成人高等教育教材

高等数学

上册

重庆大学成人教育学院 编

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

重庆大学出版社

成人高等教育教材

高等数学

上册

主编

参编：谢树艺　王代先　邓竞秀
　　　余金诺　万象明　曾繁蓉

重庆大学出版社

内 容 提 要

成人高等教育教材《高等数学》，分上、下册。上册内容有：函数、极限、连续；导数与微分；中值定理与导数的应用；不定积分；定积分；定积分的应用；微分方程等。与此教材配套的《教学参考书》也分上、下册，其内容有：教材中的习题及思考题解答；参考题及解答；参考内容等。

编这套书的指导思想是：既坚持国家教委颁发的全国高等学校工科各专业“高等数学课程教学基本要求”，又适合成人教育特点，做到易教易学。

这套书可供成人教育（夜大、职大、函授大学等）工科各专业本科、专科作为教材，也可供全日制大学生参考。

成人高等教育教材

高等数学

上册

王杰 主编

责任编辑 王季康

重庆大学出版社出版发行

重庆师范学院印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：13.25 字数：29.8千

1992年4月第1版 1992年4月第1次印刷

标准书号：ISBN 7-5624-0517-4 / O·70 印数：6000 定价：4.65元

（川）新登字020号

编者的话

近七、八年来，随着我国社会主义现代化事业的发展，成人高等教育随之蓬勃兴起，发展迅速。巩固已有成果，确保教育质量，这是今后长期的任务。

在工科的成人高等教育中，高等数学是一门重要的基础理论课。它的学时较多，每个专业的学员都必须学习。过去使用的教材一般是全日制高等工科院校的教材。因为这种教材不是为成人教育编的，不可能很好地结合成人教育的特点，满足成人教育的要求。为了适应成人教育的特点与要求，迫切需要编写一套适合工科成人高等教育使用的高等数学教材。

编者在重庆大学成人教育学院的组织与领导下，按照国家教委颁发的全国高等学校工科各专业“高等数学课程教学基本要求”，制订了重庆大学成人教育学院工科各专业高等数学教学大纲，在此基础上编写了这套教材。

在整个编写过程中，我们处处想到工科成人高等教育的特点，这是一个大前提。成人高等教育，顾名思义是成人接受高等教育，其特点一是成人，二是高等。由于学员是成人，有较强的求知欲望，学习目的明确，有较多的实践经验，理解能力较强，但年纪偏大，一般都是边工作边学习，课外学习时间相对地不够充分，还要克服各种矛盾和困难。他们能坚持学习，精神是很可佳的。同时由于是高等教育，就不能降低基本要求。要明确他们所学的是工科专业，他们学习高等数学的目的是获得这门课程的基本概念、基本理论

和基本运算技能（即所谓“三基”），为学习后继课程和以后的工作奠定必要的数学基础。因此，我们特别注意：

1.坚持教委颁发的“基本要求”，突出“三基”。凡属“基本要求”中的内容，教材中都有，而且按所提具体要求编写，决不降低；对超出“基本要求”的内容，原则上不写入教材，而对于“三基”的内容，务求讲深讲透，让学员能较好地掌握。

2、对重要概念都由实际问题引入，对重要定理的证明力求简明而又严谨，并尽可能配合以几何直观或物理模拟的说明，让学员感到这些概念的引入和定理的证明都是自然而然、顺理成章的事情，并有利于由直观到抽象能力的培养。

3。语言叙述上，用词准确，清楚流畅，深入浅出，通俗易懂，该详的详，该略的略，并注意前呼后应，让学员便于复习和自学。

4。例题和习题选取恰当，具有代表性。习题数目适量，难易适宜，大体都是学员必作的题目。对基本训练的题目保证有足够的数量，而对于超过“基本要求”的那些太难的、技巧性很特殊而对学员没有多大用途的题目都不列入习题之中。

5。配有富于启发性的思考题。思考题以理解基本概念和定理的内容为主，力求形式多样，生动活泼。思考题一般不难，但也要在听课和看书之后，通过思考才能解答。思考题有利于培养学员看书和思考问题的习惯，加深对教材内容的理解。

此外，配合本教材还编有《教学参考书》，供教师教学和学生学习时参考。《教学参考书》的内容包括：习题、思考题及解答；参考题及解答；参考内容。其中，参考题可在

答疑辅导时向学员讲授。

总之，本教材是为工科成人高等教育编写的，我们的目标是在保证达到“基本要求”的前提下，既便于教师教学，又便于学员学习。

本书分上册与下册，上册内容共七章：函数、极限、连续；导数与微分；中值定理与导数的应用；不定积分；定积分；定积分的应用；微分方程。书末附有积分表和习题答案。

本教材在编写过程中，注意充分发挥个人和集体的智慧。书中吸取了编者多年来在本校夜大和日大教学中累积起来的一些有益的经验和教学研究成果。

本书是按照工科本科专业要求编写的，教学时数为210学时。对于专科专业，教学时数略少一些，根据专业要求，在适当删减一些内容（如三重积分、曲线积分、曲面积分和傅里叶级数）之后，本书也仍然适用，特别，对高等数学教学时为120学时的专科，一般只学本书上册内容即可。

本书由王杰副教授主编，谢树艺教授参加了本书的编写工作，并提供了宝贵的意见。其他编者有：王代先副教授、邓竞秀副教授、万象明副教授、曾繁蓉副教授及退休老教师余金诺同志。

限于编者水平，书中缺点错误之处在所难免，恳切地请使用本教材的教师和广大读者批评指正，我们由衷地表示感谢。

编者1988年3月于重庆大学系统工程及应用数学系

前　言

本书经过从1988——1991三个学年试用，所有编者及全体使用本教材的数学教师，都十分关心本教材的完善，不断提出修改意见，反复进行讨论和改进，现在正式出版。

在试用阶段，不仅重庆大学成人教育学院所有本科、专科都使用本教材，而且函授班也使用本教材。实践说明，使用本教材，可以达到教学要求，完成教学任务。

与本书配套的《教学参考书》，不仅教师可用，函授生可用，本科、专科生也可在适当的时候用，它可以帮助学员学到更多的数学知识。

重庆大学系统工程及应用数学系杨万年教授、刘松教授、何良材副教授、谈骏渝副教授和已退休的罗国光教授审阅了全书，并提出了宝贵的意见，我们表示衷心的感谢。

重庆大学成人教育学院付院长邹维勤付研究员对本书的编写和出版，给予了强有力的组织领导、支持和严格要求，我们表示最衷心的感谢。

限于编者水平，书中难免仍有缺点或不妥之处，恳切地请使用本书的教师和广大读者批评指正。

编者1991年7月于重庆大学系统工程及应用数学系

目　　录

第一章　函数、极限、连续

函数是高等数学中的基本概念。高等数学中所讨论的函数极大多数是初等函数。极限概念与方法为高等数学的基本概念与基本方法。连续是很广泛的一类函数所具有的基本性质，连续函数是高等数学研究的函数的主要类型。所以本章是高等数学的基础。

第一节　函　　数

由于在中学里，对函数概念及其性质，已有较详细的讨论，所以这里只是复习和适当加深。

一、函数的概念

客观世界有许多变量，它们之间往往是彼此依赖、彼此制约的。这种变量间的依赖、制约关系，反映在数学上成为函数关系。

例1　（图1-1）半径为 R 的圆内接正 n 边形，边数 n 与其面积 A 之间有关系式：

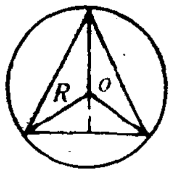

图1-1

$$A=n\left[\frac{1}{2}\left(2R\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(R\sin\frac{\pi}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}nR^2\sin\frac{2\pi}{n},\ （n\text{ 取}3，4，5，\cdots）。$$

例2　自由落体运动的距离 S 与时间 t 之间有关系式：$S=\frac{1}{2}gt^2$，（$0\leqslant t\leqslant T$）。其中 T 表示物体落地的时刻。重力加速

度$g=9.8$米/秒^2。

定义 设有两个变量x和y，如果当变量x在其变化范围内任意取定一个数值时，变量y按照确定的法则，总有确定的数值和它对应，就称y是x的**函数**。其中x叫做**自变量**，y叫做**函数**或**因变量**。自变量x的变化范围叫做这个函数的**定义域**，因变量y的取值范围叫做这个函数的**值域**。

定义域与对应法则是函数关系中的两个要素，两个函数若具有相同的定义域和对应法则，就称它们是等同的或相同的。

函数的定义域就是允许自变量取值的范围。对应法则的含义是广泛的，各种各样的，只要有一种方法，使给定了自变量的值后，函数（因变量）就有确定的值与其对应，这种方法就是对应法则。

本书中，除特别说明外，函数的定义域和值域都是指实数集合。不一定是区间（如例1），但多数是区间。

设a与b是两个实数，且$a<b$，则：

适合$a\leqslant x\leqslant b$的一切x的全体叫**闭区间**，记为$[a, b]$；

适合$a<x<b$的一切x的全体叫**开区间**，记为(a, b)；

适合$a<x\leqslant b$或$a\leqslant x<b$的一切x的全体叫**半开区间**，分别记为$(a, b]$或$[a, b)$。

以上各种情况，a与b都叫**区间的端点**，$b-a$叫**区间的长度**。

除上述有限区间外，还有下述无限区间：

$a\leqslant x<+\infty$，记为$[a, +\infty)$，表示不小于a（大于或等于a）数的全体；

$-\infty<x<b$，记为$(-\infty, b)$，表示小于b的数的全体；

$-\infty<x<+\infty$，记为$(-\infty, +\infty)$，表示全体数。

其中$+\infty$和$-\infty$分别读作"正无穷大"和"负无穷大"，它们仅是记号，不是数。

定义 设a与δ是两个数，且$\delta>0$，适合$|x-a|<\delta$的数x的全体叫**点a的δ**(读作"德耳塔")**邻域**，记为$N(a,\ \delta)$，点a叫做**邻域的中心**，δ叫做**邻域的半径**。

不等式$|x-a|<\delta$与$-\delta<x-a<\delta$，或$a-\delta<x<a+\delta$，或$(a-\delta, a+\delta)$互相等价。$N(a,\ \delta)$的图如图1-2。

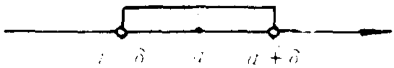

图 1-2

适合$0<|x-a|<\delta$(即$a-\delta<x<a$或$a<x<a+\delta$)的数x的全体叫做点a的**去心δ邻域**，记为$N(\overline{a},\ \delta)$。

定义 如自变量取某一数值x_0时，函数有确定的值和它对应，则称**函数在x_0处有定义**。如函数在某一区间上各点处都有定义，则称**函数在该区间上有定义**。

如自变量在定义域内任取一个确定值时，函数都只有一个确定的值与其对应，这种函数叫做**单值函数**，否则叫**多值函数**。如$y^2-x^2=1$即$y=\pm\sqrt{1+x^2}$为多值函数，$y=\sqrt{1+x^2}$与$y=-\sqrt{1+x^2}$是它的两个单值支。以后如无特别说明时，函数都是指单值函数。如果遇到多值函数，可以把它拆成几个单值支，再分别进行讨论。

二、函数记号

y是x的函数可用$y=f(x)$、$y=\varphi(x)$、$y=F(x)$等表示。

如$y=f(x)=2x^3+4$。这里，记号"$f(\quad)$"表示这样的对应法则：与x对应的函数值，是由括号内的x值立方后乘以2再加上4而得到的。这时也可以说：$f(\quad)$表示$2(\quad)^3+4$。甚至作为记号写成$f(\quad)=2(\quad)^3+4$。

对函数 $y=f(x)$，当自变量取某一定值x_0时，相应的函数值用记号$f(x_0)$或$y|_{x=x_0}$表示。

例3 已知函数$f(x)=x^2+1$，求 $f(2)$；$f(x)|_{x=x_0+h}$；$f[f(x)]$。

解 $f(2)=(2)^2+1=5$。

$f(x)|_{x=x_0+h}=(x_0+h)^2+1=x_0{}^2+2x_0h+h^2+1$。

$f[f(x)]=[f(x)]^2+1=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2$

例4 已知 $f(2x+1)=x^2+3x+1$，求 $f(x)$。

解法1 令 $u=2x+1$，则 $x=\dfrac{u-1}{2}$，

于是$f(u)=\left(\dfrac{u-1}{2}\right)^2+3\left(\dfrac{u-1}{2}\right)+1=\dfrac{1}{4}u^2+u-\dfrac{1}{4}$，

故 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+x-\dfrac{1}{4}$。

解法2
$$f(2x+1)=x^2+3x+1$$
$$=\frac{1}{4}(2x+1)^2+(2x+1)-\frac{1}{4},$$

故
$$f(x)=\frac{1}{4}x^2+x-\frac{1}{4}。$$

三、函数的几种特性

1.函数的有界性 设函数$f(x)$在集合B内有定义，如果存在正数M，当 $x\in B$ 时(记号“$\in$”读作“属于”)，都有$|f(x)|\leqslant M$，就称$f(x)$在B内有界；如这样的M不存在，就称$f(x)$在B内无界。

例如，$y=\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内是有界的，如图1-3。因x取任何值时，都有$|\cos x|\leqslant 1$，$M=1$（大于1的任何数均可取作M，M的值不是唯一的)。

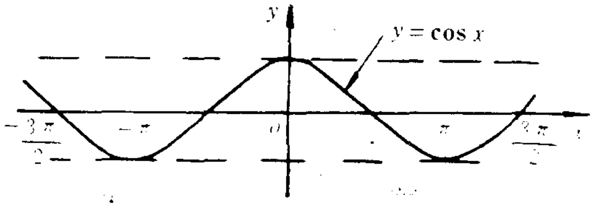

图1-3

$f(x)=\frac{1}{x}$在(0，1)内是无界的，如图 1-4。因不论M取为多大的正数，只要当$0<x<\frac{1}{M}$时，就有$\left|\frac{1}{x}\right|>M$。如，即使取$M=10^{100}$，当$x=\frac{1}{10^{101}}$时，也有$\left|\frac{1}{x}\right|=10^{101}>M$。

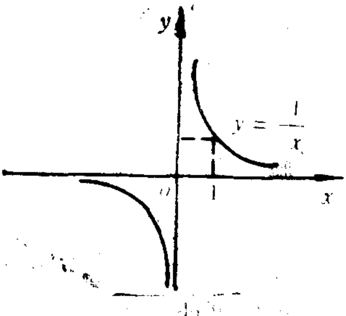

图1-4

2.函数的单调性 如果函数$f(x)$，对于(a,b)内任意两点x_1及x_2，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$，则称$f(x)$在(a,b)内是**单调增加的**，简称**单增**。（图1-5）。

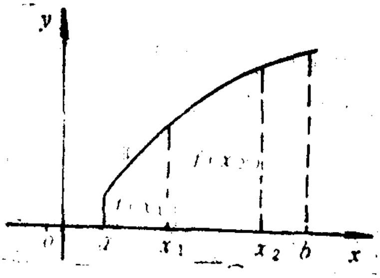

图1-5

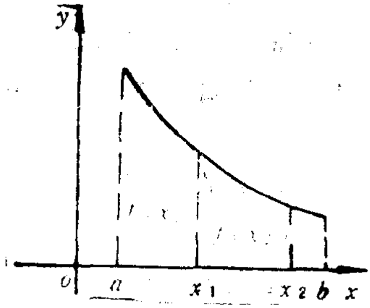

图1-6

如果函数$f(x)$，对于(a,b)内任意两点x_1及x_2，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)>f(x_2)$，则称$f(x)$在(a,b)内是**单调减少的**，