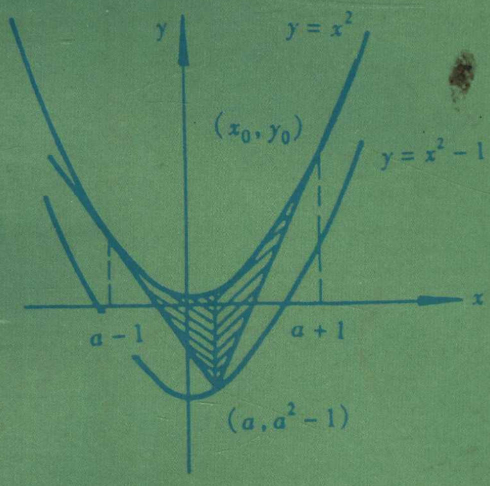
高等数学

自学及解题指导（第二版）



同济大学函授
数学教研室编

同济大学出版社

高等数学自学及解题指导

（第二版）

同济大学函授数学教研室　编

同济大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学自学及解题指导/同济大学函授数学教研室编 .
2 版 .—上海:同济大学出版社,1999.7
ISBN 7-5608-0555-8

Ⅰ. 高…
Ⅱ. 同…
Ⅲ. 高等数学-高等学校-自学参考资料
Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 26082 号

高等数学自学及解题指导
(第二版)
同济大学函授数学教研室　编
同济大学出版社出版
(上海四平路 1239 号　邮编:200092)
新华书店上海发行所发行
常熟市印刷八厂印刷
开本:850×1168　1/32　印张:23.5　字数:680 千字
1990 年 8 月第 1 版
1999 年 8 月第 2 版　　1999 年 8 月第 1 次印刷
印数:1—6000　　定价:30.00 元
ISBN 7-5608-0555-8/O·63
如遇印装质量问题,可直接向承印厂调换
地址:常熟市梅李镇通江路 21 号　邮编:215511

第二版前言

本书是在1990年8月第1版的基础上，为配合使用我校函授数学教研室编写的《高等数学》(第2版)教材而重新修订的.这次修订对原书内容作了适当的调整、充实和删改，使章节编目及内容安排基本上都与新版教材一致.

本书保留了原版的特色：既有各章节内容的归纳总结，又有解题思路的分析引导和不同解法的比较；例题丰富而又典型，除给出解答外，还尽量指出应注意的问题及易犯的错误；为适应广大读者学习《高等数学》不同深度要求的需要，还特地保留或增补了一些超出教学基本要求的打*号的内容.它不仅适合于广大工科类函授生使用，也可作为各类工科专业的大学生及广大自学者学习“高等数学”课程的辅导书.

参加本书第二版修订工作的有：郭景德、徐鑑青、黄临文、刘浩荣等，全书由郭景德负责汇总定稿.本书第二版的出版，曾得到同济大学出版社李炳钊副编审及同济大学函授学院和应用数学系有关领导的大力支持.在此，我们一并表示感谢.

由于编者水平所限，书中必有不少缺点或错误，恳请诸位读者批评指正.

编　者

1999年2月于同济

前 言

许多函授生及广大的自学者在自学《高等数学》的过程中，由于缺乏老师的直接指导和较好的自学参考书，往往会遇到不少的困难，如学了理论不会用于解题，或者发现解题有错误，但又不知错误的原因何在，等等．为此，我们根据《高等工科院校成人教育，“高等数学”教学基本要求》的要求，在我校多年来积累的函授教学辅导资料的基础上，经过提炼、加工和充实后而编成此书，奉献给广大函授生及立志自学成才的自学者．

本书的核心是解题方法，侧重于帮助读者找到解题的钥匙．

为使本书成为广大自学者的良师益友，使读者掌握高等数学中的基本内容、基本概念、基本解题技巧，我们在编写时，除了对各章、节的重要内容作必要的总结归纳，对例题尽量作详细解答外，还着重指出应该如何分析问题及解题中容易出现的错误．考虑到不同层次的读者的需要，书中也适当地选入了一些较难的例题，介绍了一些超出教学基本要求的内容和方法，这些都加上了“△”记号．

本书分析说理比较透彻，解题思路比较广阔，例题类型比较齐全，综合应用方面也有所兼顾，可作为使用我校出版的函授《高等数学》教材的自学参考书，也可作为各类成人教育及全日制大学的工科专业学生，或其他自学者，学习“高等数学”课程的参考书．

本书由我校函授数学教研室部分教师合作编写．其中第一、二、三、十章由郭景德执笔；第四、五、六章由徐鑑青执笔；第七、八章由刘浩荣执笔；第九章由周葆一执笔；第十一、十二章由周忆行执笔．

谈祝多副教授详细审阅了本书的全稿，并提出了许多指导性

的意见.函授数学教研室的全体老师对本书的编写工作也都给以热情的支持和帮助.我们在此一并表示衷心的感谢.由于我们的水平所限,书中难免有许多不足或错误之处,恳请读者批评指正.

编　者
1988 年 10 月于同济

目　　录

第九章 向量代数

第十章 空间解析几何

第十一章 多元函数微分法及其应用

第十三章 曲线积分与曲面积分

第十四章　常数项级数与幂级数

第十五章　傅立叶级数

第十六章 微分方程

第一章　函　数

1.1　函数的概念

一、函数的定义

定义　设 D 是某一实数集，若当变量 x 在 D 中每取一个数值时，另一个变量 y 按照一定的法则 f，总有唯一确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 这时，x 称为自变量，实数集 D 称为函数的定义域.

1. 函数的确定

由定义知，要确定一个函数必须具备两个要素：对应法则和定义域，与自变量及函数选择的字母无关. 要判断两个函数是否相同，只要比较它们的定义域和对应法则.

例 1　下列每一组的两个函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$, $g(x)=2\lg|x|$;

(2) $f(x)=\sqrt{x^2}$, $g(x)=(\sqrt{x})^2$;

(3) $f(x)=\sqrt{(x-1)^2}$, $g(x)=x-1$;

(4) $f(u)=\sqrt[3]{u^3}$, $g(x)=x$.

解　(1) $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域都是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且

$$g(x)=2\lg|x|=\lg|x^2|=\lg x^2,$$

故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应法则也相同. 所以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 相同.

(2) $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，$g(x)$ 的定义域是 $[0,+\infty)$，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同，故 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不相同.

(3) $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，但

$$f(x)=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$$
与 $g(x)=x-1$ 的对应法则不,所以 $f(x)$和 $g(x)$不相同.

(4) $f(u)$与 $g(x)$的定义域都是$(-\infty,+\infty)$,且
$$f(u)=\sqrt[3]{u^3}=u,$$
与 $g(x)=x$ 的对应法则也相同,只是自变量选择的字母不同,所以 $f(u)$和 $g(x)$相同.

2. 函数定义域的确定

确定函数的定义域,意味着在实数范围内找出使函数有意义的自变量的取值范围.正确解题的关键在于:

(1) 搞清五类基本初等函数的定义域,例如偶次方根被开方数应为非负数;对数函数的真数要大于零;反三角正弦、余弦的定义域是区间$[-1,1]$等等;

(2) 明确分式函数的分母不能等于零;

(3) 熟练掌握解不等式(组)的方法(要认真复习中学阶段的有关知识);

(4) 对实际问题,应考虑到问题本身是否有意义.

例 2 求函数 $f(x)=\lg(x^2-x-2)+\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$的定义域.

解 在函数解析中,有对数函数和无理分式函数,因此要使函数 $f(x)$有意义,x 必须满足不等式组:
$$\begin{cases}x^2-x-2>0,\\ x+2>0.\end{cases}$$

我们先解不等式 $x^2-x-2>0$,即$(x+1)(x-2)>0$.它的左边是一个多项式,可用图 1-1 的方法确定它的符号.于是,不等式的解为
$$x<-1 \quad 或 \quad x>2.$$
现在问题转化为解不等式组:

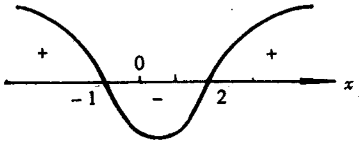


图 1-1

$$\begin{cases} x < -1 \text{ 或 } x > 2, \\ x + 2 > 0. \end{cases}$$

它也可以借助图形求解，图 1-2 中的阴影部分所对应的区间就是它的解（空心小圆圈表示 x 不能在这点取值）. 所以 $f(x)$ 的定义域是

$$-2 < x < -1 \quad \text{或} \quad x > 2.$$

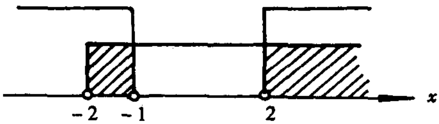


图 1-2

注意 易犯的错误是:

(1) 忽略了分母不能为零这个因素，从而得到 $x+2 \geqslant 0$.

(2) 误认为分母必须大于零，从而得到 $\sqrt{x+2} > 0$.

二、反函数、复合函数、初等函数

反函数的定义 设函数 $y = f(x)$ 的定义域是实数集 D，值域是实数集 W. 若对于任一 $y \in W$，通过关系式 $y = f(x)$，都有唯一确定的 $x \in D$ 与之对应，则称这样确定的函数 $x = \varphi(y)$ 为函数 $y = f(x)$ 的反函数，原来的函数 $y = f(x)$ 称为直接函数.

对于反函数 $x = \varphi(y)$，习惯上仍写作 $y = \varphi(x)$.

复合函数 如果给定两个函数 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$，且 $u = \varphi(x)$ 的值域全部或部分地包含在 $y = f(u)$ 的定义域内，那么通过 u 的联系，y 也是 x 的函数，这个函数就称作是由函数 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记作 $y = f[\varphi(x)]$，其中 u 称为中间变量.

初等函数 由基本初等函数及常数，经过有限次四则运算或有限次复合步骤所构成的，且用一个数学式子表示的函数称为初