高等学校教学用書

數學分析簡明教程

上册

A. Я. 辛 欽著

高等教育出版社

高等學校教學用書

數學分析簡明教程

上冊

A. Я. 辛欽 著
北京大學數學力學系
數學分析與函數論教研室 譯
許寶騄 校

高等教育出版社

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的阿·雅·辛欽(А. Я. Хинчин)所著"數學分析簡明教程"(Краткий курс математического анализа)1953年第一版譯出，並根據原著1955年第二版修訂的。原書經蘇聯文化部高等教育總署審定爲綜合大學與師範學院力學數學系與物理數學系數學分析課程的教科書。

本書中譯本分上下兩册出版。此爲上册，內容包括分析引論，微分學初步與積分學初步三篇。

本書由北京大學數學力學系數學分析與函數論教研室集體翻譯。並經許寶騄教授校訂。其中第三、四、五、六、七、八章有北京師範大學數學系趙慈庚教授的譯稿作爲參考。

数学分析簡明教程

上　册

А. Я. 辛欽 著

北京大学数学力学系数学分析与函数論教研室譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第054号)

京华印書局印刷　新华書店發行

統一書号13010·181　開本850×1168 1/32　印張9 9/16　字數241,000　印數67,001—71,000

1954年10月第1版　1958年7月北京第9次印刷　定價(8)￥1.10

第一版序

按照作者的意圖，“數學分析簡明教程”是爲了我們大學裏數學力學系與數學物理系的學生(在某種程度上也適用於師範學院)，作爲教學計劃中“數學分析”這門課程的基本教材而寫的。“數學分析”的內容，包括極限與無窮級數的理論，微分法與積分法的原理以及它們的一些簡單應用。編寫這樣一本教程是很必要的，因爲儘管我們現在已經有了很多的數學分析教程，但是它們當中沒有一個能夠完全適合上述的要求。在這些教程中，那些敘述比較簡潔清楚，容易爲一般學生所接受的，常常不是已經過時陳舊，就是所依據的科學基礎不能滿足數學專門人才的需要；而那些完全建立在近代科學水平上面的教程，其內容又往往是這樣繁多，遠遠超過了現行教學大綱的規定之外，以致一二年級的一般學生沒有條件去理解它們。因此問題就在於要寫出這樣一個教程，一方面它的材料要嚴格地限制在每一個唸分析的人所必需的教學大綱範圍之內，而同時又要完全建立在近代科學的水平上。

爲了使這本教程能夠儘可能地簡明，我的方法完全在於選取最精簡的材料，而不在敘述上壓縮辭句。課文裏面的推理都詳細地寫了出來，以減少讀者的困難。特別是我不吝惜說一些話，來幫助讀者時時刻刻都能清楚地了解到他所遵循的道路的規律。至於不同的概念、定理、問題以及整個理論之間的種種關係；它們的作用方法和它們在應用科學與技術上的應用；還有數學分析的另外一些有思想原則性的特色；這一切，在很多場合，都比一般篇幅更多的教程，解釋得更加完全和更有系統。我想盡力做到一點，即使得在引進新概念與建立新理論時，學生先有準備，能夠儘可能地看出這些新概念、新理論的引進是很自然的，甚至是不可避免的。我認爲只有利用這種方法，在學生方面才能對

於所學的東西產生眞正的興趣，才能非形式化地理解與掌握所學到的東西。

對一個有經驗的讀者來說，在本書各章中，最値得談一談的，恐怕是極限理論的講法(第二、三、四章)，按照現存的傳統習慣，中學裏面是用十八世紀的標準把這個理論教給學生的，而在大學的數學分析教程裏，却一下子就提高到極限理論的近代講法，完全用上了 ε 與 δ，並且常常還要在這之前，用整整的一章去討論實數的一般理論。但是無論就其實際內容或者就其格調來說，實數的一般理論都不屬於分析而是屬於數論與集合論的。這一切就造成了這樣的後果：第一，學生們把“大學裏面”的極限過程的新概念與他們在中學裏所熟悉的極限概念看成絲毫沒有共同的地方。更嚴重的還是第二點，就是：這種講法使學生沒有辦法學到數學分析基本理論的活潑、能動與辯證的精神，而這種精神正是數學分析在科學史上的特色，而且一直到今天，在實際生活中數學分析的種種應用都是和這種精神緊緊地聯繫在一起的。這一切就是兩種講法懸殊的嚴重後果。我在教學時多次觀察到這一點，所以在本教程裏，對於極限理論的敍述方法不能不採用一個新的體系。這個體系的實質是這樣：首先(第二章)把全部極限理論建立在初等的，非澈底形式化的基礎上，有系統地利用“過程”以及過程的“時刻”等概念，而這些概念都不是從形式上來定義的。只是到後來指出有形式化的需要時，才給“過程”的基本數學類型下了定義(第三章)。這樣做了以後，我就引導學生來注意建立實數的一般理論的必要性，而接着這個理論就建立起來了(第四章)。我已經成功地三次試用這種講法，它比平常講法較好的地方是：使學生從“中學的”極限理論到理解“大學的”極限理論的過程不僅是逐步的而且在認識的每一階段都是有根據的。這種講法在本書中自始至終使得數學分析的概念生動而有力，而對理論在形式邏輯上的改進，則祇給予應得的地位。

至於實數的一般理論，我認爲必須具有充分說服力地使讀者領會

到建立這個理論的必要，然後再引進各種可能中的一種產生無理數的原則(單調有界序列的極限)。此後，我僅僅舉出在這個新理論中出現的一些基本問題(連續統的順序，代數運算的定義與法則)以及如何解決這些問題的個別例子。我簡單地指出，這些問題已經由數論完全解決了，然後，我就無限制地利用這些結果。至於數論中究竟怎樣解決這些問題，數學專業的學生儘可以在較專門的課程裏更詳細地學習到這些解法；而對於力學專業、物理專業、天文專業的學生來說，這些問題未必有實際的用處。不管怎樣，我始終認爲，無論是在演講裏或是在一本教程裏，要想用很長的一章無論在內容上或者格調上都與數學分析沒有直接關係的東西，來吸引興趣如是分歧的各種聽講人的注意力，是不可能做到的事情。

以後各章的講法，大致上都是依照某一種已經定型的方式。我很遺憾地說明，在編寫後三章(重積分、線積分與面積分)時，雖然我很想儘可能地寫得旣完全嚴格又容易接受，但是我沒有得到成功。我沒有能够避免妥協，就是說我不得不部份地有時放棄了推理的嚴格性，有時放棄了簡潔易懂的原則。假如希望這本教程還能令人滿意的話，無疑地，這些章在再版時還需要加以修改。

在教程中所安插的少數例題，不用說，只有說明的性質，而毫無訓練技巧的意義。這些例子的數量與性質都適合於教師講授之用；我不願把習題課的材料放到我的"簡明教程"裏面來。自然，所有使用本書的人都應該同時採用一本好的習題集。特別是最近出版的 Б. П. 捷米多維奇(國家技術理論書籍出版局，1952)的"數學分析習題集"很合乎這個標準。爲了某種類型讀者的方便起見，我在書中大多數節的後面，特別推荐了上述習題集中的少數習題。不過，我應該提醒讀者，對於必要的技巧訓練來說，這些題目通常還是不够的；領導習題課的教員還應該挑選更多的例題。

高明的讀者不難看出，書中所採用講法的次序決不是不允許變更

的；在很多情况下，可能作一些變更，倒是有好處的，例如，1)微分法的一些幾何應用(第二十三章)講授時可以提前很多(平常實際上就是這樣)；2) 收斂級數的積分判別法也不必一定延遲到廣義積分的理論(第二十五章)之後，而可以提前到同號級數理論(第十八章 §68)裏面去講。

我非常愉快地向莫斯科、列寧格勒和基輔三個大學的數學教研室的工作同志表示衷心的深切的感謝，他們在閱讀原稿（或者其中若干章），及提出批評與意見之中所給予的寶貴幫助，無疑地使全書在叙述上大有改進。在這方面特別要感謝 Л. А. 涂馬金教授(莫斯科)与 Г. Е. 希洛夫教授(基輔)。最後我應該提起權威的和深謀遠慮的本書編輯者 О. Н. 哥羅文的巨大工作，他的許多寶貴建議，也在很多方面改進了本書的叙述方法。

阿·辛欽。

莫斯科，一九五三年二月二十四日。

第二版序

本書的第二版是在原有版樣的基礎上僅僅作了一些不大的修改，這些修改或是改正了一些錯誤，或是在個別節內爲了改進叙述的方法。由羅斯托夫大學數學分析教研室(由加霍夫教授領導)寄來的關於本書詳細的評論給了我很大幫助，在這裏我向教研室的所有工作同志表示深切的感謝。還要感謝 А. Н. 科尔摩戈洛夫院士及 А. М. 滿什金斯教授(明斯克)，他們指出了本書的一些錯誤。

在本教程中很多次推荐給讀者的 Б. П. 捷米多維奇“數學分析習題集”在第二版中關於題目的號數有了很大的改變。在本書的這一版中，全部推荐習題的號數還是按照“習題集”的第一版。在書的最後有這些習題按照第二版號數的索引。這個編寫索引的工作是由 Б. П. 捷米多維奇進行的，我向他表示深切的感謝。

阿·辛欽。

莫斯科，一九五四年十二月十九日。

上 册 目 錄

第一篇　分析引論

第二篇　微分學初步

第三篇 積分學初步

第一篇　分析引論

第一章　函數

§1. 變量

笛卡爾的變量是數學的轉折點。就是由於有了變量，才在數學中引進了運動與辯證法……

恩格斯，自然辯證法，國家政治書籍出版局，1948版第208頁。

研究常量的初等數學，至少在大體上是屬於形式邏輯的範圍；而研究變量的數學——其中最重要的部份是無窮小量分析——則在本質上不是別的，正是辯證法在數學上的應用。

恩格斯，反杜林論，國家政治書籍出版局，1948版第127頁。

當我們觀察某種自然現象或某種技術過程的運動時，我們往往可以注意到，在這種現象或過程裏面所遇到的種種不同的量，時常會表現出非常不同的狀態。其中有的量，在過程的進行中不起變化，也就是常常說的，保持"常值"。同時，另外一些量，却或多或少地有一些可注意的變化，它們時而變大，時而變小；這也就是常常說的，"取不同的值"。例如，當我們把一個密閉容器內的氣體加熱時，氣體的體積顯然保持常值，氣體分子的個數也保持一定。但相反地，氣體的溫度與壓力這時就要增高，取得越來越大的值。如果我們離開實驗室中的對象，轉而考察某種技術過程，則問題還要複雜得多。例如我們來觀察飛

機的飛行。在這個現象裏，我們會碰到很多不同的量。其中有的量在飛行過程中保持常值，例如乘客的數目，全部行李的重量，兩翼的長度以及很多其他的量。但是在飛行過程中還有更多的量，它們在過程的進行中起着變化，時而變大時而變小，例如，飛機離起飛地點或者目的地的距離，它離地面的高度，汽油的儲存量，溫度，周圍空氣的壓力與濕度以及很多其他的東西。這些例子說明：在這些現象中，無論對於實用的目的而言，或者對於技術與經濟的打算而言，剛好是那些變動的量，有着最重要的意義。這實際上倒是很自然的。自然界的動態是由不停止的變化組成的，而人類的實際行動則是以這種變化的規律爲指導。如果在一種現象或過程中沒有任何變動的東西或者幾乎沒有變動的東西，那末，它在科學上就不能給我們多少啓發，因而也就沒有什麼實用的價值。自然辯證法指示我們在研究自然現象時，需要研究的不是它在某一瞬間的截面，而是這個現象進行的過程本身。在自然科學裏辯證法所提出的問題，不只是現象在某一瞬間的情景是怎樣的，而最重要的，是那種現象整個的進行過程究竟怎樣，以及在這個過程中，究竟是什麼東西在變化，並且它是怎樣變化的。數學這門學問，既然要作爲精確的自然科學與技術上的有效工具，就應該給出一套方法，好讓我們用它來有系統地研究在自然裏、在技術過程裏所出現的量的變化情況。

這樣一套方法就是數學分析。按它的更廣泛的意義來講，也可以叫做變動的量的數學理論。

由此可見，數學分析裏面的第一個基本概念應該是變動的量的概念，或者按照數學上所採用的說法，是**變量**的概念。我們所謂變量就是在某一個過程中可以取不同的(時而大時而小的)值的那一種量。在一個給定的過程中，一般來說，變量在不同時刻就有不同的值。根據日常生活的經驗，我們知道變量的性質與類型是多種多樣的：有些量連續地增大；另一些則剛好相反，連續地減小；第三種類型則又是振動

式的變化，時而增大，時而減小（例如地球與太陽的距離，單擺離鉛直位置的偏度等）；如果已知一個量，比如說，是連續增大的，於是它又可以增大得很快，也可以增大得很慢，還有的時候，它的速度可以時而快、時而慢。系統地研究在我們周圍變化的量的這些特點以及很多其他的特點，從這個包含不同類型的變量的龐大集合裏面整理出秩序來，找出這一類型或另一類型的變量所遵循的共同規律——這一切就是我們廣泛的計劃下，數學分析的任務。

在數學上，對於任何自然現象裏所碰到的一切量，不管是常量還是變量，總是用某一個字母來代表它。因此，例如用 x 或 a 代表某一個量，這時，這個記號本身，一點也沒有表示出這個量是常量還是變量；因此，這個量的變化狀態常常應該特別加以說明。還有很重要的一點必需記住：如果沒有說明我們所討論的是怎樣一種過程，一般說來，我們不能知道到底一個量是常量還是變量。同一個量可能在這一個過程中是常量而在另一過程中却又是變量；例如一個半徑爲 r 的圓沿着一條直線滾動而其半徑不變（第一種過程），則這個圓的面積 πr^2 是一個常量；但如果保持圓心不動而使半徑變大（第二種過程），則圓的面積也就隨之增大，換句話說，它又是一個變量了。

用直線（所謂"數軸"）上的點來表示數，這個大家都知道的幾何表示法，在數學分析裏廣泛地被採用着。在直線上取好原點，記作 O，並取好單位長；於是對於任何一個數 α，我們就都可以用一個點去表示它，這個點與 O 的距離是 $|\alpha|$，[1] 而其方向則由 α 的正負號決定（通常當直線是水平時，正數在 O 的右邊而負數則在左邊）。量 x 的每一個值都是一個數，因而可以用數軸上的一個點來代表它。如果量 x 在某一個過程中保持不變，則它的值在整個過程中始終由數軸上的同一個點來代表。因此我們可以說，常量在數軸上的圖形是一個定點。如果量 x 在已知過程中是變動的，那末它在過程中不同時刻的值就要由數軸上

[1] 記號 $|x|$ 表示 x 的絕對值。

不同的點來代表;代表量 x 的點在過程中就要時常改變其位置;因此我們可以說,變量在數軸上的圖形是一個動點。

§ 2. 函數

在同一個現象中所碰到的種種的量，通常都不是彼此獨立地在那裏變化的；一般說來，它們彼此之間總有或多或少的關係，因而其中一個的變化就常常引起另外那些也跟隨它有相應的變化。例如，圓半徑變大時,其面積也同時變大;密閉在一個容器內的氣體被壓縮（卽減小所佔據的體積）時，（在溫度不變的條件下)氣體的壓力也就隨之增大;增加地裏的施肥量,莊稼的收成也隨之增多等等。但是，從這些例子已經可以看出，在某一個現象裏所碰到的各個量之間的關係，就其相互間聯系的明確性來說，可以是很不相同的。在第一個例子裏，這種聯系最明確:只要知道了圓的半徑 r，我們就可以唯一地而且絕對精確地用公式 $s=\pi r^2$ 來確定它的面積。在第二個例子裏,我們已經看到有些不同的情況了;如果知道了氣體的體積 v 以及它的絕對溫度 T, 我們當然可以用大家知道的公式

$$p=\frac{cT}{v},$$

來唯一地確定它的壓力 p, 其中 c 是一個已知的物理常量;但是這個公式的成立只不過是某種程度(有時甚至很粗糙)的近似；要想作更精確的計算就必須利用更複雜的公式；而這個更複雜的公式表明，眞正要精密地確定氣體的壓力，僅僅知道它的體積與溫度是不够的，還必須考慮很多其他種類的量的值。這種聯系得不精確的情形，在最後一個例中,表現得更突出,雖然施肥的量無疑地會影響到收成的多少，但是同時我們也曉得，卽使精確地知道了田地裏面的施肥量，我們也還是不能完全精確地預料到收成的多少的，原因是收成的多少除了和施肥量有關以外,還關係到一系列的其他的因素(例如氣象學上的與農藝學

上的各種不同的因素)。

很自然地,在數學分析裏面,首先要研究的,是變量之間的那種精確關係,換句話說,只要知道了一組變量的值之後,我們就有可能唯一地並且完全精確地決定另外一組變量的值的那種關係。上面提到的公式

$$s=\pi r^2,$$

$$p=\frac{cT}{v},$$

(其中 c 是已知常量)就是這種精確關係的例子。知道了圓的半徑就可以唯一地而且完全精確地決定它的面積 s。如果已知 T 與 v 的值,則由上述第二個公式,也同樣可以唯一而且完全精確地得出量 p 的對應值,在第一個例中量 s 只與一個量 r 有關,對於量 r 的每一個值,都對應着量 s 的一個確定的值,並且量 r 的任何變化都引起量 s 的完全確定的變化。在第二個例中,情形就比較複雜一點:要想知道量 p 的值,僅僅知道 T 的值或者僅僅知道 v 的值都是不够的;量 p 與 T, v 兩個量的值都有關係;如果想要用我們的公式來確定量 p 的值,就必須先同時知道 T, v 兩個量的值;對於一對值 T, v 對應着量 p 的一個確定的值 p,並且量 p 的變化與 T, v 兩個量的變化都有關係。至於 T 與 v 這兩個量本身,則它們的值與它們的變化都是彼此無關而可以隨我們的意思來選定的。在物理上,這就等於說,當氣體的質量給定之後,我們還可以使它有任意的(在已知限度之內)體積 v,與任意的(也在已知限度之內)絕對溫度 T。但是只要 v 與 T 一經選定之後,質量一定的氣體的壓力,就已經不能再隨我們的意思去任意指定,而是唯一地並且完全精確地爲我們的公式所確定了(這裏我們當然沒有再考慮那一點,就是這個公式本身對於眞正的氣體來說還需要加以修正)。

上面提到的那些例子,顯然都是下述一般講法的特殊情形。在某一個過程中,我們碰到一個量 y,它與這同一個過程中所碰到的其他某些量 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 有關,對於量 $x_1, \cdots, x_k$ 的每一組確定的值,都對

應着量 y 的一個唯一確定的值；至於這些量 $x_1, \cdots, x_k$ 本身，則彼此完全無關，換句話說，給定了其中若干個的值，我們還可以任意選定其餘的值(通常是在一個已知範圍內)。量 y 對於量 $x_1, \cdots, x_k$ 的這種相關性叫做**函數關係**，而量 y 本身則稱爲關於量 $x_1, \cdots, x_k$ 的一個**函數**；量 $x_1, \cdots, x_k$ 都叫做**自變量**。因此，在我們上面的例中，量 s 就是關於自變量 r 的一個函數[1]而量 p 是關於兩個自變量 T 與 v 的函數。當然，最簡單的也是最先引起我們注意的情形是 $k=1$ 的情形，也就是說量 y 只是一個自變量 x 的函數的情形。

量 y 是自變量 x 的函數這一事實，我們通常用 $y=f(x)$ 或 $y=\alpha(x)$ 或 $y=A(x)$ 等等形狀的公式來表示，括號前的字母，僅僅表示 y 對於 x 的函數關係的存在性，因而是可以隨意選定的——所表達的意義並不因選擇不同而有所改變。例如圓面積由半徑唯一決定這件事實，可以寫成 $s=f(r)$ 或 $s=s(r)$ 或 $s=A(r)$ 等等。仿此，量 y 是若干個自變量 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 的函數這件事實也可以用形如 $y=f(x_1, \cdots, x_k)$ 或 $y=y(x_1, \cdots, x_k)$ 或 $y=F(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ 等等的公式來表示。例如質量一定的氣體的壓力 p 是唯一地由它的體積與絕對溫度的值所確定的，這件事實，就可以寫成 $p=f(v, T)$ 或 $p=p(v, T)$ 或 $p=F(v, T)$ 等等。因此，選來表示函數關係的字母一點也沒有告訴我們這種相關的性質；$y=f(x)$ 這個式子在不同情形下旣可以代表 $y=3x^2$，也可以代表 $y=\lg x$，也可以代表 $y=\sin x$ 等等，重要的只是爲避免混亂計，在同一個論證過程中，不要用同一個字母來作爲不同的函數關係的符號，例如在某種過程中 $y=x^2$ 而 $z=x^3$ 就決不允許寫 $y=f(x)$，同時又寫 $z==f(x)$。

相反地，同一個字母有時候倒可以同時代表一個量，又代表這個量關於另一個量的函數關係［如前面例中的 $s=s(r)$ 與 $y=y(x_1, \cdots, x_k)$］

[1] 有時我們不說“關於一個(或兩個三個等等)變量的函數”，而簡單地說“一個(或兩個三個等等)變量的函數”。