纯粹数学与应用数学专著 第9号

值分布论及其新研究

杨 乐 著

科 学 出 版 社

纯粹数学与应用数学专著　第9号

值分布论及其新研究

杨　乐著

科　学　出　版　社

1 9 8 2

内 容 简 介

本书对半个世纪以来国内外在亚纯函数值分布理论方面的研究工作做了系统的总结，对国内外很多新成果给予了简单、明瞭的论证．前三章并扼要介绍了亚纯函数值分布理论的基础知识——Nevanlinna 理论、正规族、Borel 方向．

本书适合大学数学专业高年级学生、研究生、教师和研究工作者阅读与参考．

纯粹数学与应用数学专著　第 9 号

值分布论及其新研究

杨　乐著

责任编辑　黄　南　张启男

科 学 出 版 社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1982年 8月第 一 版　开本：850×1168　1/32

1982年 8月第一次印刷　印张：10 1/2

印数：精 1—2,750　插页：精 3 平 2

平 1—3,900　字数：277,000

统一书号：13031・1950

本社书号：2650・13—1

定价：布面精装 2.95 元

平　装 2.00 元

科技新书目：28-精 33 平 34

序　言

一些理论和实际问题的研究往往需要寻求某些整函数或亚纯函数的根. 这就是说,对于一个整函数或亚纯函数 $f(z)$ 与任意复数 a,要研究方程 $f(z)=a$ 是否有根以及根的多少与分布等问题. 上世纪末,著名数学家 É. Picard 和 É. Borel 先后获得了突出的成果,以后有很多学者从事这方面的研究,因而形成了整函数与亚纯函数值分布理论.

本世纪初,P. Montel 引进了正规族的概念,它是指一族全纯或亚纯函数的某种列紧性. Montel 成功地把函数族是否正规与函数取值问题联系起来,建立了重要的正规定则. 以后 G. Julia 把 Montel 定则应用于整函数,对 Picard 定理作了本质的补充,证明了存在所谓 Julia 方向. 这就开创了辐角分布论的研究,而原来在全平面上对函数取值的研究则称为模分布论.

在值分布论的发展中,R. Nevanlinna 有着巨大的贡献. 1925 年他引进了亚纯函数的特征函数,并且建立了两个基本定理,被称为 Nevanlinna 理论. 以往 Picard, Borel 的定理都成为它的简单的推论. 从 Nevanlinna 的基本定理也可以证明 Montel 的正规定则. 1928 年,G. Valiron在 Nevanlinna 理论的基础上导出了亚纯函数存在 Borel 方向. 它是辐角分布论里十分深刻的结果.

本书前三章主要对 Nevanlinna 理论,正规族,Borel 方向进行了论述,其中包括了 Picard-Borel 定理,Julia 方向以及 Schottky 定理,Landau 定理等经典结果. 此外还有庄圻泰关于 Nevanlinna 第二基本定理的推广.

半个多世纪以来,Nevanlinna 理论不断发展. 其中一个重要方面是引进导数,与函数本身结合起来考虑值分布问题.起初是建立相应的结果,例如 Milloux 不等式,熊庆来不等式,Miranda 定

则等. 以后则进一步考虑引进导数后特有的问题，例如庄圻泰关于亚纯函数与其导数的特征函数的比较，Hayman 不等式以及最近顾永兴获得的正规定则. 这些将在第四章里予以论述.

重值是 Nevanlinna 理论中一个十分有趣的方面，模分布论、正规族与辐角分布论里一系列的成果都可以考虑重值而得到加强. 这些是第五章论述的内容，其中大部分是作者的一些研究工作.

在 Borel 方向的概念出现后，一个重要的问题是亚纯函数的 Borel 方向的分布应符合怎样的规律? 作者与张广厚解决了这个问题，这在第六章前半部分论述. 第六章后半部分则讨论了亚纯函数与其导数是否存在公共的 Borel 方向，这是一个非常困难的问题，其中着重提到 Milloux，张广厚以及作者的研究工作.

第七章是作者与张广厚的工作，在模分布论的重要概念亏值和辐角分布论的基本概念 Borel 方向间建立了简单而紧密的联系.

在第八章里介绍了近年来值分布论里的一项重大成果——A. Baernstein 的 T^* 函数与展布关系. 一方面从它可以推出以往的许多重要成果，例如 Edrei-Fuchs 的椭圆定理，Fuchs 定理等; 另一方面应用它立即解决了下级小于 1 的亏量问题，而且 T^*函数在单叶函数的系数估计以及最小模等方面都取得了应用.

值得指出的是一本书当然不可能把几十年来值分布论中丰富多采的结果都包括进去，即使有些非常重要的成果，也不可能一一予以论述. 例如 D. Drasin 解决 Nevanlinna 反问题的著名工作，我们就没有收集.

本书仅假定读者具有大学复变函数论的基础，因此具有大学数学专业高年级学生程度的人就可以阅读.

本书大部分内容是近年来值分布论中的新成果，属于第一次写进书里. 对于很多结果，作者使用了不同的处理方式，并且力图不采取原文中篇幅很长的复杂证明，而另外给予简单的证明. 当然这样就容易带来疏忽甚至错误，请读者批评指正.

杨　乐　1979 年 7 月

目　　录

第一章　Nevanlinna 理论概要

1925 年，R. Nevanlinna[1] 建立了亚纯函数的两个基本定理，开始了值分布理论的近代研究．几十年来，亚纯函数值分布理论的新发展都是以 Nevanlinna 理论为基础的．所以作为开始的一章，我们扼要介绍 Nevanlinna 理论¹⁾．在本章最后一节还将介绍庄圻泰[5]关于 Nevanlinna 第二基本定理的一个重要推广．

§1.1. Poisson-Jensen 公式

1.1.1. Poisson-Jensen 公式

在 Nevanlinna 理论中，下述 Poisson-Jensen 公式起着十分重要的作用．

定理 1.1. 设函数 $f(\zeta)$ 在 $|\zeta| \leqslant R(0 < R < \infty)$ 上亚纯，a_μ $(\mu = 1, 2, \cdots, M)$，$b_\nu(\nu = 1, 2, \cdots, N)$ 分别为 $f(\zeta)$ 在 $|\zeta| < R$ 内的零点和极点．若 $z = re^{i\theta}$ 为 $|\zeta| < R$ 内不与 a_μ，b_ν 相重的任意一点，则

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{M} \log\left|\frac{R(z - a_\mu)}{R^2 - \bar{a}_\mu z}\right| - \sum_{\nu=1}^{N} \log\left|\frac{R(z - b_\nu)}{R^2 - \bar{b}_\nu z}\right|. \qquad (1.1.1)$$

证．首先我们假定在 $|\zeta| \leqslant R$ 上，$f(\zeta)$ 既无零点又无极点．这时 $\log f(\zeta)$ 是该圆上的全纯函数，于是 $\log f(\zeta)$ 在 $|\zeta| \leqslant R$ 上 Taylor 展式的首项系数应为

---

1) 关于 Nevanlinna 理论，有兴趣的读者可参阅 Nevanlinna[1,2,3]，Hayman[2]，Tsuji[1]，Гольдберг и Островский[1]，小泽满[1]．

$$\log f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} \log f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log f(Re^{i\varphi})d\varphi. \tag{1.1.2}$$

将上式两端取实部，就证明了 (1.1.1) 式中 $z = 0$ 的情况. 对于一般情形，命

$$w = \frac{R(\zeta - z)}{R^2 - \bar{z}\zeta}.$$

它将 $|\zeta| \leqslant R$ 映为 $|w| \leqslant 1$. 将 $\zeta = z$ 映为 $w = 0$, 其逆为 $\zeta = \frac{R(Rw + z)}{R + \bar{z}w}$. 记 $F(w) = f\left(\frac{R(Rw + z)}{R + \bar{z}w}\right)$, 则 $F(w)$ 在 $|w| \leqslant 1$ 上亚纯，且既无零点又无极点. 按照 (1.1.2) 式应有

$$\log F(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \log F(w)\frac{dw}{w}.$$

但是

$$\frac{dw}{w} = d(\log w) = \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}d\zeta}{R^2 - \bar{z}\zeta} = \frac{(R^2 - |z|^2)d\zeta}{(R^2 - \bar{z}\zeta)(\zeta - z)}.$$

从而

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} \log f(\zeta)\frac{R^2 - |z|^2}{(R^2 - \bar{z}\zeta)(\zeta - z)}d\zeta. \tag{1.1.3}$$

在 $|\zeta| = R$ 上, $\zeta = Re^{i\varphi}$, $d\zeta = iRe^{i\varphi}d\varphi$,

$$\begin{aligned}(R^2 - \bar{z}\zeta)(\zeta - z) &= (R^2 - Rre^{i(\varphi-\theta)})(Re^{i\varphi} - re^{i\theta}) \\ &= Re^{i\varphi}\{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta) + r^2\}.\end{aligned}$$

将这些代入 (1.1.3) 式，并取实部即得

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})| \times \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta) + r^2}d\varphi. \tag{1.1.4}$$

当 $f(\zeta)$ 在 $|\zeta| = R$ 上有零点和极点，而在 $|\zeta| < R$ 内既无零点又无极点时，显然在 $|\zeta| = R$ 上 $f(\zeta)$ 的零点和极点的数目

是有穷的，以每个零点和极点为心，充分小的正数 ε 为半径作小圆周．这些小圆周位于 $|\zeta| \leqslant R$ 内的部分与 $|\zeta| = R$ 上留下的弧段组成闭围线 Γ_ε，它所范围的区域为 D_ε．在 D_ε 内

$$\frac{\log f(\zeta)(R^2 - |z|^2)}{(R^2 - \bar{z}\zeta)(\zeta - z)}$$

除 $\zeta = z$ 外全纯，在 $\zeta = z$ 处有一个极点，残数为 $\log f(z)$．根据残数定理有

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} \log f(\zeta) \frac{R^2 - |z|^2}{(R^2 - \bar{z}\zeta)(\zeta - z)} d\zeta.$$

可以看出在 ε 为半径的小圆周弧上，被积函数的模为 $O\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)$，而小圆周弧的长度小于 $2\pi\varepsilon$．于是在这些小圆周弧上的积分应随 ε 趋向于 0．从而这时 (1.1.4) 式也成立．

当 $f(\zeta)$ 在 $|\zeta| < R$ 内有零点和极点时，记其零点和极点分别为 $a_\mu(\mu = 1, 2, \cdots, M)$ 和 $b_\nu(\nu = 1, 2, \cdots, N)$，重级零点和极点须按其重数计算．命

$$g(\zeta) = f(\zeta) \frac{\prod_{\nu=1}^{N} \frac{R(\zeta - b_\nu)}{R^2 - \bar{b}_\nu\zeta}}{\prod_{\mu=1}^{M} \frac{R(\zeta - a_\mu)}{R^2 - \bar{a}_\mu\zeta}}.$$

函数 $g(\zeta)$ 在 $|\zeta| \leqslant R$ 上亚纯，在 $|\zeta| < R$ 内既无零点又无极点，根据以上的证明有

$$\log |g(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |g(Re^{i\varphi})|$$

$$\times \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi.$$

但是

$$|g(Re^{i\varphi})| = |f(Re^{i\varphi})|, \quad (0 \leqslant \varphi < 2\pi),$$

$$\log|g(z)| = \log|f(z)| + \sum_{\nu=1}^{N} \log\left|\frac{R(z-b_\nu)}{R^2-\bar{b}_\nu z}\right|$$

$$-\sum_{\mu=1}^{M} \log\left|\frac{R(z-a_\mu)}{R^2-\bar{a}_\mu z}\right|,$$

这样便可得到(1.1.1)式.

1.1.2. 推论

系 1. 在定理 1.1 条件下，若 $f(\zeta)$ 在 $|\zeta| \leqslant R$ 上没有零点和极点，则对于任意点 z, $|z| = r < R$, 有

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})|$$

$$\times \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi) + r^2}\, d\varphi. \qquad (1.1.5)$$

这就是 Poisson 公式.

系 2. 在定理 1.1 条件下，若 $f(0) \neq 0, \infty$, 则

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi$$

$$-\sum_{\mu=1}^{M} \log\frac{R}{|a_\mu|} + \sum_{\nu=1}^{N} \log\frac{R}{|b_\nu|}. \qquad (1.1.6)$$

(1.1.6)称为 Jensen 公式.

当 $f(0) = 0$ 时，记其重级为 $n(0, f=0)$; 当 $f(0) = \infty$ 时，记其重级为 $n(0, f=\infty)$. (当 $f(0) \neq 0$ 时，则 $n(0, f=0) = 0$. 同样当 $f(0) \neq \infty$ 时，则 $n(0, f=\infty) = 0$.) 若令 $\tau = n(0, f=0) - n(0, f=\infty)$, 则无论那种情况在原点邻域内总有展式

$$f(\zeta) = c_\tau\zeta^\tau + \cdots, \quad c_\tau \neq 0.$$

命

$$g(\zeta) = \begin{cases} f(\zeta)\left(\dfrac{R}{\zeta}\right)^\tau & \zeta \neq 0, \\ c_\tau R^\tau & \zeta = 0. \end{cases}$$

$g(\zeta)$ 在 $|\zeta| \leqslant R$ 上亚纯，且 $g(0) \neq 0, \infty$. 对 $g(\zeta)$ 应用 Jensen 公式 (1.1.6)，并计及 $|g(Re^{i\varphi})| = |f(Re^{i\varphi})|$，则得

$$\log|c_\tau| + \tau\log R = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|d\varphi$$

$$-\sum_{0<|a_\mu|<R}\log\frac{R}{|a_\mu|} + \sum_{0<|b_\nu|<R}\log\frac{R}{|b_\nu|}.$$

即

$$\log|c_\tau| + n(0, f=0)\log R = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|d\varphi$$

$$-\sum_{0<|a_\mu|<R}\log\frac{R}{|a_\mu|} + \sum_{0<|b_\nu|<R}\log\frac{R}{|b_\nu|} + n(0, f=\infty)\log R. \tag{1.1.7}$$

这是 Jensen 公式的普遍形式.

§1.2. 特征函数与第一基本定理

1.2.1. 特征函数.

为了将 Jensen 公式变形和定义亚纯函数的特征函数，我们先引进正对数.

定义 1.1. 对于 $x \geqslant 0$，定义

$$\log^+ x = \max(\log x, 0) = \begin{cases} \log x & x \geqslant 1, \\ 0 & 0 \leqslant x < 1. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

容易看出，对于任意正数 x 有

$$\log x = \log^+ x - \log^+\frac{1}{x}.$$

于是对于 $|z| < R$ 内亚纯的函数 $f(z)$ 与 $0 < r < R$ 有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})|d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\varphi})|d\varphi$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\varphi})|}d\varphi.$$

另一方面，记 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant r$ 上的极点数为 $n(r,f)$，重级极点按其重数计算. 以 $n(0,f)$ 表示 $f(z)$ 在原点处极点的重级(当 $f(0)\neq\infty$ 时，则 $n(0,f)=0$). $f(z)$ 在 $0<|z|\leqslant r$ 的极点记为 $b_1, b_2, \cdots, b_N$，每个 b_ν 出现的次数等于 $f(z)$ 在 b_ν 极点的重级. 这时

$$\sum_{\nu=1}^{N}\log\frac{r}{|b_\nu|}=\int_0^r\log\frac{r}{t}\,d(n(t,f)-n(0,f)).$$

分部积分后即有

$$\sum_{\nu=1}^{N}\log\frac{r}{|b_\nu|}=\int_0^r\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt.$$

同样若记 $f(z)$在$|z|\leqslant r$ 上的零点数为 $n\left(r,\frac{1}{f}\right)$，$f(z)$ 在原点处的零点重级为 $n\left(0,\frac{1}{f}\right)$，记 $f(z)$ 在 $0<|z|\leqslant r$ 的零点为 $a_1, a_2, \cdots, a_M$，每个 a_μ 出现的次数等于其零点的重级，则

$$\sum_{\mu=1}^{M}\log\frac{r}{|a_\mu|}=\int_0^r\frac{n\left(t,\frac{1}{f}\right)-n\left(0,\frac{1}{f}\right)}{t}dt.$$

于是 Jensen 公式可以写为

$$\begin{aligned}\log|c_\tau| &+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\varphi})|}d\varphi\\ &+\int_0^r\frac{n\left(t,\frac{1}{f}\right)-n\left(0,\frac{1}{f}\right)}{t}dt+n\left(0,\frac{1}{f}\right)\log r\\ =\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}&\log^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi+\int_0^r\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt\\ &+n(0,f)\log r.\end{aligned}$$

基于这样的形式，Nevanlinna[1,2] 曾引进以下几个函数.

定义 1.2.

$$
\left.\begin{aligned}
&m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi, \\
&m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi}) - a|}\, d\varphi, a \neq \infty.
\end{aligned}\right\} \tag{1.2.2}
$$

$m(r, f)$ 也记为 $m(r, f=\infty)$ 或 $m(r, \infty)$，是 $|f(z)|$ 的正对数在 $|z| = r$ 上的平均值；$m\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ 也记为 $m(r, f=a)$ 或 $m(r, a)$.

定义 1.3.

$$
\left.\begin{aligned}
&N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t}\, dt + n(0, f)\log r, \\
&N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f-a}\right) - n\left(0, \frac{1}{f-a}\right)}{t}\, dt \\
&\qquad + n\left(0, \frac{1}{f-a}\right)\log r, \quad a \neq \infty.
\end{aligned}\right\} \tag{1.2.3}
$$

这里 $n\left(t, \frac{1}{f-a}\right)$ 表示 $|z| \leqslant t$ 上 $f(z) - a$ 的零点个数，重级零点按其重数计算，$n\left(t, \frac{1}{f-a}\right)$ 也记为 $n(t, f=a)$ 或 $n(t, a)$. $n\left(0, \frac{1}{f-a}\right)$ 则表示 $f(z) - a$ 在原点的重级，它也记为 $n(0, f=a)$ 或 $n(0, a)$. $N(r, f)$ 有时记为 $N(r, f=\infty)$ 或 $N(r, \infty)$，是 $f(z)$ 极点的密指量；$N\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ 有时记为 $N(r, f=a)$ 或 $N(r, a)$，是 $f(z)$ 的 a–值点的密值量.

定义 1.4. $T(r, f) = m(r, f) + N(r, f)$. (1.2.4)

$T(r, f)$ 称为 $f(z)$ 的特征函数. 显然它是非负函数.

于是 Jensen 公式可以写为

$$
\log |c_\tau| + T\left(r, \frac{1}{f}\right) = T(r, f). \tag{1.2.5}
$$

(1.2.5)有时也称为 Jensen-Nevanlinna 公式.

1.2.2. 函数的积与和的特征函数、例

为了讨论有限个亚纯函数的乘积与和的特征函数，我们先注意正对数的几个性质.

设 $a_\nu(\nu=1,2,\cdots,p)$ 为任意 p 个有穷复数,则

$$\log^+\left|\prod_{\nu=1}^{p}a_\nu\right|\leqslant\log^+\left\{\prod_{\nu=1}^{p}\max(1,|a_\nu|)\right\}$$

$$=\log\left\{\prod_{\nu=1}^{p}\max(1,|a_\nu|)\right\}$$

$$=\sum_{\nu=1}^{p}\log\{\max(1,|a_\nu|)\}=\sum_{\nu=1}^{p}\log^+|a_\nu|,$$

以及

$$\log^+\left|\sum_{\nu=1}^{p}a_\nu\right|\leqslant\log^+\left\{\sum_{\nu=1}^{p}|a_\nu|\right\}$$

$$\leqslant\log^+\left\{p\left(\max_{1\leqslant\nu\leqslant p}|a_\nu|\right)\right\}\leqslant\sum_{\nu=1}^{p}\log^+|a_\nu|+\log p.$$

据此，若 $f_\nu(z)(\nu=1,2,\cdots,p)$ 为 p 个于 $|z|<R$ 内亚纯的函数,则对于 $0<r<R$ 有

$$m\left(r,\prod_{\nu=1}^{p}f_\nu\right)\leqslant\sum_{\nu=1}^{p}m(r,f_\nu),$$

$$m\left(r,\sum_{\nu=1}^{p}f_\nu\right)\leqslant\sum_{\nu=1}^{p}m(r,f_\nu)+\log p.$$

此外对于 $0<r<R$ 显然有

$$n\left(r,\prod_{\nu=1}^{p}f_\nu\right)\leqslant\sum_{\nu=1}^{p}n(r,f_\nu),$$

$$n\left(r,\sum_{\nu=1}^{p}f_\nu\right)\leqslant\sum_{\nu=1}^{p}n(r,f_\nu).$$

于是

$$T\left(r,\prod_{\nu=1}^{p} f_\nu\right)\leqslant \sum_{\nu=1}^{p} T(r, f_\nu), \qquad (1.2.6)$$

$$T\left(r,\sum_{\nu=1}^{p} f_\nu\right)\leqslant \sum_{\nu=1}^{p} T(r, f_\nu) + \log p. \qquad (1.2.7)$$

例.

1) $f(z)\equiv c$.

这时 $m(r,f)=\log^+|c|, N(r,f)=0$. 于是 $T(r,f)=\log^+|c|$.

2) $f(z)=\dfrac{a_pz^p+a_{p-1}z^{p-1}+\cdots+a_0}{b_qz^q+b_{q-1}z^{q-1}+\cdots+b_0}$, $a_p, b_q\neq 0$.

当 r 充分大时,

$$m(r,f)=\begin{cases}(p-q)\log r+O(1) & p>q,\\ O(1) & p\leqslant q.\end{cases}$$

$$N(r,f)=q\log r.$$

于是

$$T(r,f)=\max(p,q)\log r+O(1).$$

3) $f(z)=e^z$.

这时

$$m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+(e^{r\cos\theta})\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r\cos\theta d\theta$$

$$=\frac{r}{\pi},\qquad N(r,f)\equiv 0.$$

因此 $T(r,f)=\dfrac{r}{\pi}$.

1.2.3. 第一基本定理、特征函数的性质

现在我们证明 Nevanlinna 第一基本定理.

定理 1.2. 设 $f(z)$ 于 $|z|<R(\leqslant\infty)$ 内亚纯. 若 a 为任一有穷复数,则对于 $0<r<R$ 有