模糊控制技术及应用

于盛林　刘文波　冯绍红　编

南京航空航天大学

2005.3.

前言

模糊数学是一门新兴学科，自 1965 年发表第一篇模糊集论文开始， 30 多年发展非常迅速。目前，模糊理论在模糊控制技术、模糊测试技术、模糊辨识技术、模糊神经网络技术以及遗传基因模糊技术等方面得到了广泛的应用；涉及到国民经济和科学技术的各个领域。

模糊控制是一项发展迅速、有着广泛应用前景的新技术。随着模糊理论研究的不断深入及模糊控制系统的不断规范化，模糊控制技术将在深度和广度上得到进一步的发展，成为智能控制的主要组成部分。测控技术及仪器学科是模糊理论应用最适合的领域之一，模糊控制技术也是本学科的学生应该掌握的专业技术基础。

本书简明扼要地介绍了模糊控制技术的基本理论和基本方法，并根据工科院校的特点，注意介绍应用于各个领域中较为成熟的实例，力求做到深入浅出，通俗易懂。各章都配有适当的例题、习题和思考题，以便学生对所学内容的掌握及加深理解。因此，本书既可作为研究生和本科生高年级学生的教材，也可供工程技术人员自学参考使用。

本书第四、六两章由刘文波老师编写，第二、三两章由冯绍红老师编写，于盛林老师编写第一、五两章，并负责全书的统编工作。

由于编者水平所限，书中一定存在不少缺点和错误，恳请广大读者批评指正。

编者

1997 年 10 月于南京

目　　录

第一章　绪论

1.1　模糊理论的产生及应用领域

在客观世界中普遍存在着确定现象和非确定现象，而非确定现象又可分为随机现象和模糊现象。为了研究这些现象，相继产生了普通数学，统计数学和模糊数学。其对应关系如下:

自然现象
- 确定性现象————普通数学
- 非确定性现象——
  - 随机现象——统计数学
  - 模糊现象——模糊数学

模糊数学并不是要把数学变成模模糊糊的东西，"模糊"也不意味着"马马乎乎"、"粗略"、"大概"，而是要用严格的数学方法来研究和处理自然界出现的不精确、不完整的非确定性信息(如人类用语言描述信息和图象信息)，是精确性向模糊性的一种逼近。

1965 年，美国加洲大学著名控制论专家 L. A. 扎德(Lofti. A. Zadch)教授发表了开创性论文 " Fuzzy Sets „ ，创立了模糊理论(Fuzzy set theory)，标志着以 " Fuzzy „ 命名的数学--模糊数学的诞生。模糊集合(Fuzzy Set)和模糊逻辑(fuzzy logic)是模糊理论的基础。而隶属函数(membership function)是模糊集合论所赖以建立的基石。用它来描述那些介于"属于"和"不属于"的中介过渡过程，使得每个元素不仅以"0"或"1"属于某一集合，而且，还以一定的介于"0"和"1"之间的程度属于某一集合。模糊集合是以一定程度具备某种特性元素的全体，因此，某一模糊集合中的每个元素都或多或少地属于该集合。

概率论与统计数学的产生，把数学的应用范围扩大到随机现象领域；而模糊数学的产生则把数学的应用领域从精确现象的领域扩大到模糊现象的领域。年轻的模糊数学和成熟的概率论与统计数学所研究和处理的是两种不同的不确定性。两者之间存在着主要的差别，但由于随机事件的概率与模糊事件的隶属度都在[0, 1]闭区间取值，使得初学者很容易将随机性与 Fuzzy 性，概率与隶属函数混为一谈。事实上，随机性是概率论与统计数学研究的对象，随机事件本身有明确的含义，只是由于条件不充分，使得在条件与事件之间不能出现决定性的因果关系，从而，在事件的出现与否上表现出不确定的性质。或者说，虽然事件的发生与否并不肯定，但事件的结果是明确的。例如投掷一枚硬币实验，每次能掷出硬币的哪一面是无法确定的，即随机性，但每投掷一次，硬币不出正面，就一定出现反面，不会出现既是正面又是反面的情况，表现出事件结果的明确性。随着投掷实验次数的增加，就不难发现，掷出某一面的次数与总次数的比值将趋于稳定，接近于二分之一，这又体现出该随机事件发生的规律性。而模糊数学所研究的模糊现象这个概念本身就没有明确的外延，一个对象是否符合这个概念是难以确定的。

由于概念的外延（指符合此概念的对象组成的集合)的模糊而造成的这种划分上的不确定性(或者说，客观事物的差异在中介过渡时所呈现的"亦此亦彼"性）称之为模糊性。例如，某人打靶时打出 10 环的概率是 0，其中 0 是描述他能打出 10 环的概率，即描述打出 10 环的随机性。然而若认为他打靶打出好成绩的可能性是 0.9 ，这里的 0.9 是描述打出"好成绩'

这个模糊语言的程度，即描述了"好成绩"的模糊性。这种模糊性的根源，在于客观事物的差异之间存在着中介过渡，没有明确的分界，存在着"亦此亦彼"的现象。而且，在亦此亦彼之中依然存在着差异，依然可以相互比较，在上一层次中亦此亦彼是的东西，在下一层次中可能又是非此即彼的。这些便在客观上对描述模糊性的隶属函数进行了某种限定，它仍然具有一定的客观规律性。

既然模糊数学是研究和处理模糊现象的，模糊现象又普遍存在于自然科学和社会科学之中，所以模糊数学必然能被广泛应用。然而在模糊理论提出的年代，由于科学技术尤其是计算机技术发展的限制，以及科技界对"模糊"含义的误解，使得模糊理论没有得到应有的发展。从 1965 年至 80 年代末，美国，欧洲和亚洲(中国和日本)范围内，只有少数科学家在研究模糊理论。尽管理论研究论文总数高达 5000 余篇，而实际应用却寥寥无几。至 80 年代末，日本科学家成功地将模糊理论用于家电产品中，才引发全球性的"模糊热"，使得模糊技术在近几年中得到了飞速发展。

按模糊理论创始人扎德教授的设想，模糊理论应在人类主观因素起主导作用的人文科学和社会科学中得到广泛应用。然而， 1974 年英国科学家马丹尼(E.H.Mamdani)首先将模糊理论运用于热电厂蒸汽机控制。开创了模糊理论在控制领域应用的先河，揭开了模糊理论应用于工程实践的序幕，促进了模糊技术的飞速发展。目前，模糊理论的应用主要有下列几个方面:

1. 模糊控制技术　　模糊控制的主要思想是将人类所掌握的知识和经验融合到控制策略中，用语言控制没有数学模型或很难建立数学模型的复杂系统。

2. 模糊测试技术　　模糊理论在测试技术上应用的主要思想是将人们在测试过程中积累的对测量系统及测试环境的知识和经验融合到测试结果中，使测试结果更加可信，更加精确。模糊虽然在词义上有"大概"、"不清楚"的意思，但它与测量中高精度的要求并不矛盾。通常，测试系统包括信号采集和处理两大部分，模糊理论只适应于信号处理部分。由于在测试过程中，人们积累的大量知识和经验，一方面反映出测试环境和测试方法对测试结果的影响，另一方面，反映出信号源和测试结果之间的内部联系。因此，将这些知识和经验以确定的规则的形式描述出来，再以合适的模糊推理形式与测试结果相融合，将能使测试结果更加完整，更加精确。

3. 模糊辨识技术　　模糊辨识主要应用于两个方面，一方面在复杂决策情况下，从大量的数据中辨识系统结构，另一方面在系统结构不好，或结构定义比较含糊的情况下，将得到的数据合理地分配到已知结构中。其目的之一是进行数据压缩，将庞大的杂乱无章的数据压缩成有规则的信息，从而减少了问题的复杂性。目的之二是获取关于因果关系的先验知识，模拟系统特性，实现计算机辅助决策。

目前，模糊辨识技术在过程监控，机械故障诊断和手写字自动识别等方面均取得了可喜的应用成果。

4. 模糊神经网络技术　　人工神经网络(Neural Network)和模糊技术是人工智能中的两个主要分支。模糊技术具有描述和处理模糊信息功能，但不具备"学习"功能，人工神经网络具有"学习"功能，但不具备处理模糊信息功能。模糊神经网络技术将二者结合起来，取长补短，形成一种具备"学习"功能和描述处理模糊信息的新技术。神经网络在模糊技术中的一个主要应用是"在线"调整模糊控制器参数(控制规则和隶属函数)，构成自适应模糊控制器。神

经网络根据系统输入输出信号，训练模糊系统的参数，使模糊系统具有自学习和自适应功能。另外，神经网络可以借助其它大规模的并行分布处理结构，完成模糊推理过程。采用神经网络可以"在线"产生和训练控制规则，在被控过程状态变量较少时，是一种行之有效的方法。

5. 遗传基因模糊技术　　模糊控制器控制效果的好坏，除与控制规则有关外，变量隶属函数的选择也是非常重要的，甚至仅通过调节控制器输入输出变量的隶属函数，就可以产生出好的控制规则，从而达到控制目的。因此，用模糊控制器控制一个复杂系统的问题，就可以看成是参数优化问题，为此，引出了遗传基因算法。

遗传算法受自然选择规律和遗传学的启发，是一种全局优化技术。在较大的复杂空间中克服了传统寻优技术的许多缺陷。遗传基因算法是将模糊控制规则以及变量的隶属函数参数编码，针对具体的控制问题，形成多组控制策略的组合形式。选用评估函数评估当前各组控制策略，并迭代产生新的控制策略。这种算法可在大范围内寻优，避免限于局部最优点，而且只要满足一定的条件，算法都是绝对收敛的。其缺点是因为计算工作量大，不能用于"在线"控制。

随着其它新理论和新技术的建立和发展，模糊理论在其它科学技术的推动下，其应用将会变得更加广泛。

1.2　模糊控制技术应用与发展

从本世纪 40 年代发展起来的自动控制理论和技术，经过几代人的不懈努力已日臻完善，并在许多学科领域中取得了辉煌的成功。自动控制技术一般定义为:利用控制理论支撑的自动控制装置来代替人类驾驭机器、设备或控制生产过程。经典控制论主要解决线性系统的控制问题。现代控制论可以解决多输入多输出的问题，系统既可以是线性的，定常的，也可以是非线性的，时变的。然而，在研究和设计自动控制系统时，无论是经典控制论还是现代控制论的方法，均需预先建立被控对象的精确数学模型。然而，在实际工程中，由于大多数系统过于复杂，它们的传递函数或状态方程，难于用传统的定量分析方法加以实现，在这种情况下，若仍然采用传统的控制方法，就很难达到预期的效果，有的甚至无法控制。因此，目前还有很多的工业过程，机器和设备难以用传统的控制技术实现自动控制，至今仍必须由人来手工操作。甚至有些人们看似十分简单的控制问题，而用传统的控制理论和方法却意外地不能解决。例如，一个没有学过任何控制论的小孩，可以很容易地在一个手指上控制一根竖直的木棍，使它能够在重力的作用下，仍能动态地保持竖立不倒。这一事实对于自动控制专家来说，这是一个复杂的"倒摆"控制问题。即使只考虑一个自由度（只能沿一条直线的方向倾斜)，要建立一个控制它的数学模型也是很困难的。这要导致二阶非线性微分方程组，这种方程组还没有求解的方法，只有在偏角很小，近似线性时才能求得近似解。而小孩在控制木棍时，手、脚、脑是同时活动的，他用眼观测，并在大脑指挥下用手控制(必要时还要移动脚步)。具体规则是：木棍向前倾一点，则手向前移动一点；木棍向前倾斜得大，则手向前移动也快；若木棍突然向后倒，则手快速向后退。显然，小孩的观测量和控制量都是用模糊语言描述的。而他头脑中的推理，决策规则正是依据用模糊语言描述的观测量得到对应的控制量。他凭借的是在玩木棍时不断总结出的经验规则，来实现令人满意的控制。这种利

用操作人员的实践经验和直观感觉，或一些不精确的控制规则，由此产生的控制策略、将状态条件和控制作用表示为一组被量化的模糊语言集，然后利用模糊理论，并借助于计算机的手段实现过程控制，就是通常所指的模糊控制技术。

模糊控制语言是表述人类思维活动和复杂事件的一种极其有效的工具、可以有效地解决一些用传统控制方法难以奏效的控制问题。与传统的控制技术相比较，模糊控制技术具有以下特点:

1. 不依赖被控对象的精确数学模型。直接采用对被控过程参数现状及其变化趋势观测判断的定性感觉，来构成控制算法。模糊控制的基本出发点是将现场操作人员或者专家的经验、知识及操作数据加以总结归纳，形成一定的规则参与控制过程。

2. 具有较好的普遍性。研究结果表明，对于线性的，时不变的确定被控对象，用模糊控制与用 PID 控制的效果相当；但对非线性和时变的不确定系统，模糊控制具有较好的控制作用。

3. 控制系统的鲁棒性(Robustness)较好，由于模糊控制采用的不是二值逻辑，而是一种形式化的连续多值逻辑。因此，对系统参数变化的适应性强。当系统的参数变化时，容易实现较稳定的控制；由于用模糊边界代替了原来发生的“0-1"突变的边界点，增加了系统的稳定性和抗干扰能力；只要规则设定合理，可以避免恶性循环和险情发生。

4. 模糊控制器结构简单，系统硬件、软件易于实现。硬件结构一般无特殊要求、十几 K 字节的芯片，就能实现含有十几条甚至几十条规则的模糊推理功能。软件上算法也比较简洁、控制器在实际运行中，只需进行简单的查表运算，其他过程可离线进行。因此，这种控制方法容易被现场工程技术人员和操作者所掌握。

5. 有效的非线性控制作用，对非线性噪声和纯滞后有较强的抑制能力。

6. 控制器的结构参数稳定方便。只要通过对现场的情况稍作分析，就能较好地确定控制参数，而且参数使用范围广。

7. 模糊控制器实际上是给出了一种知识表示和推理的方法，可用来设计一类决策系统和专家系统，实现对天文，经济系统的控制。

事物总是一分为二的。模糊控制器同样也存在着局限性。主要表现在:

1. 由于模糊控制是基于对被控过程的先验知识，又具有模糊性和不确定性，这就可能导致控制器不精确性。而且模糊控制精度受到模糊量化等级的制约，并与模糊合成算法运算量有关。

2. 通常的模糊控制类似于比例微分(PD)的控制策略，属有差调节，存在非零稳态误差。

3.模糊控制的本质是一种推理逻辑，不同的被控过程、其推理规则也不同、这在某种程度上影响其通用性。

为了克服模糊控制所存在的问题以及本身的局限性，通过对现有算法及结构进行改进，以及与其它先进科学技术相结合，将能改善模糊控制的总体性能，达到预期的控制效果。其主要途径有:

1. 将模糊控制器与常规的 PID 控制相结合，构成 Fuzzy-PID 控制器，能很好地改善系统性能，若用模糊控制器实现 PID 工作参数的在线自动最佳整定，就可在稳态误差，响应速度，超调量和调整时间等方面，将会大大超过 PID 调节的响应品质。

2. 模糊控制器的核心是控制规则，为了避免控制规则过分依赖于人的经验知识，对控

制器产生的影响，应着眼发展具有自组织、自学习能力的模糊控制器。自学习模糊控制方法，增加了在线计算指标函数和自校正部分。这样控制算法不会固定不变，而是通过直接修改控制规则或改变某个参数而变化。按此构成的控制器不是仅适应某一类对象，而是通过自组织方法适应几类对象，使其具有较强的通用性。

3. 将模糊控制与自适应控制相结合组成自适应模糊控制器。利用自适应控制能进行过程参数的在线识别和控制参数的自动修正，可进一步改善系统的控制性能。

4. 将神经网络与模糊逻辑相结合。用人工神经网络实施模糊控制，能用于复杂的和随机性的系统中。例如，城市交通系统的控制。

5. 将模糊逻辑判断引入专家系统。在模糊控制中增加知识库和推理机两部分，就能构成专家模糊控制器。这种系统的自动控制方式就会更接近人的控制方式，将使系统具有更高的智能。

总之，模糊数学使部分自然语言作为算法语言进入计算机。这种语言式模糊控制系统，其控制算法(规则集)中隐含着人的一些逻辑思维过程，一旦与其他经典的或现代控制方法相结合时，就会在模糊状态中的更深的层次上模拟人的智能，并逐步进入智能控制的新阶段。

模糊控制技术开辟了自动控制的一条新途径，模糊理论的早期应用是在一些特定的专用控制系统中，近年来，模糊控制器的发展异常迅速，通用模糊控制器和软件的研究更引人注目。国外很多厂家已纷纷推出商品化的通用模糊控制器和通用软件、模糊控制器开发工具等。1987 年日本出现了利用模糊推理芯片制作的模糊计算机；紧接着，1988 年又成功研制了世界上第一个模糊微处理器；随后不久，美国制成了具有模糊化，模糊推理和反模糊化命令句的第三代模糊微处理器。这意味着模糊控制技术的研究已深入到硬件技术之中，而硬件系统的实现将会带来模糊控制技术的更新飞跃。

我国也是世界上模糊控制技术研究的领先者之一。目前有数万名的科研工作者从事这项研究，已成为世界模糊理论研究的四大力量之一(美国，西欧，日本和中国)。在模糊控制器的本质、性能、适用性、可响应性、稳定性以及系统的算法简化方面都作了大量的研究工作和深入的探讨。在模糊控制理论研究和开发应用方面具有一定的特点和发展优势，如通用模糊控制系统的开发应用，它与传统的控制相比，具有实时性好，超调量小，抗干扰力强，稳态误差小，自动化程度高等优点；它集经典控制与模糊控制于一体，应用范围广，尤其对传统控制方法难以控制的对象或只能靠有经验的操作人员才能控制的控制对象更为适用，为模糊控制技术的发展作出了出色的贡献。

到目前为止，模糊控制技术已在各个领域中获得了大量应用，特别在工业过程控制，航空，冶金，石油化工，动力设备，交通运输和机器人等方面的成果尤为明显，同时对日常生活用具方面也产生重大影响，其中包括模糊全自动洗衣机等家电产品。

随着社会的不断进步，人类实践活动的不断深入，可以预料模糊控制技术的应用将会越来越广泛。

1.3 课程的目的和编排

模糊控制是一门发展迅速，有着广阔应用前景的新技术。然而模糊控制的理论体系有待进一步完善；用语言指导模糊控制器设计的原则还不多。例如，对每一模糊变量需选多少模

糊子集合适，模糊子集的隶属函数形状的合理确定方法，模糊控制系统的性能指标等至今尚无规律可循。有的模糊控制表的制定还含有不少主观因素，带有一定的随机性，模糊规则自动生成，合成运算的改进以及模糊建模等问题均有待进一步研究。

随着模糊理论研究的不断深入以及模糊控制系统的不断规范化，模糊控制技术将在深度和广度上得到进一步发展。同时，模糊控制技术应用的灵活性与简洁性以及特有的处理模糊信息的功能，将在人工智能和新一代计算机的研制中发挥巨大的作用。

测控技术及仪器学科是模糊理论应用最合适的领域之一。模糊理论也是本学科的学生应该掌握的专业技术基础。为此，通过本课程的学习，使得学生了解模糊控制的总体概貌，掌握模糊控制的有关理论和基本方法，具备模糊控制技术的开发和应用能力。

本书共分 6 章，内容按“基础--实质--应用”顺序编排

第一章　介绍模糊理论的产生与应用；模糊控制技术的应用和发展。

第二章　介绍模糊集合及其理论基础。

第三章　介绍模糊控制的基本原理。

第四章　介绍基本模糊控制器的设计。

第五章　介绍改善模糊控制性能的途径。

第六章　应用实例

本书在编写过程中，由于篇幅和学时的限制，力求遵循少而精，由浅入深，便于自学的原则，省略某些定理的复杂证明，简化模糊控制技术更深层次上问题的讨论，回避模糊控制器硬件实现方法的讨论，强调掌握基本概念、基本理论和基本方法。通过实例的选择，希望为读者提供模糊控制技术在工业过程控制中应用和设计方法的范例，起到抛砖引玉的作用。

第 二 章　　模糊集合论基础

模糊集合论是模糊控制理论的基础。本章将对模糊集合的定义、模糊关系和模糊矩阵、分解定理和扩展定理、隶属函数的定义以及确定方法等做一简要的介绍。

2.1　模糊集的定义及其基本运算

2.1.1 模糊集的定义

"概念"是人们常使用的名词，例如"男人"就是一个概念，一个概念有其内涵和外延，所谓内涵是指符合此概念的对象所具有的共同属性；而外延指的是符合此概念的全体对象。

1887 年，德国数学家 G. Cantor 创立了集合论，自从有了"集合"这个名词之后，概念的外延亦解释为：符合此概念的全体对象所构成的集合。因此，集合可以表示概念。就是说，任给一个性质 P，便能把所有满足性质 P 的对象，也仅由具有性质 P 的对象，汇集在一起构成一个集合，用符号表示为

$$A=\{a \mid P(a)\}$$

其中 A 表示集合；a 表示 A 中任何一个对象，称为集合 A 的元素；$P(a)$ 表示元素 a 具有性质 P；$\{\ \}$ 表示把所有具有性质 P 的元素 a 汇集成一个集合。Cantor 的集合论要求组成集合的任何对象都是确定的，要麽绝对符合它，要麽绝对不符合它，绝对不能模棱两可。这样的集合所表现的概念叫确切概念。我们把这样的集合叫普通集合。

然而，现实生活中的绝大多数概念并不是确切概念。例如，对于"老年人"这一概念，某些人是否为"老年人"，我们很难给出完全肯定或完全否定的回答。就是说对于这一类概念，在符合与不符合之间容许存在中间状态。我们把这类模糊不清的概念叫做模糊概念。模糊概念没有明确的外延，因而不能用普通集合来表示。

1965 年，美国加州大学著名控制论专家扎德（L. A. Zadeh）在他所创立的模糊理论中提出了一种新的"集合"形式用来表示模糊概念，这种集合叫做模糊集合。

在实际问题中，集合总是作为某个概念的外延，因此，总要把涉及的议题限制在一定的范围内．例如要讨论"男人"这一概念，可以把议题限制在"人"这个范围内，从一切人（记为 U）中选出所有的男人，构成 U 上的一个集合 A，A 便是"男人"这个概念的外延。

被讨论对象的全体称为论域，常以大写英文字母 U，V，…，X，Y 等表示，论域中的每个对象称为元素，U 中一部分元素全体称为 U 上的一个集合。

论域 U 可以视为一个"方框框"，U 中元素被看做一些没有大小，没有质量的抽象"点子"，U 上的集合 A 想象为"方框框"中的一个"圆圈"。图 2.1.1 给出了普通集合的直观表示。

在上图 U 中，任意指定一个元素 u 及 U 上一个集合 A，在 u 与 A 之间，要麽 u 属于 A（记作 $u\in A$），要麽 u 不属于 A（记作 $u\notin A$）、二者必居其一，且仅居其一。

若 $u\in A$，即 u 在"圆圈"内，则记为 $\mu_A(u)=1$；若 $u\notin A$，即 u 在"圆圈"外，则记为 $\mu_A(u)=0$。其中，$\mu_A(u)$ 称为集合 A 的特征函数，即

$$\mu_A(u)=\begin{cases}1, & 当 u\in A 时;\\ 0 & 当 u\notin A 时;\end{cases}$$

可见，特征函数的值域是一个只含有两个数的集合｛0，1｝。

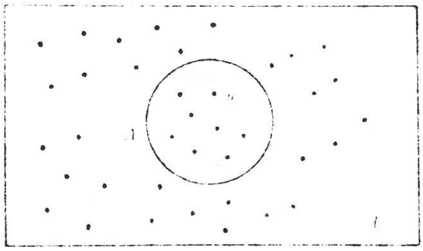


图 2.1.1　论域、集合、元素

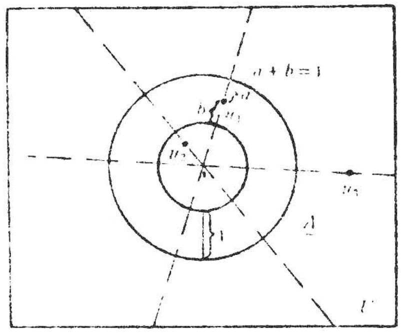


图 2.1.2　模糊集的直观解释

要想建立模糊集合，就必须把元素对集合的绝对隶属关系扩展为各种不同的隶属程度。

类似图 2.1.1, 我们给出模糊集合的直观解释。我们把论域 U 看作一个矩形，U 上有一个模糊集合，记作 $\underset{\sim}{A}$，它可视为矩形中一个具有单位宽度边界的一个“圆圈”，即同心圆环（见图 2.1.2）

对于 U 中任意一个元素 u，若它位于内圈内，则隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)=1$，表示 u 绝对地属于 $\underset{\sim}{A}$；若 u 位于外圈外，则隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)=0$，表示 u 绝对地不属于 $\underset{\sim}{A}$；若 u 位于圆环中，则它沿同心圆环的中心为始点的射线“进入”圆环的深度作为 u 属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度，即隶属函数 $0\le\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)\le 1$。

有了隶属函数，我们就可以给出模糊集合的定义。

定义 2.1.1　给定论域 U，对于任意 $u\in U$，都指定了隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 的一个值，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)\in[0,1]$，集合

$$\underset{\sim}{A}=\{u|\mu_{\underset{\sim}{A}}(\mu)|\forall u\in U\}$$

就叫论域 U 上的一个模糊子集，简称为模糊集。式中，符号 $\forall u$ 表示“对所有的 u”。

可见，正如普通集合完全由特征函数刻画一样，模糊集完全由隶属函数所刻画。特别地，当 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 的值域为{0, 1}时，即只取 0 和 1 两个值时，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 便退化成普通集合的特征函数 $\mu_A(u)$，$\underset{\sim}{A}$ 就退化为普通集合 A

$$A=\{u\in U|\mu_A(\mu)=1\}$$

因此，隶属函数是特征函数的推广，普通集合是模糊集合的特殊形态。

例 2.1.1　以年龄为论域 X，取 $X=[0,100]$，“年老”与“年轻”这样两个模糊概念，可以分别用两个集合 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 来表现，它们的隶属函数分别为：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le 50\\ [1+(\frac{x-50}{5})^{-2}]^{-1} & 50\le x\le 200\end{cases}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)=\begin{cases}1; & 0\le x\le 50\\ [1+(\frac{x-25}{5})^2]^{-1}; & 25\le x\le 200\end{cases}$$

图 2.1.3(a)和图 2.1.3(b)分别表示了模糊集 A 和 B 的隶属函数曲线。

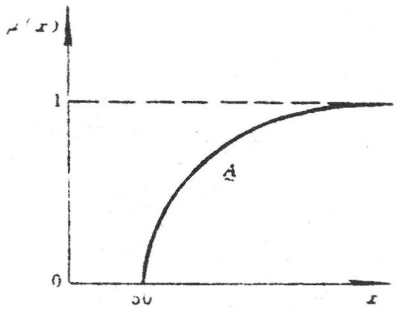


图 2.1.3(a)　“年老 $\underset{\sim}{A}$”的隶属函数

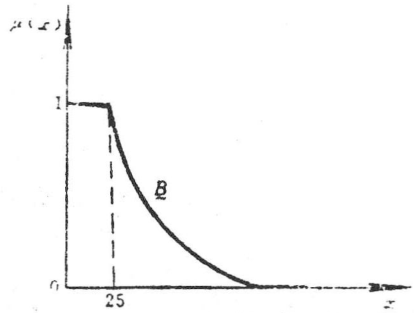


图 2.1.3(b)　“年轻 $\underset{\sim}{B}$”的隶属函数

例 2.1.2　我们常说某一个图形很“圆”或者不“圆”，这里的“圆”就是一个模糊概念. 我们来看看相应的模糊集合。如图 2.1.4 所示，U 是给定的几个图形，即 $U=\{a, b, c, d, e\}$，可以对每一个图形指定一个属于“圆”的隶属度：

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(a)=1$,　　$\mu_{\underset{\sim}{A}}(b)=0.75$,　　$\mu_{\underset{\sim}{A}}(c)=0.5$,　　$\mu_{\underset{\sim}{A}}(d)=0.25$,　　$\mu_{\underset{\sim}{A}}(e)=0$

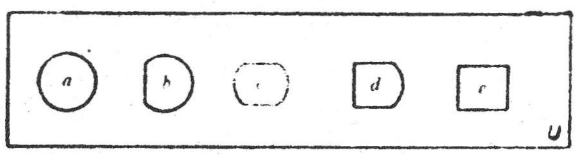


图 2.1.4　$U=\{a, b, c, d, e\}$.

例 2.1.3　$U=\{1, 2, 3, 4, \ldots, 9\}$，$\underset{\sim}{A}$ 表示“靠近 5 的自然数”，其隶属函数由下面的表格(表 2.1.1)所规定，其图形为一些离散的点(图 2.1.5)

表 2.1.1

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$	0	0.2	0.6	0.9	1	0.9	0.6	0.2	0
u	1	2	3	4	5	6	7	8	9

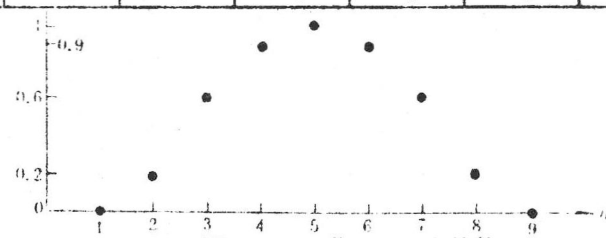


图 2.1.5　靠近 5 的自然数

例 2.1.4　设 $U=\{$全体实数$\}$，$\underset{\sim}{A}$ 表示“比 5 大得多的实数”，其隶属函数可以规定为

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)=\begin{cases}0 & u<5\\ [1+(x-5)^{-2}]^{-1}, & u\ge 5\end{cases}$$

2.1.2 模糊集的基本运算

集合通常有交、并和差这三种运算。　　对于普通集合，我们用下面的图形来表示它的基本运算。在论域 U 上，有集合 A 和 B：

图 2.1.5 的阴影部分表示 A 和 B 的交集，记为 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{u|u\in A \text{ 且 } u\in B\}$$

图 2.1.6 的阴影部分表示 A 和 B 的并集，记为 $A\cup B$，即

$$A\cap B=\{u|u\in A \text{ 或 } u\in B\}$$

图 2.1.7 的阴影部分表示 A 和 B 的差集，记为 $A-B$，即

$$A-B=\{u|u\in A, u\notin B\}$$

在图形 2.1.8 中，图中阴影部分表示 A 的补集，记为 $\bar{A}$，即

$$\bar{A}=\Omega-A=\{u|u\notin A, u\in\Omega\}$$

在图形 2.1.9 中，图中集合 A 和集合 B 相等，记为：$A=B$

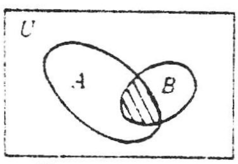


图 2.1.5　$A\cap B$

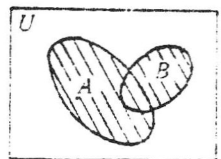


图 2.1.6　$A\cup B$

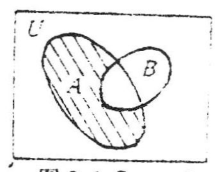


图 2.1.7　$A-B$

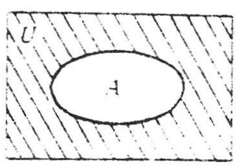
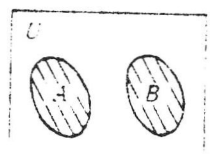


图 2.1.8　$\bar{A}$



图形 2.1.9　$A=B$

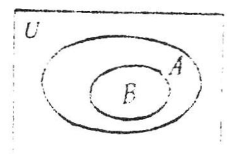


图 2.1.10　$A\subseteq B$

另外，集合与集合之间有时存在包含关系。如果集合 B 的每一个元素都是集合 A 的元素，则集合 B 叫做集合 A 的子集，表示为：　$A\supseteq B$　或　$B\subseteq A$。
读作“A 包含 B”或“B 被 A 包含”。集合的这种包含关系如图 2.1.10 所示。空集∅是不具有任何元素的集合。我们规定，空集是任何集合的子集。

同样，模糊集合也有类似的运算。由于模糊集合由其隶属函数所刻画，所以模糊集合之间的运算应由它们的隶属函数之间的运算来定义。

定义 2.1.2　$\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 均为论域 U 上的模糊集合，如果 $\forall u\in U$，均有

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)=\mu_{\underset{\sim}{B}}(u)$$

则称 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 相等，记作

$$\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B}$$

定义 2.1.3　$\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 均为论域 U 上的模糊集合，如果 $\forall u\in U$，均有

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)\le\mu_{\underset{\sim}{B}}(u)$$

则称 $\underset{\sim}{B}$ 包含 $\underset{\sim}{A}$ 或 $\underset{\sim}{A}$ 被 $\underset{\sim}{B}$ 包含，记作

$$\underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{B}$$

例如，设$\underset{\sim}{A}$表示模糊集合“成绩很优秀的学生”，$\underset{\sim}{B}$表示模糊集合“成绩优秀的学生”，任何学生对于$\underset{\sim}{A}$的隶属度总是不大于对于$\underset{\sim}{B}$的隶属度，因此，“成绩很优秀的学生”是“成绩优秀的学生”的模糊子集。

定义 2.1.4 $\underset{\sim}{A}$为论域U上的一个模糊集合，它的补集$\underset{\sim}{\bar{A}}$由下式定义：

$$\mu_{\bar{\underset{\sim}{A}}}(u)=1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(u), \qquad \forall u \in U$$

定义 2.1.5 $\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$和$\underset{\sim}{C}$均为论域U上的模糊集合，如果$\forall u \in U$，有

$$\mu_{\underset{\sim}{C}}(u)=\mu_{\underset{\sim}{A}}(u) \vee \mu_{\underset{\sim}{B}}(u), \qquad \text{（这里，}\vee\text{表示上确界，}\vee \triangleq max\text{）}$$

则称$\underset{\sim}{C}$为$\underset{\sim}{A}$和$\underset{\sim}{B}$的并集，记作

$$\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$$

定义 2.1.5 $\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$和$\underset{\sim}{C}$均为论域U上的模糊集合，如果$\forall u \in U$，有

$$\mu_{\underset{\sim}{C}}(u)=\mu_{\underset{\sim}{A}}(u) \wedge \mu_{\underset{\sim}{B}}(u), \qquad \text{（这里，}\wedge\text{表示下确界，}\wedge \triangleq \min\text{）}$$

则称$\underset{\sim}{C}$为$\underset{\sim}{A}$和$\underset{\sim}{B}$的交集，记作

$$\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$$

例 2.1.5 设论域$U=\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$，

$$\underset{\sim}{A}=\{u_1/0.2,\ u_2/0.7,\ u_3/1,\ u_4/0,\ u_5/0.5\}$$

$$\underset{\sim}{B}=\{u_1/0.3,\ u_2/0.4,\ u_3/1,\ u_4/0.6,\ u_5/0.5\}$$

则

$$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}=\{u_1/0.3,\ u_2/0.7,\ u_3/1,\ u_4/0.6,\ u_5/0.5\}$$

$$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}=\{u_1/0.2,\ u_2/0.4,\ u_3/1,\ u_4/0,\ u_5/0.5\}$$

$$\bar{\underset{\sim}{A}}=\{u_1/0.8,\ u_2/0.3,\ u_3/0,\ u_4/1,\ u_5/0.5\}$$

我们还可以在隶属函数的曲线上对模糊集的运算做一个更清楚的反映。

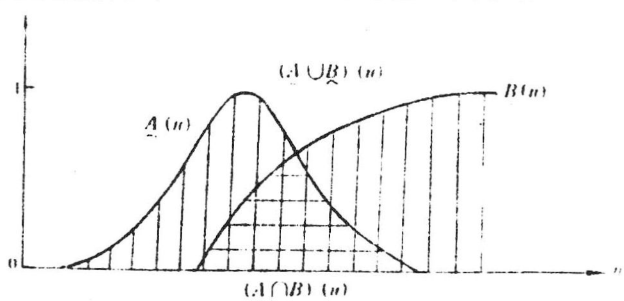


图 2.1.11 竖线部分为（$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$）曲线下的图象

横线部分为（$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$）曲线下的图象

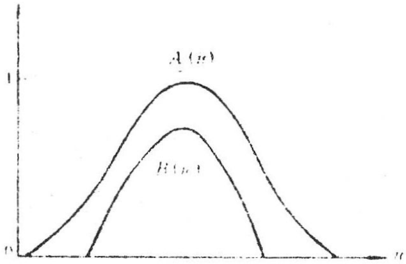


图 2.1.11　$\underset{\sim}{A}\supset\underset{\sim}{B}$

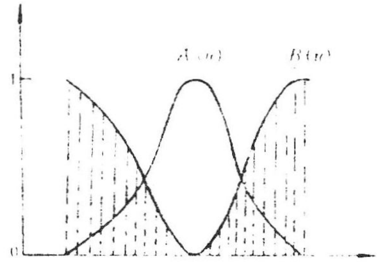


图 2.1.12　图中阴影部分为A的补集 $\underset{\sim}{A}^{c}(u)$。

模糊集的并、交、余运算具有下列性质：

(1) 幂等律：$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$

(2) 交换律：$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{A}$

(3) 结合律：$(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})\cap\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}(\cap\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{C})$

$(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})\cup\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\cup(\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{C})$

(4) 吸收律：$(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})\cup\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$

$(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})\cap\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$

(5) 分配律：$\underset{\sim}{A}\cap(\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{C})=(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})\cup(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{C})$

$\underset{\sim}{A}\cup(\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{C})=(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})\cap(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{C})$

(6) 两极律：$\underset{\sim}{A}\cup U=U$，$\underset{\sim}{A}\cap U=U$，

$\underset{\sim}{A}\cup\varnothing=\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{A}\cap\varnothing=\varnothing$

(7) 复原律：$(\underset{\sim}{A}^{c})^{c}=\underset{\sim}{A}$

(8) 对偶律：$(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})^{c}=\underset{\sim}{A}^{c}\cup\underset{\sim}{B}^{c}$，$(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})^{c}=\underset{\sim}{A}^{c}\cap\underset{\sim}{B}^{c}$

应当注意的是，模糊集的运算不满足普通集合运算中的补余律，即：一般说来不满足：

$$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{A}^{c}=U,\quad \underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{A}^{c}=\varnothing$$

2.2　分解定理与扩展定理

分解定理与扩展定理都是模糊数学的重要定理，前者把模糊集合论问题转化为普通集合论问题来解；而后者则是把普通集合论的方法扩展到为模糊集合论中去。

2.2.1　分解定理

在实际应用中，对于模糊现象常常需要作出清晰的判别，因此需要有一道“桥梁”能够把模糊集与普通集沟通起来。对于一个普通集 $A\in P(U)$ ($P(U)$表示 U 上全体普通集)，只有当 $X_A(u)=1$ 时($u\in U$)，才把 u 看成是 A 的一个元素，即 $u\in A$，这里 X_A 为集合 A 的特征函数；对于一个模糊集来说，这样的“门坎”太高了，需要将门坎不同程度地降低，将 1 改成某一

个数$\lambda\in[0,1]$，给定这样的门坎后，当且仅当$X_{\underset{\sim}{A}}(u)\ge\lambda$时，就说 u 是 $\underset{\sim}{A}$ 的一个元素。这样，对每一个$\lambda\in[0,1]$，都能确定 U 上的一个普通集，它是 $\underset{\sim}{A}$ 在λ这一信任程度上的显象，下面我们先看一个实例。

例 2.2.1 某科研所，在一次聘任中，有部分高职岗位缺少合适人选，只好采用中职高聘的办法从优秀的中职技术人选中选出部分人顶岗；通过第一轮预选仅选出 8 位条件较好者，分别用 $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,,x_7,x_8$ 表示。通过专家评议，并把专家综合评分换算成 100 分制，他们的合适程度分别是：

x_1	100 分	$\mu(x_1)=1$
x_2	93 分	$\mu(x_2)=0.93$
x_3	58 分	$\mu(x_3)=0.58$
x_4	70 分	$\mu(x_4)=0.70$
x_5	84 分	$\mu(x_5)=0.84$
x_6	74 分	$\mu(x_6)=0.74$
x_7	80 分	$\mu(x_7)=0.80$
x_8	55 分	$\mu(x_8)=0.55$

现在有关部门要了解“及格”（60 分以上）者有哪些人？“优良”（80 分以上）者和“优秀”（90 分以上）者有哪些人？统计人员来作这个决策：

“及格”者集合 $A_{0.6}=\{x_1,x_2,x_4,x_5,x_6,x_7\}$

“优良”者集合 $A_{0.8}=\{x_1,x_2,x_5,x_7\}$

“优秀”者集合 $A_{0.9}=\{x_1,x_2\}$

这实际上就是按不同的水平确定 n 个普通集合，这些普通集合是对原来的模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度先确定一个阀值$\lambda(0\le\lambda\le1)$之后，再把隶属度$\mu(x\ \ )\ge\lambda$的元素挑选出来而得到的，对于上例来说就是由

$$\underset{\sim}{A}=1/x_1+0.93/x_2+0.58/x_3+0.70/x_4+0.84/x_5+0.74/x_6+0.80/x_7+0.55/x_8$$

分别确定水平(阀值)$\lambda=0.6$，0.8，0.9 而得到的：

$$A_{\lambda\text{-}0.6}=\{x_1,x_2,x_4,x_5,x_6,x_7\}$$
$$A_{\lambda\text{-}0.8}=\{x_1,x_2,x_5,x_7\}$$
$$A_{\lambda\text{-}0.9}=\{x_1,x_2\}$$

接着，我们可得 A_λ的相关定义如下：

定义 2.2.1 设 $\underset{\sim}{A}\in F(U),\forall\lambda\in[0,1]$ （$F(U)$表示 U 上全体模糊集） 称

$$\underset{\sim}{A}_\lambda=\{u|u\in U,\mu_A(u)\ge\lambda\}=A_\lambda$$

为 A 的 λ 截集，当 $\lambda\ne1$ 时，称

$$\underset{\sim}{A}_\lambda=\{u|u\in U,\mu_A(u)>\lambda\}=A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$$

为 A 的强截集，或 λ 开截集。

显然，A_λ 与 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 都是 U 上的普通集合，即 A_λ， $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\in P$（$U$）。

λ 截集与 λ 强截集具有下列性质：