

[美] F. B. HILDEBRAND 著



# 应用高等数学

下 册

陈绶章 张志强译

刘 文校

人民教育出版社

541148/14

# 应用高等数学

下 册

[美] F. B. Hildebrand 著

陈绶章 张志强译 刘 文校

人民教育出版社

本书曾多次作为美国麻省理工学院教科书。全书共有十一章，中译本分上、中、下三册出版。本书为下册(10—11章)，内容以复变函数为主，包括复变函数的基础内容以及解析函数理论的应用。书中有大量的例题和习题，书末附有习题答案及索引。

本书可供工科院校有关专业及有关工程技术人员作参考用书。

本书根据原书 1976 年版译出。

## 应用高等数学

下 册

[美] F. B. Hildebrand 著

陈绶章 张志强译 刘 文校

\*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

咸宁地区印刷厂印装

\*

开本 850×1168 1/32 印张 6.75 字数 158,000

1980年10月第1版 1981年8月第1次印刷

印数 00,001—21,500

书号 13012·0531 定价 0.61元

# 目 录

<b>第十章</b>	<b>复变函数</b> .....	<b>1</b>
10.1	引言 复变量.....	1
10.2	初等复变函数.....	3
10.3	其他初等函数.....	7
10.4	解析复变函数.....	15
10.5	复变函数的线积分.....	20
10.6	柯西积分公式.....	28
10.7	泰勒级数.....	29
10.8	劳仑级数.....	32
10.9	解析函数的奇点.....	37
10.10	无穷远奇点.....	47
10.11	奇点的意义.....	52
10.12	残数.....	54
10.13	实变函数定积分值的计算.....	59
10.14	极限围道定理.....	66
10.15	刻凿的围道.....	69
10.16	含分枝点的积分.....	73
<b>第十一章</b>	<b>解析函数理论的应用</b> .....	<b>106</b>
11.1	引言.....	106
11.2	拉普拉斯变换的反演.....	106
11.3	有分枝点的拉普拉斯变换的反演 闭路积分.....	110
11.4	保角映射.....	113
11.5	对二维流体流动的应用.....	118
11.6	基本流动.....	121
11.7	保角映射的其他应用.....	126
11.8	许瓦尔兹-克雷斯多弗变换.....	129
11.9	格林函数和狄利希雷问题.....	142
11.10	应用保角映射确定格林函数.....	149

11.11 其他的二元格林函数.....	152
下册习题答案.....	202
下册索引.....	207

## 第十章 复变函数

### 10.1 引言 复变量

一个复数  $\alpha$  是一个形如  $\alpha = a + ib$  的表达式, 其中  $a$  和  $b$  为实数,  $i$  为满足方程

$$i^2 = -1 \quad (1)$$

的虚数单位. 按惯例, 我们称  $a$  是  $\alpha$  的实部,  $b$  是  $\alpha$  的虚部, 并写为

$$\alpha = a + ib; \quad a = \operatorname{Re}(\alpha), \quad b = \operatorname{Im}(\alpha) \quad (2)$$

应注意, 复数的“虚部”实际上是实数. 当  $b = 0$  时, 复数  $a + ib$  称为实数, 而当  $b \neq 0$  时, 称为虚数. 特别是当  $b \neq 0$  而  $a = 0$  时, 此数称为纯虚数. 类似地, 可定义一复变量  $z = x + iy$ , 其中  $x$  和  $y$  均为实变量.

几何上可方便地用在所谓复平面的直角坐标系中的点  $(x, y)$  来表示一复变量  $x + iy$  (参看图 10.1). 于是, 表示实数的点均位于此平面的  $x$  轴上, 而表示纯虚数的那些点均位于  $y$  轴上. 同样, 可方便地认为复变量  $z$  由复平面中的从原点  $(x = y = 0)$  到点  $(x, y)$  的向量来表示. 我们称此向量的大小为  $z$  的绝对值或模, 并用  $|z|$  来表示它, 即

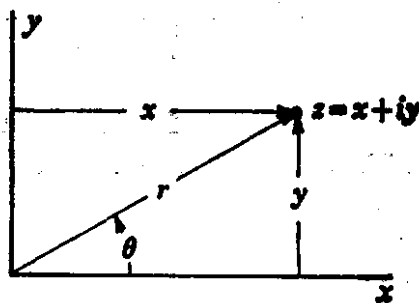


图 10.1

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3)$$

数  $x - iy$  称为数  $z = x + iy$  的共轭，并用符号  $\bar{z}$  来表示，即

$$\bar{z} = x - iy \quad (4)$$

当且仅当两个复数的实部和虚部分别相等时，我们称它们相等；这就是说，

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \text{ 意味着 } x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

特别是一个复数，当且仅当其实部和虚部均为零时，它才为零。

复数的加、减、乘和除，均按实数的运算法则进行，其中若出现  $i^2$ ，则由方程(1)有  $i^2 = -1$  (尚可参看习题 1)。于是，若

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

则有

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (5a)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \quad (5b)$$

和

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned} \quad (6)$$

特别值得注意的是

$$\begin{aligned} z \bar{z} &= (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 \\ &= |z|^2 = |\bar{z}|^2 \end{aligned} \quad (7)$$

这就是说，一个复数与其共轭复数之积是一非负实数，它等于这一复数的绝对值的平方。利用这一事实，当  $z_1 \neq 0$  时，可推出

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_1} &= \frac{x_2 + iy_2}{x_1 + iy_1} = \frac{(x_2 + iy_2)(x_1 - iy_1)}{(x_1^2 + y_1^2)} \\ &= \left( \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2} \right) + i \left( \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1^2 + y_1^2} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

若引入极坐标  $(r, \theta)$ ，使<sup>†</sup>

† 限制条件  $r > 0$  (本书将始终这样设定) 在这里具有特殊意义。

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (r \geq 0)$$

则复数  $z$  可写成极形式

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (9)$$

其中  $r$  为  $z$  的模。应该注意, 对一给定的复数, 角  $\theta$  可有无穷多的方式来取。按惯例, 模  $r$  为非负的, 当  $z \neq 0$  时,  $\theta$  的各个不同值相差一个  $2\pi$  的整数倍, 在  $z = 0$  时,  $\theta$  值为任意的, 这些角中的任一个, 称为  $z$  的辐角, 其简写符号为

$$\theta = \arg z = \text{amp} z = \sphericalangle z$$

若注意到复数的加法或减法遵循向量组合的平行四边形法则, 则下列有用的不等式

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (10)$$

的正确性可直接由初等几何概念得证(图 10.2)。习题 4 给出它的解析证明。

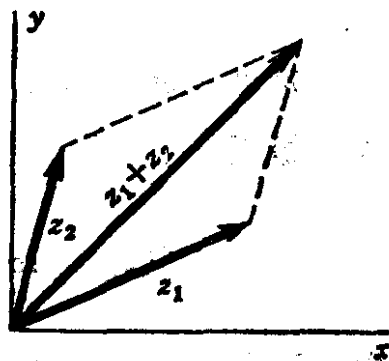


图 10.2

## 10.2 初等复变函数

现在我们来定义如  $e^z$ 、 $\sin z$ 、 $\log z$  等这样的函数, 注意这些定义当  $z$  变为实数  $x$  时, 将化为通常的定义<sup>†</sup>。

这种函数中最简单的一种是整数幂函数

$$f(z) = z^n \quad (11)$$

其中  $n$  为正整数或为零。自然, 此函数是按公式  $z^{k+1} = z^k z$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) 及  $z^0 = 1$ , 用重复乘法来递推地定义的, 由此有

<sup>†</sup> 应该注意, 在  $z$  为复数时, 要象对实变函数那样, 在几何上“设想出”这些函数的图形是不可能的, 因为如设  $w = \sin z$ , 要联系  $w$  的实部、虚部(如  $u$  和  $v$ ) 和  $z$  的实部和虚部(如  $x$  和  $y$ ), 就需要四维图象。利用两个平面提供所需的四维, 以在几何上表示这些关系的方法, 将在第十一章中讨论 (§ 11.4)。



$$z^n = (x + iy)^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (12)$$

$z$  的多项式则用有限个这样的函数的线性组合来定义,

$$f(z) = \sum_{n=0}^N A_n z^n \quad (13)$$

其中组合的常数可能是虚数.  $z$  的有理函数由两个多项式的比来定义.

通过考虑如表达式(13)在  $N \rightarrow \infty$  时的极限, 或更一般地考虑下式的极限

$$f(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N A_n (z-a)^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n \quad (14)$$

其中  $a$  可以是实数或虚数, 我们用幂级数来引出复变函数的定义. 这种级数的收敛性, 如同实数项级数那样, 可用比值判别法来识别 (参看 § 4.1). 于是, 若在下面的极限存在时, 令

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right| \quad (15)$$

则此级数在

$$|z-a| < \frac{1}{L} \quad (16)$$

时收敛. 可以看出, 在几何上, 这一限制条件要求  $z$  位于复平面上的以半径为  $R=1/L$ 、圆心在点  $z=a$  处的圆内.

在此收敛圆内, 此级数可逐项积分或求导, 而所得的级数将分别为原级数所表示的函数的积分或导数. 这一事实对今后将是相当重要的.

指数函数  $e^z$  由幂级数

---

† 这是如下事实的推论, 若级数(14)在  $|z-a| < R$  时收敛, 则对  $0 < \rho < R$  的任一个  $\rho$ , 当  $|z-a| \leq \rho$  时, 该级数均匀收敛, 且同样结论对逐项积分或求导后所得级数也成立.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (17)$$

来定义。这一定义是容许的，因为此级数收敛，因此对  $z$  的所有的实数值或虚数值来说，此级数定义一个  $z$  的可微函数，同时还因为此级数当  $z$  为实数时化为通常的级数。若将定义  $e^{z_1}$  和  $e^{z_2}$  的级数逐项相乘（对收敛的幂级数来说，这是允许的），则发现所得的级数就是定义  $e^{z_1+z_2}$  的级数（参看习题 11）；这就是说，关系式

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad (18)$$

对  $z_1$  和  $z_2$  为复值时是正确的，因此，若  $n$  为正整数，则对  $z$  的所有复值，尚有关系式

$$(e^z)^n = e^{nz} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (19)$$

三角函数由已定义的指数函数按下列关系式

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (20a)$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad (20b)$$

以及  $\tan z = \sin z / \cos z$  等等来定义。因此，由方程(20)和(17)，我们有相应的级数的定义

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (21a)$$

和

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!} \quad (21b)$$

当  $z$  为实数时，它们化为通常的形式。从这些级数，或从定义(20 a, b)，可以证明，对  $z$  为虚值时与实值时一样，满足相同的恒等式。

方程(20a, b)蕴涵重要的关系式

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (22)$$

上式称为欧拉公式.

用此关系式, 方程(9)可写为

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \quad (23)$$

根据(23)和(19), 我们有

$$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n e^{in\theta} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (24)$$

但由于方程(22)也蕴涵关系式

$$e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

因此我们导出棣美弗(DeMoivre)定理

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad (25)$$

并可将(24)改写为

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (26)$$

在几何上, 方程(26)表明, 若  $z$  具有绝对值  $r$  和辐角  $\theta$ , 则当  $n$  为正整数时,  $z^n$  具有绝对值  $r^n$  和辐角  $n\theta$ .

类似地, 若  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$  和  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ , 则有

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad (27a)$$

和

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} e^{i(\theta_2 - \theta_1)}, \quad (z_1 \neq 0) \quad (27b)$$

这就是说, 若  $z_1$  和  $z_2$  分别具有绝对值为  $r_1$  和  $r_2$ , 辐角为  $\theta_1$  和  $\theta_2$ , 则  $z_1 z_2$  具有绝对值  $r_1 r_2$  和辐角  $\theta_1 + \theta_2$ , 而  $z_2/z_1$  具有绝对值  $r_2/r_1$  和辐角  $\theta_2 - \theta_1$ .

特别是注意到, 由于

$$|e^{i\alpha}| = 1 \quad (\alpha \text{ 为实值}) \quad (28)$$

任一复数  $z$  与形如  $e^{i\alpha}$  (其中  $\alpha$  为实值) 的数相乘, 相当于表示复数  $z$  的向量在复平面上转过一个角度  $\alpha$ .

双曲函数如同实变函数一样, 由方程

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad (29a)$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad (29b)$$

和  $\tanh z = \sinh z / \cosh z$  等等来定义。因此, 还有

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (30a)$$

和

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (30b)$$

按定义可以证明, 复变量的双曲函数, 满足与实变量的双曲函数相同的恒等式。特别是比较方程(20)和(29), 得关系式

$$\begin{aligned} \sinh iz &= i \sin z, & \cosh iz &= \cos z \\ \sin iz &= i \sinh z, & \cos iz &= \cosh z \end{aligned} \quad (31)$$

它们将三角函数与双曲函数联系起来。

至此, 根据以上所得出的结果, 可用函数的实部和虚部得出下列各函数的表达式:

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} = e^x e^{iy} = (e^x \cos y) + i(e^x \sin y) \\ \sin z &= \sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy \\ &= (\sin x \cosh y) + i(\cos x \sinh y) \\ \cos z &= \cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy \\ &= (\cos x \cosh y) - i(\sin x \sinh y) \\ \sinh z &= \sinh(x+iy) = \sinh x \cosh iy + \cosh x \sinh iy \\ &= (\sinh x \cos y) + i(\cosh x \sin y) \\ \cosh z &= \cosh(x+iy) = \cosh x \cosh iy + \sinh x \sinh iy \\ &= (\cosh x \cos y) + i(\sinh x \sin y) \end{aligned} \quad (32)$$

### 10.3 其他初等函数

下面我们定义作为指数函数的反函数的复对数函数。暂以符

号  $\text{Log}z$  表示此函数, 我们知道方程

$$w = \text{Log}z \quad (33)$$

必须等价于

$$z = e^w \quad (34)$$

若以其实部与虚部来表示  $\text{Log}z$ , 可写为

$$w = u + iv \quad (35)$$

于是, 方程(34)给出

$$z = x + iy = e^{u+iv} = e^u e^{iv} = e^u \cos v + i e^u \sin v$$

因此, 令实部与虚部分别相等, 得

$$e^u \cos v = x, \quad e^u \sin v = y \quad (36)$$

由此则有

$$e^{2u} = x^2 + y^2 = |z|^2 = r^2, \quad \cos v = \frac{x}{r} = \cos \theta,$$

$$\sin v = \frac{y}{r} = \sin \theta$$

且当  $r \neq 0$  时, 有

$$u = \log r = \log |z|, \quad v = \theta \quad (37)$$

其中  $r$  照例表示  $z$  的绝对值,  $\log r$  为通常的实对数, 而  $\theta$  为与  $z$  有关的无穷多个辐角(它们之间相差  $2\pi$  的整数倍)中任何特定的一个. 由此, 对  $z \neq 0$  可得出结果

$$\text{Log}z = \log |z| + i\theta \quad (38)$$

为了强调  $\theta$  值仅在  $2\pi$  的一整数倍的范围内被确定这一事实, 这里可用  $\theta_p$  表示位于区间  $0 \leq \theta < 2\pi$  内的特定的  $\theta$  值, 并称此值为对于对数的  $\theta$  的主值,

$$0 \leq \theta_p < 2\pi \quad (39)$$

于是,  $\theta$  的其他容许值为  $\theta = \theta_p + 2k\pi$ , 其中  $k$  为整数, 而方程(38)化为

$$\text{Log}z = \log |z| + i(\theta_p + 2k\pi) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (40)$$

由此可知, 定义为  $e^z$  的反函数的  $\text{Log}z$  是一无穷多个值的函数. 例如, 设  $z=i$ , 则有  $|z|=1$  和  $\theta_p=\pi/2$ , 因而

$$\text{Log}i = \log 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \frac{4k+1}{2}\pi i \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (41)$$

对应于  $k=0$  的值称为对数的主值.

在具体的讨论中, 若  $z$  仅限于正的实值, 如  $z=x$ , 则有  $|z|=x$  和  $\theta_p=0$ , 于是, 由(40)有

$$\text{Log}x = \log x + 2k\pi i \quad (x \text{ 为正的实值}) \quad (42)$$

因此, 正的实数的复对数可与通常的实对数相差  $2\pi i$  的任一整数倍. 为了与通常的习惯相一致, 今后在  $z$  为正的实数时, 令(42)中的  $k=0$ , 使复对数  $\text{Log}z$  与实对数  $\log z$  相一致. 在更为一般的情况下, 按惯例仍可写  $\log z$  以替代  $\text{Log}z$ , 这时除  $z$  仅取正实数值的情况外,  $\log z$  看作是多值的. 于是, 可写出

$$\log z = \log |z| + i(\theta_p + 2k\pi) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (43)$$

以替代(40), 并免除在(42)情况下当  $z$  为正的实变量时令式中  $k=0$  所引起的矛盾.

现设在正实轴上一给定点  $z_1$  处, 对(43)中的  $k$  选一特定的值, 如选  $k=0$ , 由此确定  $\log z_1$  的特定值. 若点  $z$  由  $z_1$  出发, 沿一路径连续地运动, 则  $\log z$  的值由初始值  $\log z_1$  开始并连续地变化. 特别是, 若  $z$  沿一围绕原点的简单闭合路径按正方向(反时针方向)移动并返回初始点. 可以看出, 角  $\theta$  一直增大到  $2\pi$ , 因此, 当转了一整圈时, 其对数增加  $2\pi i$ , 而对数的实部回到其初始值. 然而, 上述讨论仅对包含原点  $z=0$  在内的路径才是正确的. 现若点  $z$  继续按其原路径移动, 则对数由不同的(单值的)函数或同一(多值的)函数的不同的“分枝”给出. 这就是说, 若写出

$$(\log z)_k = \log |z| + i(\theta_p + 2k\pi) \quad (0 \leq \theta_p < 2\pi)$$

且  $\log z$  在原路径上由  $(\log z)_0$  的一分枝来确定 ( $k=0$ ), 则在  $\log z$  连续改变时, 在第二条路径上,  $\log z$  应由  $(\log z)_1$  的分枝来确定 (对应于  $k=1$ ). 点  $z=0$  称为“分枝点”. 当需从一分枝移至另一分枝时, 它必被路径所包围. 因此我们可以说, 函数  $\log z$  具有无限多个分枝, 它在  $z=0$  处有一单分枝点.

对任一多值函数, 当我们阻止由一分枝移至另一分枝, 以使讨论仅限于作为单值函数的一个分枝时, 我们可以设想, 复平面沿着发生一分枝迁移到另一分枝的直线 (或曲线) 被“切开”. 于是, 所讨论的分枝, 一般说来, 沿上述定义的“分枝割线”将是不连续的.

因此, 对函数  $\log z$ , 当  $\theta_p$  武断地规定为  $0 \leq \theta_p < 2\pi$  时, 则  $\log z$  的各分枝沿正实轴是不连续的. 显然, 在处理不希望得到上述情况的问题中, 可另行规定  $-\pi < \theta_p \leq \pi$ , 使沿分枝割线的不连续性在沿负实轴处出现, 或可使迁移沿任一其他的射线、曲线或由原点伸向无穷远处 (不与自身相交) 的复合曲线出现.

为确定起见, 除以后作明显的不同规定外, 我们将采取规定 (39).

广义幂函数  $f(z) = z^a$  用对数按如下方程

$$z^a = e^{a \log z} \quad (44)$$

定义, 其中  $a$  可以是实数或是虚数. 当  $z$  为正的实变量而  $a$  为实数时, 若正的实数的对数仍为实数, 显然, 上述定义与通常的定义相一致. 若  $a$  为正整数, 上述定义应与 (24) 相一致. 为说明这点, 令  $a=n$ , 其中  $n$  为任意整数, 由 (44) 可得

$$z^n = e^{n[\log r + i(\theta_p + 2k\pi)]} = e^{n \log r} e^{in\theta_p} e^{2kn\pi i} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

但由于  $k$  和  $n$  均为整数, 故有

$$e^{2kn\pi i} = \cos 2kn\pi + i \sin 2kn\pi = 1$$

因而在此情况下, 有

$$z^n = r^n e^{in\theta_p}, \quad (n \text{ 为整数}) \quad (45)$$

由于当  $n$  为整数时,  $e^{in\theta} = e^{in(\theta_p + 2k\pi)} = e^{in\theta_p}$ , 故此结果与(24)相一致, 若  $n$  为负整数, 如  $n = -p$ , 则在  $z \neq 0$  时, 此结果与递推定义

$$z^0 = 1, z^{-(p+1)} = z^{-p}/z \quad (p=0, 1, 2, \dots)$$

的结果相同.

更一般地说, 若  $a$  为有理实数, 则可写为

$$a = \frac{m}{n}$$

其中  $m$  和  $n$  为无公因子的整数. 于是方程有如下形式

$$z^{m/n} = e^{(m/n)\log r} e^{i(m/n)\theta_p} e^{2k(m/n)\pi i} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

或

$$z^{m/n} = [r^{m/n} e^{i(m/n)\theta_p}] e^{2k(m/n)\pi i} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

考虑到  $m$  和  $n$  均为给定的整数, 而  $k$  为任意整数, 不难看出, 当  $k$  取任意  $n$  个接连的整数值时, 如  $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ , 因子  $e^{2k(m/n)\pi i}$  将取  $n$  个相应的不同值, 而当  $k$  继续以整数增加时, 则所得的  $n$  个值仅是周期性地重复. 由此可知, 对  $z$  的任意非零值, 函数  $z^{m/n}$  恰好具有如下  $n$  个不同的值†

$$z^{m/n} = r^{m/n} e^{i(m/n)(\theta_p + 2k\pi)} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (46)$$

还可以看到, 可将函数  $z^{m/n}$  看成是具有恰好  $n$  个分枝, 这使得我们若再规定  $\theta_p$  为  $0 \leq \theta_p < 2\pi$ , 且一个点沿包含原点在内的简单闭合路径移动一周时 ( $\theta$  变化  $2\pi$ ), 则只有通过由一个分枝移至另一个分枝, 才能使  $z^{m/n}$  连续变化. 可以进一步证明, 若通过一闭合路径恰好为  $n$  次, 它最初由某一分枝开始, 则第  $n$  个分枝将移回最初的那一分枝. 点  $z=0$  仍是一个分枝点.

\* 此式原书误为  $e^{m/n \log r} e^{i(m/n)\theta_p} e^{2k(m/n)\pi i}$  ——译者注.

† 符号  $\sqrt[n]{w}$  有时用来表示多值函数  $w^{\frac{1}{n}}$ , 其中  $w$  为复数. 但在本书中, 完全不采用前一符号, 除非  $w$  为正的实数, 这时, 根号只表示正的  $n$  次实根. 由此, 例如有  $3^{1/2} = \pm\sqrt{3}$ .



举一个例, 设  $m/n=2/3$ , 点  $z$  在单位圆上按正方向(反时针方向)从点  $z=1$  开始移动. 若任意选定从  $k=0$  的分枝开始, 注意到对  $z=1$ , 有  $r=1, \theta_p=0$ , 则  $z^{2/3}$  在点  $z=1$  处的初始值为 1. 当趋于回路的终端时,  $\theta_p$  趋于  $2\pi$ , 当  $z \rightarrow 1$  时, 幂  $z^{2/3}$  的值趋于  $e^{i(2/3)(2\pi+0)} = e^{(4/3)\pi i}$ . 为了使  $z^{2/3}$  在通过点  $z=1$  时的变化为连续的, 因而  $\theta_p$  突然降为零, 然后再增大, 这时我们应从  $k=1$  的第二个分枝来确定  $z^{2/3}$ , 因为这一分枝在  $\theta_p=0$  处取第一分枝当  $\theta_p \rightarrow 2\pi$  时所趋向的值. 在趋向第二个回路的终端处, 仍有  $z \rightarrow 1$ , 幂  $z^{2/3}$  的值趋于  $e^{i(2/3)(2\pi+2\pi)} = e^{(8/3)\pi i}$ ; 当通过  $z=1$  这一点时, 应移至  $k=2$  的第三个分枝. 最后, 在趋于第三个回路的终端处, 再一次有  $z \rightarrow 1$ , 幂  $z^{2/3}$  的值趋于  $e^{i(2/3)(2\pi+4\pi)} = e^{4\pi i} = 1$ , 于是(为了连续性), 应移回  $k=0$  的第一个分枝.  $z^{2/3}$  在点  $z=1$  处的三个值为  $1, (-1-i\sqrt{3})/2$  和  $(-1+i\sqrt{3})/2$ .

在一般情况下, 当  $a$  为如下形式的一复数时, 即

$$a = a_1 + ia_2$$

其中  $a_1$  和  $a_2$  均为实数, 方程(44)化为

$$\begin{aligned} z^a &= e^{(a_1 + ia_2)(\log r + i(\theta_p + 2k\pi))} \\ &= e^{[a_1 \log r - a_2(\theta_p + 2k\pi)]} e^{i[a_2 \log r + a_1(\theta_p + 2k\pi)]} \\ &= r^{a_1} e^{-a_2(\theta_p + 2k\pi)} \{ \cos [a_2 \log r + a_1(\theta_p + 2k\pi)] \\ &\quad + i \sin [a_2 \log r + a_1(\theta_p + 2k\pi)] \} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned} \tag{47}$$

一般说来, 函数  $z^a$  显然是一个  $z=0$  为分枝点的具有无限多个值的函数. 若  $a_2=0$ , 且  $a_1$  为有理数, 则只存在有限个分枝; 特别是, 若  $a_2=0$ , 且  $a_1$  为整数, 则此函数为单值的, 且  $z=0$  不再是一个分枝点.

广义指数函数  $f(z) = a^z$ , 其中  $a$  可为实数, 亦可为虚数, 但  $a \neq 0, 1$ , 它类似地, 可由方程

$$a^z = e^{z \log a} \tag{48}$$

来定义. 若以  $\alpha_p$  表示  $a$  所对应的角的主值, 使得  $0 \leq \alpha_p < 2\pi$ , 则有