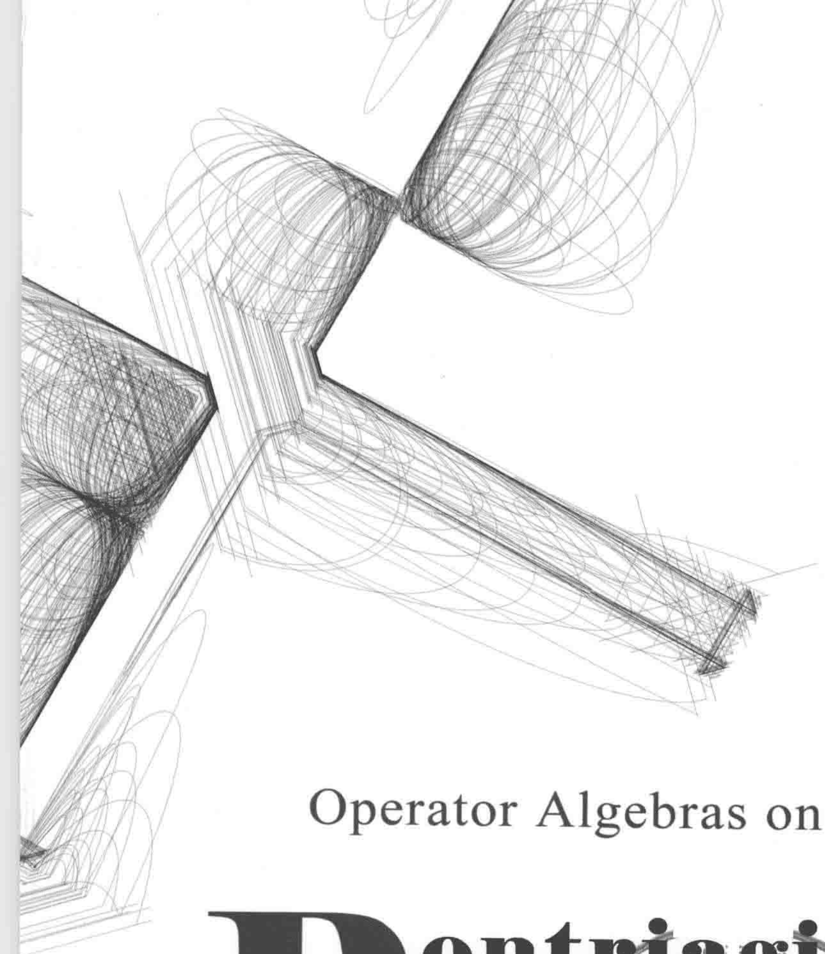
Operator Algebras on Pontrjagin Space

Pontrjagin空间上的算子代数

杨海涛 著

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS
国家一级出版社
全国百佳图书出版单位



杨海涛 著

Operator Algebras on Pontrjagin Space

Pontrjagin空间上的算子代数

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS
国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

图书在版编目(CIP)数据

Pontrjagin 空间上的算子代数/杨海涛著.—厦门:厦门大学出版社,2013.12
ISBN 978-7-5615-4870-7

Ⅰ.①P… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①算子代数—研究 Ⅳ.①O177.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 291006 号

厦门大学出版社出版发行
(地址:厦门市软件园二期望海路 39 号 邮编:361008)
http://www.xmupress.com
xmup @ xmupress.com
泉州新春印刷有限公司印刷
2013 年 12 月第 1 版 2013 年 12 月第 1 次印刷
开本:787×1092 1/16 印张:15.25
插页:2 字数:320 千字
定价:52.00 元

前 言

算子代数是泛函分析中重要的研究领域之一. 自 20 世纪 30 年代 J. von Neumann 和 F. Murray 创立算子代数理论以来,已得到迅速发展. 它的研究不仅具有十分重要的理论价值,而且具有广泛的应用前景. 目前这一理论已成为现代数学的热门分支之一. 它与量子力学、宇宙学、非交换几何、线性系统、控制论甚至数论都有密切联系.

经典的算子代数即 Hilbert 空间上的算子代数,它有两类:弱闭的,即 Von Neumann 代数;一致闭的,即 C^*-代数. 它们都是自伴的算子代数. 1960 年,R. V. Kadison 和 I. M. Singer 提出三角算子代数,J. R. Ringrose 提出套代数,K. R. Davidsoon 总结前人工作著有《套代数》;1982 年,F. G. ilfeather 和 D. R. larson 引入一般的算子代数——VonNeumann 代数中的套子代数;1964 年,M. A. Naimark 提出了 Pontrjagin 空间上的算子代数.

由于Pontrjagin空间是不定度规空间,它是 Hilbert空间的推广,因此 Pontrjagin空间上的算子代数可以把 Hilbert空间上的算子代数(Von Neumann代数和C^*-代数)作为其子代数. 同时,该代数又是非对称(非自伴)的. 在Pontrjagin空间的正规分解下,该代数又是一个三角算子代数,并且含有套子代数. 这就是说,Pontrjagin 空间上的算子代数是更广泛的算子代数.

事实上,在大量的研究中发现,Pontrjagin 空间上的算子与算子代数中问题的结论与 Hilbert 空间上的情况完全不同. 例如:Pontrjagin 空间上的算子代数的理想一般不对称(Von Neumann 代数和 C^*-代数的理想都是对称的);其上的导子未必是内的(Von Neumann 代数上的导子必是内的);Pontrjagin 空间上算子的 P-F 定理一般不成立(Hilbert 空间上算子的 P-F 定理必成立);该代数的谱空间未必极不连通(交换 Von Neumann代数的谱空间都是极不连通的). 这也说明 Pontrjagin 空间上的算子代数的研究中包含了全新的内容、方法、工具和新结论,因而更具有普遍意义. 这就如同从整数环扩展到有理数域的过程中研究除法更有意义,从有理数域扩展到实数域过程中研究无理数更有意义一样. 追求一般化和普遍性是数学基础理论研究的重要目标之一,从这个意义上讲,研究 Pontrjagin 空间上的算子代数更具有一般性和普遍意义.

Pontrjagin空间是负指标为 k 的不定度规空间. 不定度规空间是一种具有明确物理背景

的空间，该种空间最初是出现在 P. A. M. Dirac 的有关量子场论方面的文章中. 后来在 20 世纪 40 年代，前苏联数学家 Pontrjagin 从力学问题研究的需要中首先从数学上讨论不定度规空间及其上的算子理论. 爱因斯坦的相对论中“时一空”的空间其实就是负指标为 1 的四维不定度规空间，即四维的 $\prod_1$ 空间.

有关不定度规空间上的几何理论及算子理论虽然远不像 Hilbert 空间中的相应理论那样丰富完善，但也取得很多比较成熟的理论. 这些内容可在 J. Bognar 所著《Indefinite inner product spaces》(Berlin: Springer-Verlag, 1974) 和夏道行、严绍宗先生所著《线性算子谱理论 Ⅱ》(北京：科学出版社，1987) 中找到.

Pontrjagin 空间上的算子代数是量子场论研究的有力工具，它的研究始于 20 世纪 60 年代末期. 首先研究的是数学家 M. A. Naimark 和 R. S. Ismagilov，以及后来的 V. S. Shulman，E. V. Kissin，A. I. Loginov，V. I. Liberzon 等学者. 我国的学者夏道行、严绍宗、童裕孙教授等对此也作出了系列研究. 前人研究的主要是 Pontrjagin 空间上的算子理论以及没有零性不变子空间的算子代数和交换的算子代数.

从现有文献看，Pontrjagin 空间上的算子代数的研究大致有以下几种途径：

1. 通过空间分解来研究具有某些特性的代数的结构，如研究交换对称的算子代数，研究非退化(包括不可约)的算子代数等(以 M. A. Naimark，R. S. Ismagilov，V. S. Shulman，V. I. Liberzon 等为代表)；

2. 以导子和表示为工具来研究算子代数的结构(以 V. S. Shulman，E. V. Kissin 等为代表)；

3. 利用谱函数的方法研究算子代数的结构(以夏道行、童裕孙等为代表).

由于 Pontrjagin 空间与 Hilbert 空间的本质区别之一是它有零性子空间，因此该空间上有零性不变子空间的算子代数，更具有一般性. 事实上，没有零性不变子空间的算子代数在弱闭和一致闭的情况下分别与 Hilbert 空间上的 Von Neumann 代数和 C^*-代数相联系. 而有零性不变子空间的算子代数，其性质与传统的 Von Neumann 代数和 C^*-代数就大不相同了，如前所述，它具有全新的性质. 然而关于这种一般算子代数的研究却很少. Pontrjagin 空间上算子代数的许多深刻问题还有待进一步研究. 最近三十多年，Pontrjagin 空间上有零性不变子空间的算子代数的研究一直进展缓慢. 目前，在国内外尚未见到专门系统论述 Pontrjagin 空间上算子代数的专著. 本书就是研究这种有零性不变子空间的算子代数(称之为一般算子代数)的分类、形式以及相关性质及应用.

著者在多年 Pontrjagin 空间上算子理论与算子代数方面研究工作总结的基础上形成这一部专著《Pontrjagin 空间上的算子代数》. 内容包括：Pontrjagin 空间及其上算子理论基础，

算子代数的基本概念，算子代数的对称理想与非对称理想，算子代数的分类与形式，算子代数的其他形式及弱闭、一致闭等价条件，算子代数的 C^* - 等价性，算子代数的导子与不变子空间，算子代数的抽象定义，Pontrjagin 空间上的算子代数理论的应用，条件正定与扩张，Pontrjagin空间上的算子代数中进一步研究的公开问题. 本书最后是对Pontrjagin空间上的算子代数理论方面研究的主要文献进行评注.

本书可供大学数学、物理、力学专业高年级学生、研究生以及数学研究工作者阅读和参考. 阅读本书需要具有泛函分析、抽象代数、拓扑线性空间的基础知识，同时还要了解Pontrjagin 空间的结构、不定度规空间上的算子理论以及 Hilbert 空间上经典算子代数的基本理论.

在本书的写作和出版过程中，得到出版社有关专家和编辑老师的关心和大力支持，在此一并表示衷心感谢！

书中不妥之处，恳请同行和读者批评指正.

杨海涛

2013 年 8 月

目 录

第一章
Pontrjagin 空间上算子代数的基本概念与进展

本章简要介绍 Pontrjagin 空间Π_k的概念、正规分解、零性子空间；介绍Π_k空间上的算子及算子代数的有关概念、对称算子代数、JVN- 代数、JC*- 代数的概念；介绍Π_1空间上的算子代数分类的有关结果，以及交换算子代数、非退化算子代数等有关结果. 这些结果只给出结论，略去证明，可以在相应的参考文献中找到证明.

§1.1 Pontrjagin 空间及其算子基本概念

本节我们介绍 Pontrjagin 空间$\prod_k$的概念、零性子空间、正规分解，以及$\prod_k$空间上共轭算子的有关性质.

定义 1.1 令$\prod$是一个复向量空间，$[\cdot,\cdot]$是$\prod\times\prod$上的函数，称$(\prod,[\cdot,\cdot])$是一个不定度规空间，如果下列条件成立：

(1)$[x,y]=\overline{[y,x]}$对任意$x,y\in\prod$.

(2)$[\alpha x+\beta y,z]=\alpha[x,z]+\beta[y,z]$对任意$\alpha,\beta\in\mathbf{C},x,y,z\in\prod$.

(3) 对任意$y\in\prod$，如果$[x,y]=0$，则有$x=0$.

这里的$[\cdot,\cdot]$称为不定度规，或不定内积.

对一个向量$x\in\prod$，如果$[x,x]=0$，则称之为零性向量. 由零性向量构成的子空间称为零性子空间. 类似地可以定义正子空间、负子空间和半正子空间（$[x,y]\geqslant 0$）、半负子空间（$[x,y]\leqslant 0$）.

定义 1.2 令$(\prod,[\cdot,\cdot])$是一个不定度规空间. 如果$\prod$存在一个正子空间H_+和一个负子空间H_-满足

$$\prod=H_+\oplus H_-,$$

并且$(H_+,[\cdot,\cdot])$关于内积$[\cdot,\cdot]$是一个 Hilbert 空间，而$(H_-,-[\cdot,\cdot])$关于内积$-[\cdot,\cdot]$也是一个 Hilbert 空间，其中$[\cdot,\cdot]$和$-[\cdot,\cdot]$分别是不定内积在H_+与H_-上的限制. 此时称$(\prod,[\cdot,\cdot])$是一个完备的不定度规空间. 这里的分解称为完备的不定度规空间$\prod$的正则分解.

定义 1.3 令$(\prod,[\cdot,\cdot])$是一个复的不定内积空间，P是$\prod$的正子空间，N是$\prod$的负子空间，Z与Z^*是$\prod$的两个零性子空间. 如果$\prod$有分解：

$$\prod=N\oplus(Z+Z^*)\oplus P,$$

这里运算“$\oplus$”是指相应于内积$[\cdot,\cdot]$的直交和，而运算“$+$”是指线性和，则称此分解为空间$\prod$的正规分解.

定义 1.4 一个复的不定度规空间称为是 Pontrjagin 空间，如果在正则分解

$$\prod = H_+ \oplus H_-$$

中，H_- 是有限维的. 对于 Pontrjagin 空间，当 $\dim H_- = k < \infty$ 时，称之为 $\prod_k$ 空间.

令 $[\cdot,\cdot]$ 是 $\prod_k$ 空间上的不定内积. 而 $\prod_k$ 空间上的函数 $(\cdot,\cdot)$：

$$(x,y) = [x_+, y_+] - [x_-, y_-],$$

其中

$$x = x_+ + x_-, y = y_+ + y_-,$$

或

$$x = x^+ + x^-, y = y^+ + y^-$$

是按正则分解给出的和式，称 $(\cdot,\cdot)$ 是由正则分解诱导出的正定内积. $\prod_k$ 空间上算子 A 关于不定内积的共轭算子 $A^\#$ 定义如下：

$$[Ax, y] = [x, A^\# y], x, y \in \prod_k.$$

而算子 A 关于正定内积的共轭算子 A^* 定义如下：

$$(Ax, y) = (x, A^* y), x, y \in \prod_k.$$

度规算子是指算子

$$J = P_+ - P_-,$$

这里 P_+ 是 $\prod_k$ 空间到 H_+ 上的投影，$P_- = I - P_+$. 于是有

$$JJ^* = J^* J = I.$$

对 $\prod_k$ 空间上任意算子 A 有

$$A^\# = JA^* J.$$

§1.2 算子代数的基本概念

本节介绍 $\prod_k$ 空间上算子代数的有关概念，包括：算子代数、子代数、非退化代数和一般

算子代数等.

$\prod_k$ 空间上的范数是按正定内积$(\cdot,\cdot)$确定的范数. 令 $B(\prod_k)$ 是$\prod_k$ 空间上所有有界线性算子的集合,$\mathcal{A}$是 $B(\prod_k)$ 的子代数.

定义 1.5 称算子代数$\mathcal{A}$是对称的,如果对任意的$A \in \mathcal{A}$,有$A^{\#} \in \mathcal{A}$;称$\mathcal{A}$是非退化的,如果$\mathcal{A}$没有零性不变子空间;而称$\mathcal{A}$是一般的算子代数,如果$\mathcal{A}$有零性不变子空间.

一个算子代数$\mathcal{A}$是闭的,是指$\mathcal{A}$按算子范数是闭的. 而算子范数是按正定内积$(\cdot,\cdot)$诱导的范数确定.

记$\prod_k$ 空间的正规分解如下:

$$\prod\nolimits_k = (Z \oplus H) + Z^*,$$

这里

$$H = N \oplus P = (Z + Z^*)^{[\perp]},$$

$(Z+Z^*)^{[\perp]}$ 是 $Z+Z^*$ 关于内积$[\cdot,\cdot]$的直交补,维数 $\dim Z \leqslant k$,维数 $\dim Z^* \leqslant k$. 如果 Z 的维数是 k,则 $N=0$,并且 $H=P$ 按内积$[\cdot,\cdot]$是一个 Hilbert 空间. 进而,可以通过适当选取零性子空间 Z^*,使得 Z 与 Z^* 有相同维数且按下述意义构成偶对. 即存在 Z 和 Z^* 的基$\{x_i : i=1,2,\cdots,l\}$ 与$\{y_i : i=1,2,\cdots,l\}$,满足下列条件:

$$[x_i, y_j] = \delta_{ij}, i,j = 1,\cdots,l,$$

这里 l 是 Z 的维数. 容易看出 Z,Z^* 与 H 相对于内积$(\cdot,\cdot)$是相互直交的.

令$\mathcal{A}$是$\prod_k$ 空间上一般对称算子代数,则$\mathcal{A}$有零性不变子空间. 令 Z 是$\mathcal{A}$的维数最大的零性不变子空间,并设 $\dim Z = k$. 本书中考虑的就是这样的算子代数.

§ 1.3 JVN-代数与 JC*-代数

本节介绍 Pontrjagin 空间上 JVN-代数与 JC*-代数的概念,以及非退化 JVN-代数在酉等价意义下的结构.

Pontrjagin 空间$\prod_k$ 上的算子代数$\mathcal{A}$称为是 JC*-代数,如果$\mathcal{A}$是一致闭的,即按算子范数确定的拓扑是闭的,并且是对称的,即若 $A \in \mathcal{A}$,则 $A^* \in \mathcal{A}$;而称$\mathcal{A}$是 JVN-代数,如果

$\mathcal{A}$是弱闭的,即按弱算子拓扑是闭的,并且是对称的.

非退化 JVN- 代数$\mathcal{A}$酉等价于基本非退化代数的直和,即酉等价于下列代数:

$$W^* \oplus B(\prod_l)^{(n)} \oplus B(H)^{(r,m)}.$$

这里W^*是一个具体的 Von Neumann 代数,$B(\prod_l)^{(n)}$是$\prod_k$型空间$\prod_l$上所有有界线性算子全体构成的代数的n次直和,而$B(H)^{(r,m)}$为

$$\{A^{(r)} \oplus (T^* AT)^{(m)} \mid A \in B(H), T^* T = -I\},$$

其中H是一个有限维空间,$B(H)$是H上有界线性算子全体,$T \in B(H)$. 以上m,n,r都是非负整数.

这一结果在 §1.7 中还会详细描述.

§1.4 一般算子代数

本节首先给出$\prod_k$空间上一般对称算子代数的简约,然后介绍$\prod_1$空间上一般算子代数的分类概念和各类(六类)算子代数的形式. 这一分类称为 Shulman 分类.

令$\mathcal{A}$是$\prod_k$空间上一般对称算子代数,Z是$\mathcal{A}$的最大零性不变子空间,Z^*是Z的对偶,则我们有$\prod_k$空间的正规分解

$$\prod_k = (Z \oplus H) + Z^*.$$

若$\dim Z = k' < k$,则H也是$\prod_k$型的. 我们取H的一个正则分解$H = H_+ + H_-$,相应的度规算子为:

$$J_H = \begin{pmatrix} I_+ & \\ & -I_- \end{pmatrix},$$

这里$I_\pm$是$H_\pm$上的单位算子. 令

$$J' = \begin{pmatrix} I & & & \\ & I_+ & & \\ & & -I_- & \\ & & & I^* \end{pmatrix},$$

这里 I 与 I^* 分别是 Z 和 Z^* 上的单位算子. $|H|$ 是相应于度规算子 J_H 的 Hilbert 空间. 则 $J'\mathcal{A}J'$ 是$\prod_k$ 型空间

$$\prod_k{}' = (Z \oplus |H|) + Z^*$$

上一般的对称算子代数,并且 $J'\mathcal{A}J'$ 的最大零性不变子空间维数为 k'. 因此不妨假设$\prod_k$ 空间上一般对称算子代数$\mathcal{A}$的最大零性不变子空间维数为 k.

Pontrjagin 空间是有明确物理背景的空间. Pontrjagin 空间上的算子代数的研究是由 M. A. Naimark 引入的,后来研究该代数的学者有 R. S. Ismagilov, V. S. Shulman, V. I. Liberzon, A. I. Loginov, E. V. Kissin, Daoxing Xia, Shaozong Yan, Yusun Tong 等. 一般来说研究 Pontrjagin 空间上的算子代数有下列三种方法:

1. 通过对 Pontrjagin 空间进行分解来研究算子代数的性质.
2. 通过研究算子代数的导子来研究算子代数的性质.
3. 用谱函数方法研究算子代数的性质.

Pontrjagin 空间与 Hilbert 空间是有本质区别的,所以 Pontrjagin 空间上的一般算子代数,即有零性不变子空间的算子代数不同于 Hilbert 空间上的算子代数. Pontrjagin 空间上一般对称算子代数的研究进展比较缓慢.

Pontrjagin 空间上一般算子代数的分类问题首先由 M. A. Naimark 引入,他研究的是考虑交换对称的算子代数的分类问题,而 Shulman 是研究指标为 1 的 Pontrjagin 空间$\prod_1$ 上一致闭的一般对称算子代数的分类问题,并给出各类算子代数的一般形式.

由于$\prod_k$ 空间与 Hilbert 空间的区别之一是它有零性子空间,因此$\prod_k$ 空间上的一般算子代数更具有一般性. 然而关于一般算子代数的研究却很少. Shulman 仅给出了$\prod_1$ 空间上一般对称算子代数的分类概念,并给出每类代数的一般形式.

令$\mathcal{A}$是$\prod_1$ 空间上的一般对称算子代数,Z 是$\mathcal{A}$的零性不变子空间,则 Z 的维数是 1. 对 $A \in \mathcal{A}$,设 $\lambda(\mathcal{A})$ 是代数$\mathcal{A}$的特征泛函,即满足 $Ax = \lambda(A)x$,x 是非正向量,A_0 是其核.

令 $H = Z^{\perp} \cap Z$,则投影 $p: Z^{\perp} \longrightarrow H$ 可确 H 中的内积

$$[p(x), p(y)] = (x, y), x, y \in Z^{\perp},$$

对任意 $A \in \mathcal{A}$定义有界线性算子 $\widetilde{A}$ 为

$$\widetilde{A}(p(x)) = p(Ax).$$

映射 $A \longrightarrow \widetilde{A}$ 的核记为 $kerA$,该映射的象记为 $\widetilde{A}$.

定义 1.6 $\prod_1$ 空间上一般对称算子代数分为以下六类:

(1) $\mathcal{A}$是第 0 类的，若 $kerA = \{0\}$；

(2) $\mathcal{A}$是第 Ⅰ 类的，若$\{0\} \neq kerA \subset A_0$；

(3) $\mathcal{A}$是第 Ⅱ_a 类的，若 $kerA \neq \{0\} = A_0 \cap kerA = A_0^* \cap kerA$；

(4) $\mathcal{A}$是第 Ⅱ_b 类的，若$\{0\} \neq A_0 \cap kerA = A_0^* \cap kerA \neq kerA$；

(5) $\mathcal{A}$是第 Ⅲ_a 类的，若 $A_0 \cap kerS \neq A_0^* \cap kerA, kerA \cap A_0 \cap A_0^* = \{0\}$；

(6) $\mathcal{A}$是第 Ⅲ_b 类的，若 $A_0 \cap kerA \neq A_0^* \cap kerA, kerA \cap A_0 \cap A_0^* \neq \{0\}$.

定理 1.1　Π_1 空间上一般对称算子代数分为六类，各类代数的形式如下：

(1)0 类：

$$\left\{\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda I_H + M & \\ & & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbf{C}, M \in \mathcal{U} \right\},$$

其中 I_H 是 H 上的单位算子，且 $I_H \notin \mathcal{U}$，$\mathcal{U}$是 H 上的算子代数.

(2) Ⅱ_a、Ⅱ_b、Ⅲ_a 和 Ⅲ_b 类算子代数分别是：

$$\left\{\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & M & \\ & & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbf{C}, M \in \mathcal{U} \right\};$$

$$\left\{\begin{pmatrix} \lambda & y \otimes \xi & t \\ & M & \eta \otimes z \\ & & \lambda \end{pmatrix} : \lambda, t \in \mathbf{C}, M \in \mathcal{U}, y, z \in R \right\};$$

$$\left\{\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & M & \\ & & \mu \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbf{C}, M \in \mathcal{U} \right\};$$

$$\left\{\begin{pmatrix} \lambda & y \otimes \xi & t \\ & M & \eta \otimes z \\ & & \mu \end{pmatrix} : \lambda, \mu, t \in \mathbf{C}, M \in \mathcal{U}, y, z \in R \right\}.$$

这里 R 是 H 的对$\mathcal{U}$不变的子空间，且 $I_H \in \mathcal{U}$.

(3) Ⅰ 类：

$$\left\{\begin{bmatrix} \lambda & (q(M^*)+y+Pu)\otimes\xi & t \\ & \lambda I_H+M & \eta\otimes(q(M)+z+u) \\ & & \lambda \end{bmatrix}:\lambda,t\in\mathbf{C},M\in\mathcal{U},y,z\in R,u\in D\right\},$$

其中 $I_H\notin\mathcal{U}$，q 是 $\mathcal{U}$ 到 H 的拟向量，即满足

$$q(AB)=Aq(B).$$

R 是 H 中直交于 $q(\mathcal{U})$，且对 $\mathcal{U}$ 不变的子空间，D 是 $Ker(\mathcal{U})$ 中直交于 R 的线性流形，P 是 D 上共轭线性算子，且 $P^2=I_D$.

由于上述分类定义方法直接依赖于 $\prod_1$ 空间的特性，且定义本身过于复杂，不易推广，因此 $\prod_k$ 空间上一般对称算子代数的分类问题的研究，虽然至今已有三十多年，但一直进展缓慢.

§1.5 交换代数的结构

本节介绍 $\prod_k$ 空间上交换对称的算子代数的结构，该结果属于 Naimark. 因此这种结构也称为 Naimark 结构.

令 $\mathcal{A}$ 是 $\prod_k$ 空间上一个交换对称的算子代数，$\prod_k$ 空间有下列分解

$$\prod\nolimits_k=(Z+Z^*)\oplus H\oplus\prod,$$

其中 Z 是 $\mathcal{A}$ 的零性不变子空间，Z^* 是与 Z 成对偶的零性子空间，H 是负子空间，$\prod$ 是正或负或 $\prod_k$ 型空间.

$$Z=\sum\nolimits_{j=1}^{q}Z_j,$$

$x_{jl},l=1,\cdots,r_j;j=1,\cdots,q$ 是 Z_j 的基，$A\in\mathcal{A}$，并且

$$Ax_{jl}=\sum_{s=1}^{l}\lambda_{jls}(A)x_{js},$$

$y_{jl},l=1,\cdots,r_j;j=1,\cdots,q$ 是 Z^* 的基，并且