SHUXUEWULIFANGCHENG

数学物理方程

张成国　编

Ⓢ

中央民族学院出版社

高等学校试用教材

数学物理方程

张成国 编

中央民族学院出版社

一九八九年·北京

数 学 物 理 方 程

张成国　编

●

中央民族学院出版社出版
（北京白石桥路二十七号）
保定北郊华丽印刷厂印刷
787×1092毫米　32开本　11.8125印张　249千字
1989年10月第1版　1989年10月第一次印刷
印数：01—3000册
ISBN 7-81001-151-0/G·64　定价：2.45元

前　　言

本书是根据教育部一九八〇年颁发的"综合大学数学专业《数学物理方程教学大纲》"，参照国内外的《数学物理方程》教材，并结合作者在中央民族学院数学系多年讲授《数学物理方程》课讲义的基础上编写而成的。

全书共分六章。第一章主要介绍了波动方程的基本定解问题及其主要解法，特别是弦振动方程Cauchy问题的D'Alembert解法与混合问题的分离变量法，并用能量积分的方法讨论了上述定解问题的解唯一性与稳定性。第二章重点介绍了热传导方程的Cauchy问题的解法——Fourier变换法，并用极值原理导出热传导方程的混合问题与Cauchy问题的解的最大模估计式，从而解决了上述问题的解的唯一性与稳定性。第三章除了介绍位势方程的极值原理之外，还介绍了位势方程的Dirichlet问题的Green函数解法。第四章主要介绍二阶线性偏微分方程的分类，特征理论及化标准型的问题。第五章介绍了一阶线性偏微分方程组的有关理论，幂级数解法与Cauchy——Ковалевскaя定理。第六章简单介绍了Schwarz的广义函数与偏微分方程的基本解。（这部分内容可以不讲。）为了便于掌握上述内容，每节后面都配备了一定数量的习题。对书中的内容，教者可根据需要与学生的具体情况选讲或重新安排次序，读者也可根据自己的实际情况选读部分章节。

由于作者水平有限，书中错误与不当之处在所难免，诚

恳希望读者提出宝贵意见。

在本书定稿之前，北京大学吴兰成教授在百忙中审阅了原稿；一些兄弟民族院校的同行也提出了宝贵的意见；国营六一八厂设计所的同志帮助绘制了图形；中央民族学院出版社的同志对本书的付印也付出了很多劳动，对此，作者表示深深的谢意！

一九八九年一月

目　　录

绪　　论

一、偏微分方程发展简史

所谓“数学物理方程”，是指在物理学，力学，工程技术等实际问题中得到的、反映客观世界物理量之间相互关系的一些偏微分方程。

自从微积分学产生以后，人们便逐渐开始了对偏微分方程的研究。远在1715年，英国的杰出数学家 Brook. Tayler 就将弦线的横振动问题归结为著名的弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

十二年以后，荷兰的数学教授 John Bernoulli 处理了离散的情况，John 和他的儿子，圣彼得堡的数学教授 Daniel Bernoulli 对振动进行了多方面的研究，并发现了数学物理中极基本的迭加原理。对弦振动方程的第一次真正的成功是1746年对小提琴弦的振动的重新进攻，法兰西的数学家 D'Alembert 最先明白地导出了弦振动方程，并将固定弦的振动的初值问题的解非常巧妙地求了出来，这个方法直到今天还在许多教科书中经常引用。几乎在同时，著名的彼得堡科学院院士，近世纪最著名的三大数学家之一，瑞士的 L. Euler 也得出与 D'Alembert 相同的表达式：

$$u(x,t)=\varphi(x-at)+\psi(x+at).$$

但是 D'Alembert 认为，弦的振动模式应当是无穷多种与

正弦不同的曲线，而 Euler 与 Bernoulli 则断言，弦振动方程的解应是

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi c}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x$$

这种争论在18世纪60—70年代持续了十年之久，后来，年轻的法国数学家 J. Lagrange 与 P. Laplace 也参加到这场激烈地争论中来了。此时，人们逐渐认识到，解的初值 $u|_{t=0}=\varphi(x)$，既不必是周期函数，也不必是解析函数，它照样可以展开为三角级数。1759 年，Euler 在研究矩形鼓的振动时，首先接触到二维物体，他由此导出了二维波动方程，求出了其平面波解与柱面波解，并应用了 F. Bessel 方程与 Bessel 函数。Euler 用类似的方法求解了三维波动方程，并在研究铃的声音、杆的振动时触及了四阶偏微分方程。1752 年，Euler 首先提出了位势方程，为了确定两个天体间引力的大小，在以后的三十年中，Laplace 与 Legendre 先后发表了一系列的论文，对位势方程与势函数作了较深入地探讨。

一阶偏微分方程是 A.Clairaut 于1739年首先遇到的，他的解法至今还在使用；此后，Lagrange 做了大量的工作，他首次给出了非线性的一阶方程的一般理论及其解法，他成功地将一个一阶偏微分方程化为一个常微分方程组来求解。还值得一提的是 G. Monge 及其特征理论，他是首先从几何上说明偏微分方程的，他第一个提出了特征的概念，并在1795年将其特征理论系统化。

在整个18世纪，偏微分方程作为一门数学学科产生了，

虽然它还处于自己的幼年时代，但是已经揭示出它对弹性力学，水利学，万有引力等问题的重要性。

到了19世纪，偏微分方程无论在广度上还是在深度上都发展起来了，不仅是方程的数目、类型大大增加了，而且那些已知的类型也被应用到新的领域中去，它逐渐成为数学的中心，同时促进了数学的其它分支，如函数论，变分法，级数展开，常微分方程，代数、微分几何等各方面的发展。

19世纪偏微分方程发展的第一大步是一个裁缝的儿子、年轻的法兰西学者 Jossph Fourier 迈出的，他热衷于从事于热流动的研究，他首先指出，“任意”一个函数，均可以展成三角级数，即

$$f(x)=\frac{a}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\quad (o<x<\pi).$$

虽然他从未给出过严格的证明，也没有说明“任意”函数应满足什么样的条件，但是，Fourier 的工作必定标志着人们从解析函数或可展成 Tayler 级数的函数中解放了出来；

Fourier 的方法立即被19世纪最大的分析学家之一、第一流的物理学家 S. Poisson 所吸取，他不仅从事热的理论研究，而且是弹性数学理论的奠基人之一，他最先将引力位势理论引入静电磁学。Poisson 甚至相信所有的偏微分方程都可以用级数展开来求解，从1815年起，Poisson 按三角级数、Legendre 多项式，Laplace 曲面调和函数展开式求解了许多热传导问题。

另一个重要的发展是以位势方程为中心，位势方程虽然

在18世纪已暂露头角，Laplace，Poisson，C. Gauss 等人也作了大量的工作，但是，关于它的解的一般性质在19世纪二十年代还几乎毫无所知，在这方面，靠自修成功的英国大数学家 G. Green 作了出色的工作，他首先证明了我们今天称之为的"Green 第二公式"，进而引进了他自己称之为"位势函数"，而由 G. Riemann 开始的称之为"Green 函数"的这一偏微分方程的基本概念，由此导出了位势方程的解，他第一次使用了著名的 Dirichlet 原理，做了许多用 n 维代替三维的工作。他的工作培育了数学物理学者的庞大的剑桥学派；解决位势方程的另一途径是1847年由英国 Thomson 爵士提出的，后来被 Riemann 命名为 Dirichlet 原理的变分方法，1899年，被称为"通才"的 D.Hilbert 在区域、边值及允许函数的适当条件下，证明了 Dirichlet 原理。

19世纪对科学、技术带来巨大冲击的最壮观的胜利是 J. Maxwell 在1864年由电磁学规律导出的，后来被 O. Heaviside 以向量形式叙述的 Maxwell 方程组

$$curl\ \vec{H}=\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial(\varepsilon\vec{E})}{\partial t},\qquad curl\ \vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial(\mu\vec{H})}{\partial t},$$

$$div\ \varepsilon\vec{E}=\rho,\qquad div\ \mu\vec{H}=0.$$

它是电磁学理论的基础，正是对这些方程的研究，Maxwell 预言，电磁波以光速通过空间，而光是一种电磁现象。

关于存在性定理的工作是 A. Cauchy 的主要活动，这位令人钦佩的最伟大的法兰西数学家建立了偏微分方程一些基本定理。Cauchy 指出，任何高阶方程都可以化为一阶偏

微分方程组，他进而讨论了方程组解的存在性，他用我们今天称之为“优函数法”（或强函数法）证明了在方程系数与初值均解析的条件下，方程组的初值问题存在唯一的解析解。Cauchy 的工作被 K.Weierstrass 的学生，少有名望的女数学家Sophie—Kowalewsky 以稍微改进的方式独立地完成了，这就是我们今天称之为 Cauchy-Kowolewsky 定理的内容。

Du Bois—Reymond 在 1839 年对一般的二阶方程的分类在今天已经是标准的了；Monge 关于两个自变量的二阶方程的特征理论后来被 J. Hadamard 推广到任意阶的方程；本世纪后半叶，H. Schwarz, Picard, Poincare 先后证明了区域 D 中的方程

$$\Delta u+\lambda u=f$$

的特征值的存在性及其性质；从1885年 Schwarz 的基本论文开始，关于偏微分方程的初、边值问题的系统理论虽然还是不成熟的，但是已经解决了诸如方程的分类、特征理论等问题。

20 世纪初，偏微分方程的理论又有了新的发展，1900 年，Hilbert 就提出了建立系统的偏微分方程理论的必要性，从 30 年代开始，在 Sobolev 空间理论基础上建立起来的泛函分析方法，为处理线性与非线性偏微分方程提供了一个强有力的框架和工具；其后，在50年代，以 Schwarz 广义函数（分布）理论的出现为标志，又提供了处理偏微分方程问题的又一种框架，许多经典的方法（如Fourier分析）在此发挥了巨大的作用。对三类古典方程（波动方程、热传导方程和位势方程）的研究已经十分祥尽，其理论也尽乎完

备；在最近三十年中，在各个新的方向上的研究特别活跃，不仅研究一般的高阶方程与方程组，甚至解的概念也扩大了，而且陆续出现了比偏微分算子更一般的算子，如拟(伪)微分算子（Pseudo—differential operators）富里叶积分算子（Fourier—integral operators），以及微局部分析，超函数等新的强有力的理论与工具，不仅极大地改变了线性偏微分方程的面貌，而且已经应用于处理非线性偏微分方程的问题。

偏微分方程的理论之所以有如此迅速地发展，一方面是由于实际中不断地提出大量的新的研究课题，这不仅在传统的物理学，力学，天文学方面，而且在新的学术领域，如量子力学、高能物理，大型工程尖端技术等方面，甚至在非传统的化学，生物学及某些社会科学，也不断地提出一些重要的偏微分方程（组），需要深入地研究与探讨；另一方面也由于数学本身各分支的发展，一些新的思想和方法被应用到数学物理中来，特别是电子计算机的广泛应用，计算方法和能力的不断提高，使得偏微分方程的许多理论上的解法得以在机器上迅速地求出其任意精确度的解的数值，这更为偏微分方程的研究提供了强有力的实现手段。目前，这门学科的基本内容不仅是每个数学工作者所必备的知识，而且对其他的科学工作者及其工程技术人员所不可缺少，因此，了解与学习这门课程的基本内容，不仅是完全必要的，而且是十分重要的。

二、数学物理方程的任务与特点

本课程主要是介绍三类经典方程（波动方程，热传导方