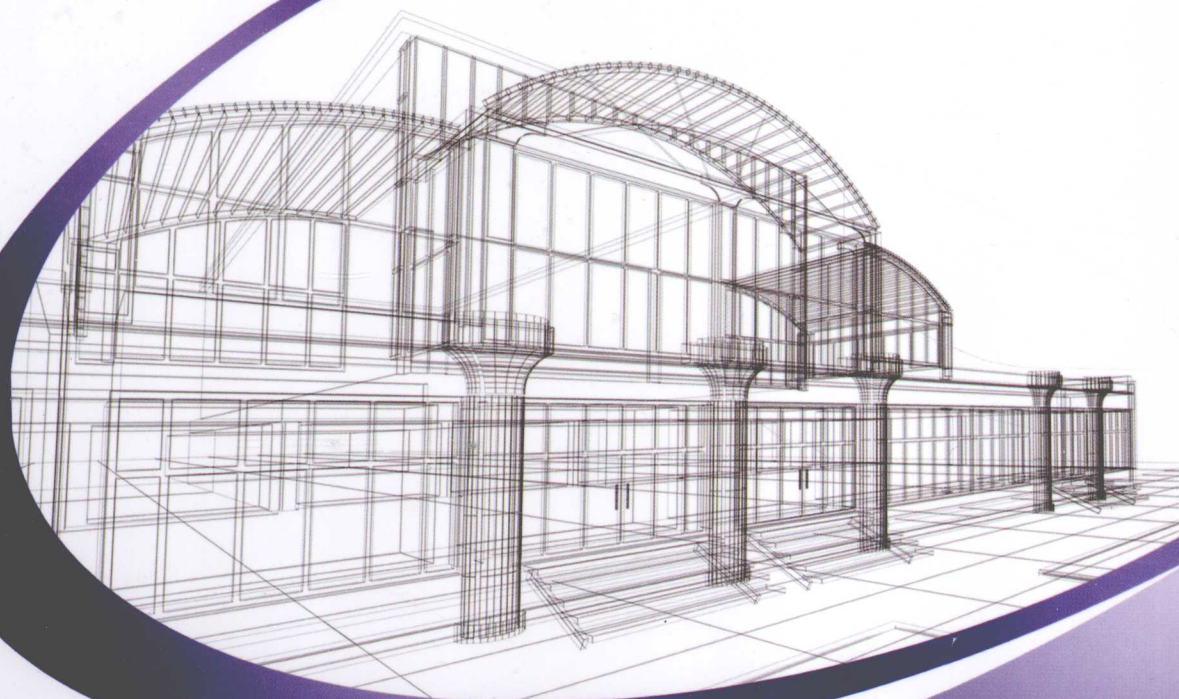




网壳结构的 非线性弯曲、稳定和振动



科学出版社

网壳结构的非线性弯曲、 稳定和振动

刘人怀 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书涉及单层网格扁球壳、单层网格扁壳、双层网格扁球壳、双层网格扁圆柱壳、双层网格扁壳,建立了非线性理论,给出了解析解,其中多数工作属国际上前沿研究成果,所得结果可直接应用于工程设计.

本书可供力学、建筑、石油化工、医疗器械等专业的研究生、科研人员和设计人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

网壳结构的非线性弯曲、稳定和振动/刘人怀著. —北京:科学出版社, 2011

ISBN 978-7-03-029548-4

I. ①网… II. ①刘… III. ①空间结构:网架结构-非线性结构分析 IV. ①TU356

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 225007 号

责任编辑:李 锋 赵彦超/责任校对:纪振红

责任印制:钱玉芬/封面设计:王 浩

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

天时彩色印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 1 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2011 年 1 月第一次印刷 印张: 8 3/4

印数: 1—2 000 字数: 166 000

定价: 38.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

网壳结构是用较短构件沿着一个曲面有规律地布置而组成的一种空间构架,目前有单层和双层两类网壳结构形式。由于具有消耗材料少、自重轻、结构刚度大、覆盖空间大等显著的优良特性,所以越来越广泛地应用在大跨度建筑等工程中,如大会议厅、博物馆、展览馆、美术馆、俱乐部、歌剧院、舞厅、体育馆、溜冰场、游泳馆、机场大楼、飞机库、车站、超级市场、旅馆、雷达穹顶、储油罐等。甚至在医疗器械中,也开始采用它来作为患者气管和血管中的网状支架,为挽救生命起到了重要作用。

网壳结构本身十分复杂,加之进行工程的弯曲、稳定和振动设计时又需应用非线性理论分析,故计算十分困难,国内外研究者甚少。作者从1984年承担中国石油化工总公司北京设计院的大型储油罐的网格扁球壳顶盖稳定性课题开始,采用等效连续化方法,开展了单、双层网壳非线性弯曲、稳定和振动问题的一系列研究工作,与自己所指导的研究生合作,迄今已在国内外发表10余篇学术论文。为了有助于网壳非线性分析的进一步研究和便于工程设计人员设计参考之所需,特将这些论文汇编成书出版,其中的英文论文也已译成中文。

书中错误难免,望读者不吝赐教。

刘人怀

于暨南大学明湖苑

2010年6月6日

目 录

前言

第 1 章 单层网格扁球壳	1
1.1 方形网格扁球壳的非线性稳定理论	1
1.2 方形网格扁球壳非线性稳定问题的解	21
参考文献	26
第 2 章 单层网格扁壳	27
2.1 网格扁壳的非线性弯曲理论	27
2.2 矩形网格扁壳的非线性特征关系	35
2.3 网格扁壳结构的非线性弯曲与稳定问题研究	46
2.4 网格扁壳的非线性自由振动分析	60
参考文献	66
第 3 章 双层网格扁球壳	68
3.1 双层网格圆底扁球壳的非线性稳定问题	68
3.2 双层网格矩形底扁球壳的非线性稳定性分析	80
3.3 大跨度双层网壳的非线性动态响应	86
参考文献	95
第 4 章 双层网格扁圆柱壳	98
4.1 双层柱面网格扁壳的非线性稳定性分析	98
参考文献	103
第 5 章 双层网格扁壳	105
5.1 双层正交正放网格扁壳结构的非线性弯曲理论	105
5.2 斜放四角锥扁网壳的非线性弯曲理论	110
5.3 矩形底双层网格扁壳的非线性弯曲	119
5.4 矩形底双层网格扁壳的非线性屈曲	125
参考文献	131

第1章 单层网格扁球壳

1.1 方形网格扁球壳的非线性稳定理论*

近三十年以来, 由于实际工程中网格结构使用的迅速增长, 因此, 对它们的研究越来越受到重视. 一般说来, 这一领域的研究有两种方法. 在第一种方法中, 对网格结构使用离散分析法, 例如有限差分法^[1]. 在第二种方法中, 应用等效连续法^[2-4]来预告结构的变形或临界屈曲载荷. 直到非线性有限元法^[5]大量应用前, 网格结构的非线性屈曲的研究都没有成为可能. 然而, 当结构的网格数量非常大时, 数值分析将变得非常复杂, 花费高、费时多. 至于预告网格结构的总体屈曲载荷或者振频, 则可以使用一种合理的结构连续模型来简化问题并得到能应用于工程设计的有用结果.

网格扁球壳由于自重很轻和容积巨大, 且能承受像雨、雪、风或气体压力这样的外载荷, 故常被用来作为大型空间结构的覆盖物, 诸如体育馆的屋盖、大型储油罐顶盖等, 这种壳体的重要性导致不同的理论和实验研究^[6], 但是, 以往的大多数研究主要集中在三角形网格扁壳, 且使用复杂的数值分析方法. 到目前为止, 还没有人使用有效等效连续方法对方形网格扁球壳进行非线性稳定的分析研究.

本节使用连续化方法创立了方形网格扁球壳大挠度分析的理论, 推出了卡门型非线性微分方程, 用变分原理得到了承受均匀分布载荷的网格扁球壳的近似边值问题.

1.1.1 基本假设

现在考虑如图 1.1(a) 所示的一个方形网格扁球壳. 全部肋条都具有相同的横截面且位于同一球面上, 壳体的中曲面被定义为全部肋条横截面的形心交织而成的曲面. 现在先建立如图 1.1(b) 所示的一个固定坐标系 $Oxyz$ 和一个流动坐标系 $o\xi\eta\zeta$, 这里 O 是壳体圆底的中心, x 轴和 y 轴分别是沿肋条铺设的两个方向, o 沿着肋

* 发表于 *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1991, 26(5): 547-561(原文为英文). 合作者: 李东, 聂国华, 成振强.

条横截面的形心线移动, ξ 轴和 η 轴分别沿着肋条横截面形心上两条肋条的切线方向, 而 ζ 轴则与壳体中曲面的内法线相重合.

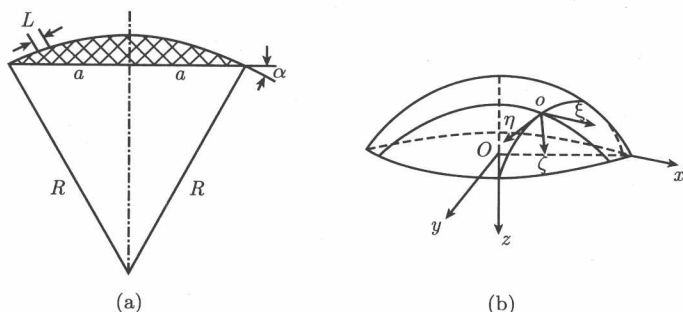


图 1.1 网格壳体的几何尺寸与坐标

其次, 引入以下基本假设:

(1) 全部肋条都位于曲率半径为 R 、跨度为 $2a$ 的一个球形曲面上. 全部肋条都有面积为 A 的相同形式的横截面.

(2) 除紧靠边界的那些网格以外, 壳体的全部网格都视为边长为 L 的正方形网格.

(3) 网格相当稠密, 即 $L \ll a$.

(4) 每根肋条的横截面的特征尺寸都远小于两条平行的肋条之间的距离 L , 于是可将相邻两节点之间的肋条视为一条细长曲梁.

(5) 每根肋条均由同样的线弹性材料构成, 杨氏模量为 E , 剪切模量为 G .

(6) 忽略不计材料的泊松比对肋条的横向弯曲、扭转和轴向变形的影响.

(7) 忽略不计节点的转动.

(8) 每根肋条的初始曲率很小, 即相应的网格壳体是扁壳, 经线切线的斜角 α 小于 30° .

1.1.2 内力和变形

考虑如图 1.2 所示壳体的一个典型的网格单元. 每根肋条横截面上由变形而产生且归结于形心 o 的正应力为 σ , 剪应力为 τ , 于是可将内力的 6 种分量写为

法向力:

$$N_1 = \iint_A \sigma_\xi d\zeta d\eta,$$

$$N_2 = \iint_A \sigma_\eta d\xi d\zeta;$$

剪力:

$$N_{12} = \iint_A \tau_{\xi\eta} d\eta d\zeta,$$

$$N_{21} = \iint_A \tau_{\eta\xi} d\xi d\zeta;$$

横向力:

$$Q_1 = \iint_A \tau_{\xi\zeta} d\eta d\zeta,$$

$$Q_2 = \iint_A \tau_{\eta\zeta} d\xi d\zeta;$$

横向弯矩:

$$M_1 = \iint_A \sigma_\xi \zeta d\eta d\zeta,$$

$$M_2 = \iint_A \sigma_\eta \zeta d\xi d\zeta;$$

扭矩:

$$M_{12} = \iint_A (\zeta \tau_{\xi\eta} - \eta \tau_{\xi\zeta}) d\eta d\zeta,$$

$$M_{21} = \iint_A (\zeta \tau_{\eta\xi} - \xi \tau_{\eta\zeta}) d\xi d\zeta;$$

侧向弯矩:

$$M_1^* = \iint_A \sigma_\xi \eta d\eta d\zeta,$$

$$M_2^* = \iint_A \sigma_\eta \xi d\xi d\zeta,$$

这里, 侧向弯曲是指每根肋条关于 ζ 轴的弯曲.

壳体中曲面沿 ξ, η, ζ 轴的位移分量分别是 u, v, w . 壳体的整体变形可分解成壳体中曲面的横向弯曲、扭曲、剪切和伸缩. 因为横向弯曲的 w 远比伸缩变形 u 或 v 大得多, 则与 u 或 v 的二阶导数有关的侧向弯矩 M_1^* 和 M_2^* 在考虑壳体平衡时就可忽略不计.

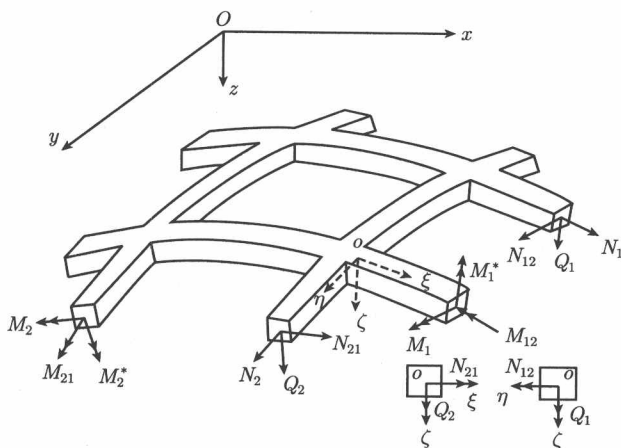


图 1.2 内力

按照假设 (8), 可近似地得到由挠度 w 所产生的中曲面的曲率和扭率变化为

$$k_{\xi} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad k_{\eta} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad k_{\xi\eta} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

在肋条的扭曲中产生了网壳的非均匀挠曲. 由图 1.3 可知, 肋条 BC 相对肋条 AD 的转动为

$$\theta_{AB} = \frac{(w_B - w_C)}{BC} - \frac{(w_A - w_D)}{AD} = -\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_B + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_A.$$

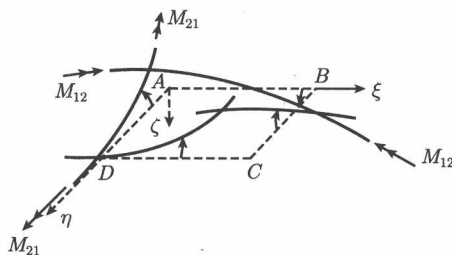


图 1.3 肋条的扭角和符号规则

于是, 单位长度肋条 AB 的扭角为

$$\bar{\theta}_{AB} = \frac{\theta_{AB}}{AB} = \frac{1}{L} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_A - \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_B \right] \cong -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_A = \bar{\theta}.$$

同样, 单位长度肋条 AD 的扭角为

$$\bar{\theta}_{AD} = - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)_A = \bar{\theta}.$$

单位长度扭角 $\bar{\theta}_{AB}$ 和 $\bar{\theta}_{AD}$ 的正方向与 M_{12} 和 M_{21} 是相同的, 显而易见, $M_{12} = M_{21} = GJ\bar{\theta}$, 这里, GJ 是每根肋条的抗扭刚度.

因为壳体的大变形, 所以剪力 N_{12} 和 N_{21} 是不相等的, 但可以将它们写为如下形式:

$$N_{12} = N_{12}^0 + \bar{N}_{12}, \quad (1.1a)$$

$$N_{21} = N_{21}^0 + \bar{N}_{21}, \quad (1.1b)$$

其中 N_{12}^0 或 N_{21}^0 是由网格的纯剪切变形所产生, 它们是相等的, 即 $N_{12}^0 = N_{21}^0$. 而 $\bar{N}_{12}$ 和 $\bar{N}_{21}$ 是相应于曲杆的挠曲和扭曲的附加剪力, 并可由沿 ξ 轴或 η 轴的一根弯曲和扭曲的肋条的平衡来决定.

由图 1.4 看到, 在对 ζ 轴的全部力矩平衡后可得

$$\bar{N}_{12}L - \left[L \left(\frac{1}{R} - k_\xi \right) M_{12} + M_1 \bar{\theta} L \right] = 0, \quad (1.2)$$

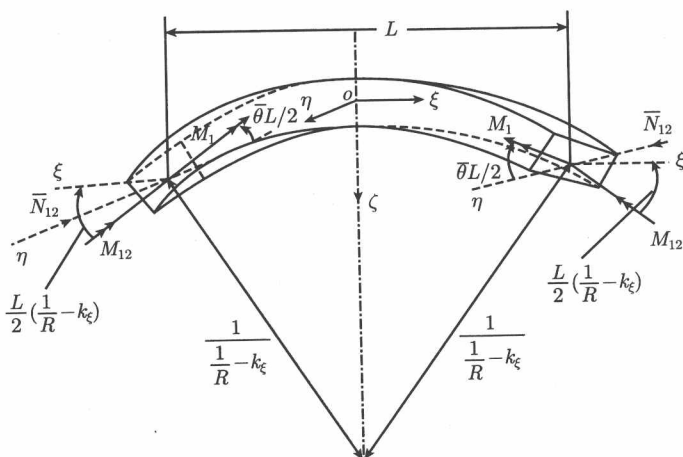


图 1.4 沿 ξ 轴变形微元的平衡

其中 $\bar{M}_1^*/2 = \frac{1}{2}[M_1 \bar{\theta} L + L(1/R - k_\xi) M_{12}]$ 是在肋条两端沿 ξ 轴的附加侧向弯矩. 将式 (1.2) 代入式 (1.1a), 便有

$$N_{12} = \bar{N}_{12} + N_{12}^0 = \left(\frac{1}{R} - k_\xi \right) M_{12} + M_1 \bar{\theta} + N_{12}^0. \quad (1.3a)$$

同理可得

$$N_{21} = N_{21}^0 + \bar{N}_{21} = N_{21}^0 + \frac{\bar{M}_2^*}{L} = N_{21}^0 + \left(\frac{1}{R} - k_\eta \right) M_{21} + M_2 \bar{\theta}, \quad (1.3b)$$

其中 $\bar{M}_2^*/2$ 是在肋条两端沿 η 轴的附加侧向弯矩。

现在将图 1.2 中的网格单元视为图 1.5 所示的具有同样面积的一个连续微元。这一连续微元的位移分量与网格单元的一样，亦即沿 ξ, η, ζ 轴的 u, v, w ，但是，等效壳微元的内力则是 $N_\xi, N_\eta, N_{\xi\eta}, N_{\eta\xi}, Q_\xi, Q_\eta, M_\xi, M_\eta, M_{\xi\eta}$ 和 $M_{\eta\xi}$ 。考虑基本假设 (3) 并应用连续化方法 [2,3]，便有如公式：

$$N_\xi = \frac{N_1}{L}, \quad (1.4a)$$

$$N_\eta = \frac{N_2}{L}, \quad (1.4b)$$

$$N_{\xi\eta} = N_{\eta\xi} = \frac{N_{12} + N_{21}}{2L}, \quad (1.4c)$$

$$Q_\xi = \frac{Q_1}{L}, \quad (1.4d)$$

$$Q_\eta = \frac{Q_2}{L}, \quad (1.4e)$$

$$M_\xi = \frac{M_1}{L}, \quad (1.4f)$$

$$M_\eta = \frac{M_2}{L}, \quad (1.4g)$$

$$M_{\xi\eta} = M_{\eta\xi} = \frac{M_{12} + M_{21}}{2L}. \quad (1.4h)$$

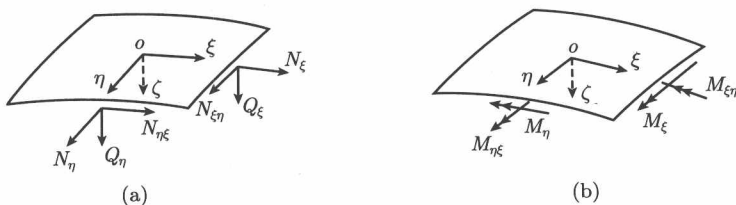


图 1.5 网格壳体的等效连续微元

1.1.1.3 弹性定律和应变位移方程

为建立网格壳体的弹性定律，取出如图 1.6 所示的一个网格单元，并注意使其

作为一个面积为 L^2 的连续微元. 应用假设 (1), (4), (5), (6) 和 (8), 得到如下承受拉力、弯矩和扭矩的网格单元的余能表达式:

$$V^{(I)} = \frac{N_1^2}{2EA}L + \frac{N_2^2}{2EA}L + \frac{M_1^2}{2EI_1}L + \frac{M_2^2}{2EI_1}L + \frac{M_{12}^2}{2GJ}L + \frac{M_{21}^2}{2GJ}L,$$

其中 EI_1 是每根肋条的横向弯曲刚度.

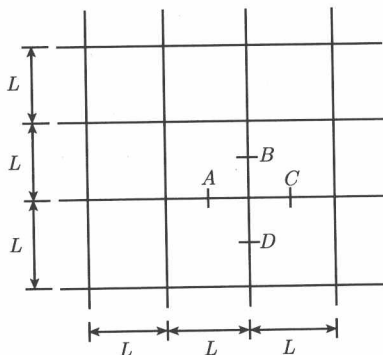


图 1.6 一个网格单元

应用式 (1.4) 和公式 $M_{12} = M_{21}$, 则得

$$V^{(I)} = \frac{L^3}{2EA}(N_\xi^2 + N_\eta^2) + \frac{L^3}{2EI_1}(M_\xi^2 + M_\eta^2) + \frac{L^3}{GJ}M_{\xi\eta}^2. \quad (1.5)$$

网格单元的剪切变形将变得更为复杂, 我们必须考虑等效剪力 $\bar{N}_{12}, \bar{N}_{21}$ 和附加弯矩 $\frac{1}{2}\bar{M}_1^*, \frac{1}{2}\bar{M}_2^*$ 联合作用于肋条 AC 和 BD 两端使单元弯曲和扭曲的情形, 这里还有

$$\bar{M}_1^* = \bar{N}_{12}L, \quad \bar{M}_2^* = \bar{N}_{21}L. \quad (1.6)$$

如图 1.7 所示, 这种联合作用可看成是由纯剪力 N_{12}^0, N_{21}^0 引起自平衡力系 $\bar{N}_{12}, \bar{N}_{21}$ 和 $\bar{M}_1^*, \bar{M}_2^*$ 的叠加所引起的变形. 还应指出, 在纯剪切变形中, 在两个最靠近的结点之间的每根肋条的中点都是拐点. 在这里, 因为单元的变形必须是反对称的, 故弯矩为零, 因此, 在单元纯剪切变形的情况下, 仅有 N_{12}^0 和 N_{21}^0 作用在 AC 和 BD 的两端. 还需注意, 除网格壳体边界以外, 网格壳体的剪切刚度由肋条的侧向抗弯刚度 EI_2 提供.

在联合作用下网格单元的总余能可写为

$$V^{(II)} = \frac{L^3}{EI_2} \left[\frac{1}{24}N_{12}^2 + \frac{1}{24}N_{21}^2 + \frac{1}{8}(\bar{N}_{12}^2 + \bar{N}_{21}^2) - \frac{1}{8}N_{12}\bar{N}_{12} - \frac{1}{8}N_{21}\bar{N}_{21} \right], \quad (1.7)$$

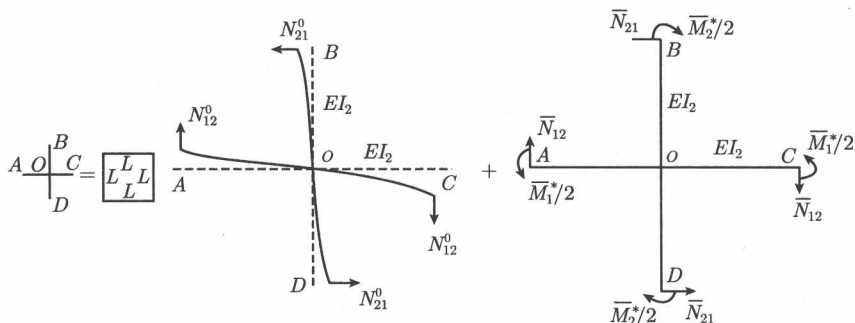


图 1.7 剪切、扭曲和弯曲的联合作用

其中

$$N_{12} = N_{12}^0 + \bar{N}_{12},$$

$$N_{21} = N_{21}^0 + \bar{N}_{21}.$$

由式 (1.1) 和 (1.4c) 可知

$$N_{12} = L N_{\xi\eta} + \frac{1}{2}(\bar{N}_{12} - \bar{N}_{21}),$$

$$N_{21} = L N_{\xi\eta} + \frac{1}{2}(\bar{N}_{21} - \bar{N}_{12}).$$

将此式代入式 (1.7), 便有

$$V^{(II)} = \frac{L^3}{EI_2} \left[\frac{L^2}{12} N_{\xi\eta}^2 - \frac{L}{8} N_{\xi\eta} (\bar{N}_{12} + \bar{N}_{21}) + \frac{1}{4} \bar{N}_{12} \bar{N}_{21} + \frac{1}{12} (\bar{N}_{12} - \bar{N}_{21})^2 \right]. \quad (1.8)$$

于是, 等效连续微元每单位面积的总余能为

$$U = \frac{V^{(I)} + V^{(II)}}{L^2},$$

亦即

$$\begin{aligned} U = & \frac{L}{2EA} (N_{\xi}^2 + N_{\eta}^2) + \frac{L}{EI_2} \left[\frac{L^2}{12} N_{\xi\eta}^2 - \frac{L}{8} N_{\xi\eta} (\bar{N}_{12} + \bar{N}_{21}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \bar{N}_{12} \bar{N}_{21} + \frac{1}{12} (\bar{N}_{12} - \bar{N}_{21})^2 \right] \\ & + \frac{L}{2EI_1} (M_{\xi}^2 + M_{\eta}^2) + \frac{L}{GJ} M_{\xi\eta}^2. \end{aligned}$$

由格林关系可得等效壳的弹性定律:

$$\varepsilon_{\xi} = \frac{\partial U}{\partial N_{\xi}} = \frac{L}{EA} N_{\xi}, \quad (1.9a)$$

$$\varepsilon_\eta = \frac{\partial U}{\partial N_\eta} = \frac{L}{EA} N_\eta, \quad (1.9b)$$

$$k_\xi = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial M_\xi} = \frac{L}{EI_1} M_\xi, \quad (1.9c)$$

$$k_\eta = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial U}{\partial M_\eta} = \frac{L}{EI_1} M_\eta, \quad (1.9d)$$

$$2k_{\xi\eta} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = \frac{\partial U}{\partial M_{\xi\eta}} = \frac{2L}{GJ} M_{\xi\eta}, \quad (1.9e)$$

$$\gamma_{\xi\eta} = \frac{\partial U}{\partial N_{\xi\eta}} = \frac{L^3}{6EI_2} N_{\xi\eta} - \frac{L^2}{8EI_2} (\bar{N}_{12} + \bar{N}_{21}). \quad (1.9f)$$

将式 (1.3a, b) 和 (1.9c~e) 代入式 (1.9f), 可得

$$\gamma_{\xi\eta} = \frac{L^3}{6EI_2} N_{\xi\eta} + \frac{L^3}{8EI_2} \left[\frac{GJ}{L} \left(\frac{2}{R} + \nabla^2 w \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \frac{EI_1}{L} \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \nabla^2 w \right]. \quad (1.10)$$

这样一来, 式 (1.9a~e) 和 (1.10) 就组成为等效壳的弹性方程. 这里, $\varepsilon_\xi, \varepsilon_\eta$ 和 $\gamma_{\xi\eta}$ 是壳体中曲面的等效应变.

应用已知扁壳的大挠度几何方程, 可得如下等效壳的应变位移方程:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{w}{R}, \\ \varepsilon_\eta &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{w}{R}, \\ \gamma_{\xi\eta} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

1.1.4 平衡方程和协调方程

在等效壳面上作用的外载荷沿坐标 ξ, η, ζ 的分量为 P_ξ, P_η, P_ζ . 设壳体的边界为 Γ , 位于 Oxy 面内, 且面积为 Σ . 再令 $\hat{n}$ 和 s 为平面 Oxy 上 Γ 的单位法向和切向矢量, 而 $ons\zeta$ 则为边界局部坐标, 这里 o 是在 Γ 上, n 是在壳体经线的切向上的单位矢量, 且垂直于 Γ . 值得指出, n 与 $\hat{n}$ 不同, 这是因为由图 1.8 看到, n 不在 Oxy 面内.

Γ 上的壳体的位移沿坐标 n, s, ζ 的分量为 u_n, u_s, w . 对于壳体的外边界处于夹紧固定或铰支情况时, 在边界 Γ 上有

$$\delta u_n = \delta u_s = \delta w = \delta \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right) = 0, \quad (1.12)$$

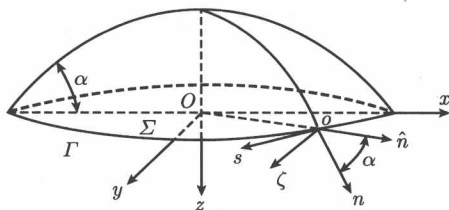


图 1.8 边界局部坐标

其中 δ 是变分.

由于壳体是一个扁壳, 故有

$$d\xi d\eta \cong dx dy.$$

应用虚功原理, 可得

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} \left[\delta \varepsilon_{\xi} N_{\xi} + \delta \gamma_{\xi\eta} N_{\xi\eta} + \delta \varepsilon_{\eta} N_{\eta} + M_{\xi} \delta \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right. \\ & \quad \left. + 2M_{\xi\eta} \delta \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + M_{\eta} \delta \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] dx dy \\ & \quad - \iint_{\Sigma} (P_{\xi} \delta u + P_{\eta} \delta v + P_{\zeta} \delta w) dx dy \\ & \quad + \oint_{\Gamma} \bar{M}_n \delta \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma = 0, \end{aligned}$$

其中 $\bar{M}_n$ 是给定的边界法向弯矩.

将式 (1.11) 代入上述方程, 并应用部分积分、条件 (1.12) 和格林定理, 便得到

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial N_{\xi}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\xi\eta}}{\partial y} + P_{\xi} \right) \delta u dx dy + \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial N_{\xi\eta}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\eta}}{\partial y} + P_{\eta} \right) \delta v dx dy \\ & \quad + \iint_{\Sigma} \left[\frac{\partial^2 M_{\xi}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{\xi\eta}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{\eta}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{\xi} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{\eta} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{1}{R} (N_{\xi} + N_{\eta}) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{\xi\eta} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{\xi\eta} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + P_{\zeta} \right] \delta w dx dy \\ & \quad + \oint_{\Gamma} (M_n - \bar{M}_n) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (1.13)$$

其中 M_n 是法向弯矩.

由式 (1.13) 的前两项积分可推得

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_{\xi}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\xi\eta}}{\partial y} + P_{\xi} &= 0, \\ \frac{\partial N_{\xi\eta}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\eta}}{\partial y} + P_{\eta} &= 0.\end{aligned}\quad (1.14)$$

将式 (1.14) 代入式 (1.13) 的第三项积分, 便得

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} \left[\frac{\partial^2 M_{\xi}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{\xi\eta}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{\eta}}{\partial y^2} + N_{\xi} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 N_{\xi\eta} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right. \\ \left. + N_{\eta} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - P_{\xi} \frac{\partial w}{\partial x} - P_{\eta} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{R} (N_{\xi} + N_{\eta}) + P_{\zeta} \right] \delta w dx dy = 0.\end{aligned}\quad (1.15)$$

由式 (1.13) 的最后一项积分, 可得

$$\oint_{\Gamma} (M_n - \bar{M}_n) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma = 0. \quad (1.16)$$

于是, 方程 (1.14) 和 (1.15) 就组成等效壳的基本平衡方程组, 而式 (1.12) 和 (1.16) 则是相应的边界条件.

如果外载荷是轴对称的, 便有

$$\begin{aligned}P_{\xi} &= x f(r), \\ P_{\eta} &= y f(r), \\ P_{\zeta} &= P_{\zeta}(r),\end{aligned}\quad (1.17)$$

其中 r 是中面上一个点到壳体中心对称轴的距离, 即

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

而 $f(r)$ 是一个连续函数.

显然, 有以下公式成立:

$$\frac{\partial P_{\xi}}{\partial y} = \frac{\partial P_{\eta}}{\partial x}.$$

因此, P_{ξ} 和 P_{η} 可由势函数 $F(r)$ 来表达, 为

$$\begin{aligned}P_{\xi} &= \frac{\partial F}{\partial x}, \\ P_{\eta} &= \frac{\partial F}{\partial y},\end{aligned}\quad (1.18)$$

其中

$$F(r) = \int f(r)rdr.$$

引入应力函数 $\phi(x, y)$, 使得

$$\begin{aligned} N_\xi &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - F, \\ N_\eta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - F, \\ N_{\xi\eta} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

于是方程 (1.14) 自动满足. 将式 (1.9c~e), (1.18) 和 (1.19) 代入方程 (1.15), 使得

$$\iint_{\Sigma} \left[L(w, \phi) - P_\zeta + \frac{2}{R} F \right] \delta w dx dy = 0, \quad (1.20)$$

其中

$$\begin{aligned} L(w, \phi) &= \frac{EI_1}{L} \nabla^4 w + \frac{2(GJ - EI_1)}{L} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R} \nabla^2 \phi + F \nabla^2 w + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned}$$

我们可用变分方程 (1.20) 来进行近似分析.

为了推导协调方程, 先给定边界 Γ 上的位移分量: 在 Γ 上,

$$u_n = \bar{u}_n, \quad u_s = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad (1.21)$$

应用扁壳的余能驻值原理 [7], 使得

$$\begin{aligned} &\iint_{\Sigma} \left[\varepsilon_\xi \delta N_\xi + \varepsilon_\eta \delta N_\eta + \gamma_{\xi\eta} \delta N_{\xi\eta} + \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta M_\xi + \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \delta M_{\xi\eta} \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta M_\eta \right] dx dy \\ &+ \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \delta N_\xi + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta N_{\xi\eta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \delta N_\eta \right] dx dy \\ &- \oint_{\Gamma} \bar{u}_n \delta N_n d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

考虑方程 (1.14) 和 (1.15), 则有

$$\frac{\partial \delta N_\xi}{\partial x} + \frac{\partial \delta N_{\xi\eta}}{\partial y} = 0,$$