计算数学讲义　数学基础之一

线　性　代　数

南京大学数学系计算数学专业 编

科　学　出　版　社

1 9 7 8

内 容 简 介

本书共分六章和三个附录．第一章结合解线代数方程组的消去法引进了行列式概念并介绍了行列式的基本性质．第二章介绍向量和矩阵的基本运算．第三章结合线代数方程组的求解引进了逆矩阵并对方程组的相容性问题进行了讨论．第四章结合一般的线代数方程组的各类求解问题，对四种广义逆矩阵 A^+，A^-，A_l^- A_m^- 作了初步介绍．第五章介绍了矩阵的特征值问题及特征值和特征向量的基本性质．第六章着重介绍实对称矩阵和二次型的一些重要性质并对广义特征值问题作了初步介绍．在三个附录中分别介绍了向量和矩阵的范数，$m\times n$ 阶矩阵的奇异分解以及矩阵的 Jordan 标准型．本书可作为大学计算数学专业教材并可供科技人员参考．

计算数学讲义 数学基础之一

线 性 代 数

南京大学数学系计算数学专业 编

*

科 学 出 版 社 出版

北京朝阳门内大街137号

西安新华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1978年10月第 一 版 开本：787×1092 1/32

1978年10月第一次印刷 印张：6 1/2

印数：0001—340,300 字数：146,000

统一书号：13031·806

本社书号：1154·13—1

定价： 0.68 元

说　明

一、这一套《计算数学讲义》是在我专业过去所编教材的基础上修改补充而成的.

二、这套讲义共分下列九册:

(一) 数值逼近方法;

(二) 线性代数计算方法;

(三) 常微分方程数值解法;

(四) 偏微分方程数值解法;

(五) 最优化方法;

(六) 概率统计基础和概率统计方法;

数学基础之一: 线性代数;

数学基础之二: 常微分方程;

数学基础之三: 偏微分方程.

三、这套讲义可作为综合性大学理科计算数学专业教材,也可供利用电子计算机从事科学计算的科技人员参考.

四、这套《计算数学讲义》的主编是何旭初同志.

讲义各册由我专业有关同志分工负责.

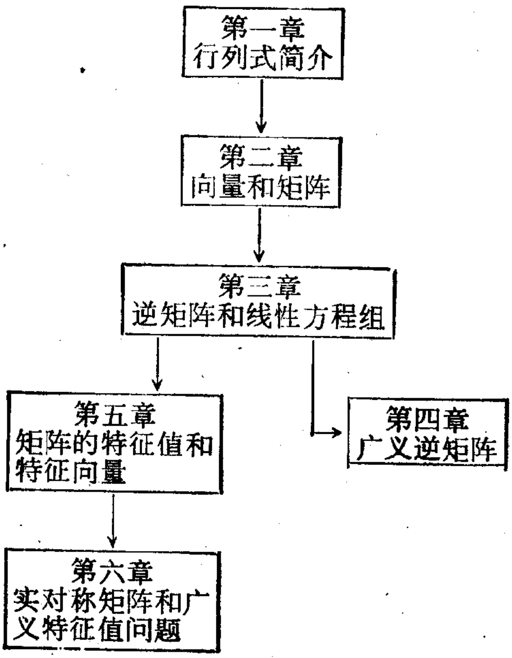
这册《线性代数》的编写者为何旭初同志.

五、由于理论水平和实践经验所限,讲义中的缺点和错误在所难免,我们衷心盼望读者提出宝贵意见,以便进一步修改。

南京大学数学系计算数学专业

1978年1月

阅读次序框图


第一章
行列式简介
第二章
向量和矩阵
第三章
逆矩阵和线性方程组
第五章
矩阵的特征值和特征向量
第四章
广义逆矩阵
第六章
实对称矩阵和广义特征值问题

目　　录

第一章 行列式简介

§1. 线性代数方程组和行列式

1.1 线性代数方程组 多元一次联立方程组是许多实际问题中常遇到的一种数学模型．例如，

$$\begin{aligned} 2x+3y&=9,\\ x+7y&=-4, \end{aligned} \tag{1}$$

及

$$\begin{aligned} x-y+z&=4,\\ 3x+5y+z&=-2,\\ -x+2y+6z&=1 \end{aligned} \tag{2}$$

分别是二元和三元联立方程组．(1)中的 x 和 y，(2) 中的 x，y 和 z，称为方程组 (1) 和 (2) 的**未知量**，而 (1) 中未知量的因子(2, 3; 1, 7)以及 (2) 中诸未知量的因子 (1, −1, 1; 3, 5, 1; −1, 2, 6)，分别称为方程组(1)和(2)的**系数**．方程右端的项，如(1)中的 9 和−4，(2)中的 4，−2 和 1，称为方程(1)和 (2) 的**右端项**或**自由项**．因为 (1) 和 (2) 中的未知量 x 和 y 及 x，y 和 z 的次数都不高于 1，所以又称它们为**线性代数方程组**，或简称为**线性方程组**．二元和三元线性方程组的一般形式为

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y&=c_1,\\ a_2x+b_2y&=c_2, \end{aligned} \tag{3}$$

及

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=d_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z&=d_2,\\ a_3x+b_3y+c_3z&=d_3. \end{aligned}$$

满足有关方程组的未知量的值，称为相应方程组的解.

1.2 消去法和行列式概念 消去法(或消元法)是解线性方程组的一种基本方法. 今以方程组

$$a_1x + b_1y = c_1, \tag{3-1}$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \tag{3-2}$$

为例，来回顾一下消去法的步骤.

为了消去方程中的未知量 y，可用 b_2 乘 (3-1) 的两端，用 b_1 乘 (3-2) 的两端，结果为

$$a_1b_2x + b_1b_2y = b_2c_1,$$

$$a_2b_1x + b_1b_2y = b_1c_2.$$

从第一方程减去第二方程得

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2.$$

于是，若 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$，便可解出未知量 x:

$$x = (b_2c_1 - b_1c_2)/(a_1b_2 - a_2b_1). \tag{3-3}$$

为了消去 (3) 中的未知量 x，可以用 a_2 和 a_1 分别乘 (3-1) 和 (3-2)，

$$a_1a_2x + a_2b_1y = a_2c_1,$$

$$a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2,$$

两端相减得

$$(a_2b_1 - a_1b_2)y = a_2c_1 - a_1c_2.$$

若 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$，便可解出未知量 y:

$$y = (a_1c_2 - a_2c_1)/(a_1b_2 - a_2b_1). \tag{3-4}$$

求解公式 (3-3) 和 (3-4) 的分子和分母，是由方程组的系数和右端项运算得到的，这种运算具有十分明显的规律性. 例如，公式中的分母 $a_1b_2 - a_2b_1$，是由 a_1, a_2 与 b_1, b_2 交叉相乘然后相减得到的. 我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \tag{3-5}$$

来表示这种运算，并称之为一个二阶行列式．其中的 a_1, a_2 和 b_1, b_2 分别称为该行列式的第一、第二列，而 a_1, b_1 和 a_2, b_2 分别称为行列式的第一、第二行．数 a_1, a_2, b_1 和 b_2 称为行列式的元素．

按照二阶行列式的记号，求解公式 (3-3) 和 (3-4) 的分子，便可以分别用行列式表示如下：

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1.$$

于是，使用行列式的记号，方程组 (3) 的解便可以表示为：

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{3-6}$$

例 试利用公式 (3-6) 解方程组 (1).

解

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 2 \times 7 - 1 \times 3 = 11,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 2 \times (-4) - 1 \times 9 = -17,$$

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = 9 \times 7 - (-4) \times 3 = 75,$$

代入公式 (3-6)，便得到了解，

$$x = 75/11, \quad y = -17/11.$$

三阶行列式 现在我们再来考虑含三个未知量 x, y 和

z 的线性代数方程组:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3. \end{aligned} \tag{4}$$

为了从前两个方程解出 y 和 z，可以先把它们改写为:

$$\begin{aligned} b_1y + c_1z &= d_1 - a_1x, \\ b_2y + c_2z &= d_2 - a_2x. \end{aligned} \tag{5}$$

据公式(3-6)，可以解出 y 和 z:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} d_1 - a_1x & c_1 \\ d_2 - a_2x & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & d_1 - a_1x \\ b_2 & d_2 - a_2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}. \tag{6}$$

代入(4)的末一方程得

$$a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}x + b_3\begin{vmatrix} d_1 - a_1x & c_1 \\ d_2 - a_2x & c_2 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} b_1 & d_1 - a_1x \\ b_2 & d_2 - a_2x \end{vmatrix} = d_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

因为

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} d_1 - a_1x & c_1 \\ d_2 - a_2x & c_2 \end{vmatrix} &= (d_1 - a_1x)c_2 - (d_2 - a_2x)c_1 \\ &= \begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_2 & c_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} b_1 & d_1 - a_1x \\ b_2 & d_2 - a_2x \end{vmatrix} &= b_1(d_2 - a_2x) - b_2(d_1 - a_1x) \\ &= \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}x, \end{aligned}$$

所以，代入(7)就得到

$$\left[a_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}\right]x$$

$$=\left[d_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-d_2\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}+d_3\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}\right]. \quad (8)$$

同理可得:

$$\left[a_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}\right]y$$

$$=\left[a_1\begin{vmatrix}d_2 & c_2\\ d_3 & c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}d_1 & c_1\\ d_3 & c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}d_1 & c_1\\ d_2 & c_2\end{vmatrix}\right], \quad (9)$$

$$\left[a_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}\right]z$$

$$=\left[a_1\begin{vmatrix}b_2 & d_2\\ b_3 & d_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}b_1 & d_1\\ b_3 & d_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1 & d_1\\ b_2 & d_2\end{vmatrix}\right]. \quad (10)$$

因此,若规定用记号

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

来表示方程(8),(9),(10)左端 x, y 和 z 的系数(它们是相同的),即令

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\equiv a_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}=\Delta, \quad (11)$$

那么,分别把 a_i, b_i 和 c_i 换成 d_i, 方程(8),(9)和(10)的右端便可以分别表示为

$$d_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-d_2\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}+d_3\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}\equiv\begin{vmatrix}d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=\Delta_1, \quad (12)$$

$$a_1\begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_2 & c_2 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta_2, \quad (13)$$

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \Delta_3, \quad (14)$$

从而方程组(4)的解便可以表示为:

$$x = \Delta_1/\Delta, \quad y = \Delta_2/\Delta, \quad z = \Delta_3/\Delta. \quad (15)$$

我们称

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

为一个三阶行列式,它有三行:

$$a_1, \ b_1, \ c_1; \quad a_2, \ b_2, \ c_2; \quad a_3, \ b_3, \ c_3$$

和三列:

$$\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix}.$$

同理,Δ_1, Δ_2 和 Δ_3 也都是三阶行列式.

根据这种用二阶行列式规定三阶行列式的方法,我们可以用三阶行列式来规定四阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$+ a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}. \quad (16)$$

为了便于研究行列式的性质，我们把位于行列式第 i 行第 j 列的元素记作 a_{ij}，使用这种记号，二阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

三阶和四阶行列式可以分别表示成：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{和} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

一般的 n 阶行列式 用逐次递推的方式，我们规定 n 阶行列式如下

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} \cdots a_{2n} \\ a_{32} \cdots a_{3n} \\ \cdots\cdots \\ a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{32} \cdots a_{3n} \\ \cdots\cdots \\ a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}. \qquad (17)$$

n 阶行列式有 n 行、n 列，共有 n^2 个元素．元素 a_{11}，a_{22}，$\cdots$，a_{nn}，称为行列式的*主对角元素*。

练习 计算下列行列式的值：

1) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}$． 2) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$． 3) $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix}$．

4) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$. 5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$. 6) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

7) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. 8) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix}$. 9) $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$.

§2. 行列式的性质

1. 行列式的任二列(或行)交换,其值改号。

首先我们来看一下二阶行列式的情形.

把二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

中的两列交换,便得到了另一个行列式

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix},$$

据二阶行列式的定义,

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = b_1a_2 - b_2a_1 = -(a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$= -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

因此,两列交换后,行列式的符号改变.

现在我们再来考虑三阶行列式的情形. 今将三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

中的二、三两列交换得

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} c_2 & b_2 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= -a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

由此可知,交换二、三两列后,行列式之值改号. 若把一、二两列交换,则有

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= b_1(a_2c_3 - a_3c_2) - b_2(a_1c_3 - a_3c_1)$$

$$+ b_3(a_1c_2 - a_2c_1)$$

$$= -a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

因为交换一、三两列相当于先交换二、三两列，再把所得行列式中的一、二两列交换，然后再把所得行列式中的二、三两列交换,即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}.$$

所以，交换一、三两列，行列式的值也改号.

利用上述方法，根据归纳法原理可以证明：任何阶的行列式，交换任意二列，行列式的值都改号.

2. 用常数 λ 乘行列式任意一列的诸元素，等于用 λ 乘这个行列式.

这就是说，行列式任一列元素的公因子，可以提到行列式之外.

例如，对二阶行列式有

$$\begin{vmatrix} \lambda a_1 & b_1 \\ \lambda a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \lambda a_1b_2 - \lambda a_2b_1 = \lambda(a_1b_2 - a_2b_1) = \lambda\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

同理可知

$$\begin{vmatrix} a_1 & \lambda b_1 \\ a_2 & \lambda b_2 \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

对于三阶行列式，根据定义有

$$\begin{vmatrix} \lambda a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_2 & b_2 & c_2 \\ \lambda a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \lambda a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$+\lambda a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

对于行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & \lambda b_1 & c_1 \\ a_2 & \lambda b_2 & c_2 \\ a_3 & \lambda b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad 和 \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \lambda c_1 \\ a_2 & b_2 & \lambda c_2 \\ a_3 & b_3 & \lambda c_3 \end{vmatrix},$$

可以分别交换一、二及一、三两列，就可以把公因子提到行列

式的外面，这时，由于交换二列，行列式改号．然后再分别交换一、二及二、三两列，行列式的符号就改过来了，而行列式中原来三列的次序也恢复到原状，即

$$\begin{vmatrix} a_1 & \lambda b_1 & c_1 \\ a_2 & \lambda b_2 & c_2 \\ a_3 & \lambda b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \lambda b_1 & a_1 & c_1 \\ \lambda b_2 & a_2 & c_2 \\ \lambda b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

同理

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \lambda c_1 \\ a_2 & b_2 & \lambda c_2 \\ a_3 & b_3 & \lambda c_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

根据归纳法原理，可以证明：对于 $j = 1, \cdots, n$，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \vdots & \lambda a_{1j} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & \vdots & \lambda a_{2j} & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \vdots & \lambda a_{nj} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{18}$$

根据上述行列式的两种基本性质，可以推出行列式的下列性质：

3. 若行列式中任意二列元素成比例，则行列式的值为零．

证明 今以三阶行列式为例证明所述的结论．设 $b_i/a_i = \lambda$（常数），$i = 1, 2, 3$．即一、二两列元素成比例．于是，$b_i = \lambda a_i$，$i = 1, 2, 3$．从而有

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & \lambda a_1 & c_1 \\ a_2 & \lambda a_2 & c_2 \\ a_3 & \lambda a_3 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix},$$