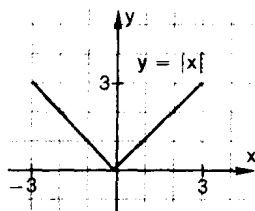


圖 0-5

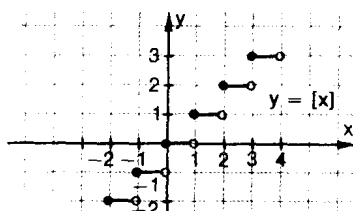


圖 0-6

0.3 線性函數與算術數列

線性函數

$$x \mapsto ax + b$$

的圖形是一個直線，係數 a 是直線的斜率， b 是它在 y 軸上的截部。我們能夠列出直線方程式 $y = ax + b$ ，假如我知道直線上兩點：在圖 0-7 中由斜率三角形的相似性得

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1};$$

這是直線方程式的兩點式。

由斜率 $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ，我們得到點斜式

線性函數

直線
斜率
截部

兩點式