

石英晶体及其应用

美国第29届频率控制年会论文选集

《压电石英技术》编辑部主编

上海科学技术情报研究所

前 言

近几年来,频率控制和频率选择用的压电石英器件及其材料都有很大发展,产量不断增加,品种迅速扩大,精密度不断提高,并研制出一些新材料和很多新品种。美国频率控制年会比较集中地介绍了最近的一些成果,并每年召开一次会议,而且有系统地出版一份年会论文集。为了向从事压电石英谐振器、振荡器、滤波器和声表面波振荡器、滤波器方面工作的工人和技术人员提供一些参考资料。遵照伟大领袖毛主席关于“洋为中用”的教导,我们曾翻译出版了美国第28届频率控制年会。现又选择了美国第29届频率控制年会中的33篇文章。其内容很广泛,着重介绍了生产试制方面的一些问题以及基础理论的研究成果。如压电石英理论方面的研究,滤波器和振荡器用的石英谐振器;材料特性和加工工艺;频率稳定度及其测量;以及原子和分子频率标准等。

参加这次译校工作的单位有:国营晨星无线电器材厂、国营北川无线电器材厂、天津实验工厂、上海科技情报研究所、邮电部第一研究所、中国人民解放军一〇二七所、上海天文台、中国科学医上海硅酸盐所、上海六一五所、山东大学物理系、第七机械工业部二院计量站。并得到许多单位和同志们的大力支持和帮助,在此表示感谢。

由于我们水平有限,谬误之处一定不少,望读者批评指正。

“压电石英技术”编辑部
一九七七年三月

目 录

一、晶体谐振器理论 I

1. 石英谐振器电极应力引起的频率漂移 (1)
2. 弯曲或长度伸缩振动石英棒机电耦合系数的确定 (6)

二、晶体谐振器理论 II

3. 小型 AT 切斜边窄条谐振器 (16)
4. 在无限大压电晶片中的波与振动 (23)
5. 厚度切变和厚度扭曲耦合泛音模能陷谐振器的分析 (32)

三、滤波器的概念、设计和生产

6. “r-面”水晶的生产和完整性 (39)
7. A-6 单片晶体滤波器的制造与质量 (48)
8. A-6 信道组单片晶体滤波器的制造 (56)
9. 多片晶体滤波器 (63)
10. 离子束研磨技术在压电器件加工中的应用 (73)

四、声表面波器件

11. 对表面波展示温度稳定的新压电材料 (81)
12. 声表面波谐振器的发展 (86)
13. 表面波片状谐振器的等效电路和性质 (96)
14. 体声波和表面声波的激励及网络的描述 (108)

五、石英晶体——设计和加工

15. 高精度手表用 32 kHz 石英谐振器 (120)
16. 一种长度——厚度弯曲模石英谐振器 (130)
17. 石英谐振器用新的陶瓷扁平封装 (139)
18. 人造石英中包裸体对石英谐振器电气特性的影响 (149)

19. 为改进目前石英谐振器质量的一种快速和简单的测试方法设计(159)
20. 圆形晶片高精度激光辅助 X 射线测角器(163)

六、频率稳定信号——概论、应用和要求

21. 低噪声微波振荡器设计(172)
22. 宇航空间雷达的稳定的本机振荡器——合成器(188)
23. 测量发射机稳定性参数的测试装置(196)
24. 关于 TCXO 频率稳定度的分析(212)
25. 电压控制晶体振荡器理论及其应用(219)
26. 石英晶体振荡器固有噪声及并联电容器的影响(228)

七、使用激光和超导腔的新的频率标准

27. 精密振荡器中的超导应用(236)

八、原子频率标准

28. 氢脉泽磁场不均匀偏移测量方法的改进(244)
29. 手风琴式储存泡氢脉泽(249)
30. 氢脉泽的壁移问题(260)
31. 用便携式铯钟进行亚微秒时间传送(273)

九、频率标准和钟模型试验

32. 在低傅里叶频率, 如测量频率起伏谱密度的时畴方法(276)
33. 导航技术卫星——I (时间导航——III) 石英和铯振荡器频率稳定度结果(289)

1. 石英谐振器电极应力引起的频率漂移

E. P. EerNisse

[摘要] 本文叙述了谐振器薄膜电极中的应力问题。由于石英谐振器片子中静态机械应力的偏置,可通过有限应变效应改变厚度谐振频率,所以电极应力能引起谐振器频率漂移。

本文特别引述了有关石英谐振器著作中沉积金属膜的固有应力。对于 *AT*、*BT* 切厚度切变石英谐振器,介绍了在恒温下由应力引起的频率漂移的理论计算。计算指出,一个特定的二次转角切割石英谐振器具有一级零温度系数,并可消除由于片子平面上机械应力偏置引起的频率漂移。这种二次转角切割可用于石英谐振器微量平衡设备中。这里,应力能引起异常频率漂移,例如对薄膜厚度或溅射系数的测量。由于因电极和支架应力所引起的长期频率不稳定性潜伏根源可以消除,所以二次转角切割还能应用在超高稳定的频率控制方面。

引 言

石英谐振器表面上薄膜的应力通过石英的三级弹性常数效应引起谐振频率漂移。最近几年这一事实已应用于薄膜应力^[1]及离子轰击所引起应力^[2,3]的测量中。下面的例子可充分说明效应的大小。对于 *AT* 切,厚度为 0.17 厘米五次泛音 5MHz 的石英谐振器,两边均为 5000Å 厚的金电极(在室温下沉积而成),平均薄膜应力为 2×10^9 达因/厘米²时,将在石英中产生 -1.2×10^6 达因/厘米²偏置应力(压缩)。石英中的这种收缩应力偏置将引起谐振频率向上漂移 16Hz 或 3.2×10^{-6} 。这种频率漂移只是时间稳定性,与电极应力一样。它比近代晶体振荡器的长期频率稳定度的典型技术标准大五个数量级。

本文的目的是介绍频率控制方面常用石英谐振器的电极应力引起频率漂移的计算结果。同时,也叙述了二次转角厚度切变温度补偿谐振器片子的应力效应可忽略不计。

薄 膜 应 力

对所有的金属化过程来讲,薄膜应力是普遍存在的。这种应力最明显的根源是薄膜和基片间热膨胀的不同。这种应力的来源已能确定和预言。但遗憾的是,薄膜应力最主要部分的来源则很难确定。这部分叫做内应力,它与薄膜形成过程的结核现象与颗粒边界效应及以后的热循环过程有关^[4~6]。

在此,感兴趣的效应是由薄膜电极传到石英片上的净应力在石英谐振器基片中所形成的应力偏置。测量这种净应力通常用弯曲片子的方法。^[2,4,6]在薄膜晶粒中,单胞大小的 X 射

线测量因排除了晶粒边界应力效应^[4], 不能提供所期望的数据。与目前考虑有关的是直接测量由电极应力所引起的石英谐振器片子的形变^[7]。另一些作者发现^[8], 铜电极具有小的内应力, 并提供良好的长期频率稳定度。

在沉积过程中, 用离子轰击来控制金属膜应力, 已报导了一些成功的结果^[6]。另外, 直流偏压溅射金属膜的应力能用改变直流偏压来调节^[5]。基片温度能影响应力的形成^[4]。看来, 作为频率控制应用的 α -石英基片金属化的薄膜应力要减至最小, 尚需作大量的实验工作。

在 AT 、 BT 切石英谐振器中电极应力引起的频率漂移

控制 α -石英上的金属薄膜应力终有一天是有希望的。一方面, 在此采取的方法是介绍一下在平均应力偏置条件下的厚度切变谐振器频率漂移的理论计算结果。今后, 研究人员可根据测量的薄膜应力, 利用这里给出的方程和图线推断频率漂移。

在石英片子中由加速度^[9,10], 支架^[11,12], 以及热冲击引起的应力效应, 已引起很多研究者的重视^[13,14]。附录中给出了常温下应力引起频率漂移一般计算的理论基础。这里只给出与电极应力效应有关的结果。本文实现了对二次转角切族($YXWl$) ϕ, θ 的计算^[15], 其中包括常用的 AT, BT 切。

一般说来, 在薄膜厚度方向上应力是不均匀的。此应力对薄膜厚度 τ_f 的积分是一个有用的参数, 称为积分应力 S 。参数 S 实质上是作用在石英基片上单位宽度上引起应力偏置的力。薄膜平均应力 \bar{T}_f 定义为

$$\bar{T}_f = S/\tau_f \quad (1)$$

其中正 S 是薄膜中的张力。在石英中的平均应力偏置 \bar{T}_q (在片厚 τ_q 上求平均值) 与薄膜中的 S 在方向上是相反的, 用下式给出,

$$\bar{T}_q = -S/\tau_q \quad (2)$$

其中正 \bar{T}_q 是张力。如果石英片在两个主面上沉有厚度为 τ_{f1} 和 τ_{f2} 的薄膜电极, 其积分应力为 S_1 和 S_2 , 则石英中的应力偏置为两者之和:

$$\bar{T}_q = -(S_1 + S_2)/\tau_q \quad (3)$$

如附录所示, 对于电极中各向同性应力所引起的频率漂移, 应用(2)和(3)式可表示为

$$\frac{\Delta f}{f} = +K \frac{S}{\tau_q} \quad (4)$$

$$\frac{\Delta f}{f} = -K \bar{T}_q \quad (5)$$

这里的应力系数 K 在附录中给出。对于谐振器片子, 应力系数 K 为二阶, 三阶弹性常数及特定结晶学切割旋转角度的函数。对于 AT 切, K 等于 $+2.75 \times 10^{-12}$ 厘米²/达因。

图1给出了关于 AT, BT 切厚度切变谐振器的频率漂移与 S/τ_q 关系的计算结果。一旦我们知道了所用薄膜电极的 S , 就可用图1中的直线来估算应力引起的频率漂移的数量。在图1中标出了在五次泛音 5MHz AT 切白片上沉积金电极的例子, 以作参考。

对于斜射入的薄膜沉积条件, 薄膜应力是各向异性的^[16]。在附录中, 已把各向异性薄膜应力用一个各向异性比 α 来考虑

$$\alpha = \bar{T}_w/\bar{T}_L \quad (6)$$

其中 \bar{T}_w 和 \bar{T}_L 是 $(YXWl)\phi, \theta$ 二次转角切割片子中沿宽度和长度的应力偏置分量。在此没有涉及切应力,因为在薄膜中很难想象净切应力。图2给出了 AT, BT 切频率漂移的 K 与 α 的函数关系曲线。图2中, $\alpha=1$ 的情况是图1中使用的各向同性值。正如图2中所见,除 AT 切各向异性较大外, AT 和 BT 切都有较大的应力频率漂移,图2中所示的零应力切割(这里称为应力补偿 SC -切)是下节要讨论的二次转角切割。

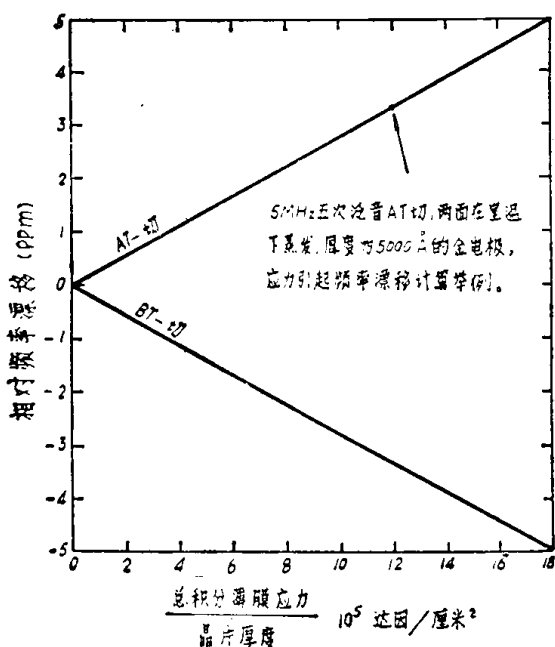


图1 关于 AT, BT 切石英晶体谐振器频率漂移(10^{-6})与电极积分膜应力除以谐振器片厚的函数曲线。当知道电极应力可用图中曲线估计频率漂移

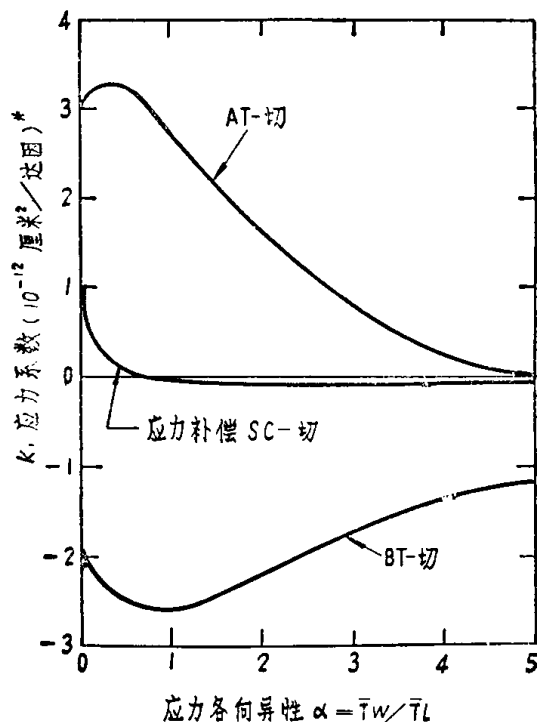


图2 由方程(4)和(5)计算的应力系数与电极薄膜应力各向异性的函数曲线。(由于电极应力引起谐振器片的应力偏置,所以它与石英谐振器的频率漂移有关)。包括 AT, BT 切及新的应力补偿切(SC -切)

二次转角切割

由于二次转角切割(例如 $(YXWl)\phi, \theta$)的频率应力系数 K 是二阶,三阶弹性常数和 ϕ, θ 的复杂函数。所以, (ϕ, θ) 为某数值时, K 值有希望为零。本文探讨了二次转角切割族的所有零温度系数分支的应力补偿切割^[17]。发现仅有在一个 (ϕ, θ) 值下厚度切变模是特殊的,工作性能好,同时它的应力系数 K 为零。图3给出沿 $\theta=35^\circ$ 分支各向同性应力 K 的计算值(其中 $\phi=0$ 是 AT 切)。在 $\phi=22.5^\circ, \theta=34.3^\circ$ 时,应力系数 K 经过零。

图2给出应力补偿切割(SC -切)的 K 值与应力各向异性的函数关系计算值。除去各向异性的极值外,可看到 K 值比 AT 或 BT 切小两个数量级。

对于零应力切割,在图2和图3中得到的结论许多是重合的。在谐振器片子的表面上几乎任何应力模型(各向同性或各向异性)都与厚度切变振动无耦合作用。因此由支架,加速度引起的应力以及电极应力将很少引起或不引起频率漂移。这里应该注意的是在计算中

* 原文误为(达因⁻¹/厘米²)

还要说明是谐振器片座标中的那些切应力。将切应力合并到标准方法的计算中去(如处理 \bar{T}_w 和 \bar{T}_z 那样)是困难的。

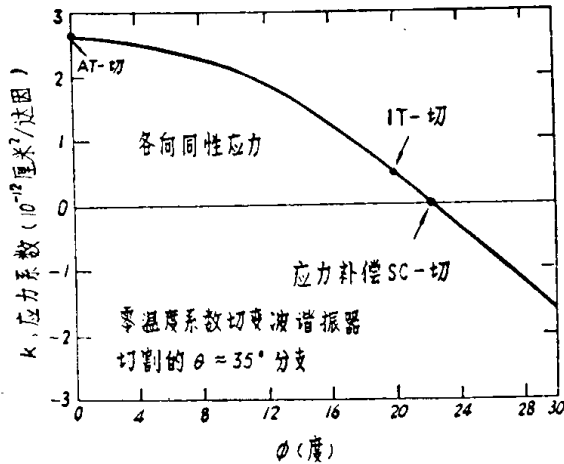


图3 由(4)和(5)式计算的(YXWl) ϕ, θ 切族 $\theta \approx 35^\circ$ 温度补偿
分支厚度切变石英谐振器的应力系数与 ϕ 的函数曲线
在 $\phi = 22.5^\circ (\theta = 34.3^\circ)$ 时应力系数为零。

结 论

本文的计算说明在薄膜金属化中通常出现的应力可引起 10^{-6} 量级的频率漂移。这些频率漂移仅相当于在薄膜——石英片集合体内储存的应力能量的稳定性。如果薄膜应力有时间或温度弛豫, 则这些效应是长期频率漂移的主要原因。对 AT 和 BT 切给出了在常温下应力效应的标准计算式, 因此, 一旦知道了电极中的积分应力, 就能计算所产生的频率漂移。

已发现了(YXWl) ϕ, θ 系列的一种温度补偿二次转角切割 ($\phi = 22.5^\circ, \theta = 34.3^\circ$), 它应当具有一个与应力效应无关的厚度切变谐振。当片子只出现电极应力, 加速度和支架应力, 而没有切应力而且所有应力都在片子平面上时, 这种应力补偿切割的频率将是稳定的。

附 录

常温下应力引起频率漂移的理论, 别处已有叙述^[2, 18]。为阐述方便, Thurston 和 Brugger^[18] 引用了一个“特性”波前速度 w , 它定义为存在静应力偏置时, 观察到的波渡越时间除以零应力偏置时波的传播距离(即片子厚度)。这些作者发展了均匀静偏置应力 T_{ij} 存在时, 在 N_i 方向上小振幅声波的传播理论, 对于这种情况所有 T_{ij} 分量均正比例于一个标量。如果“'”表示对标量(例如 S)取微分, 对 $(\rho_0 w^2)'$ 的普遍结果为

$$(\rho_0 w^2)' = \bar{T}_{ab} [N_a N_b + U_j^0 U_k^0 (2\rho_0 w_0^2 S_{jkab} + N_r N_s S_{ipad} C_{jrksip})] \quad (A1)$$

这里 S_{jkab} 是无应力条件下的等温弹性顺服张量, C_{jrksip} 是等温三阶弹性刚性张量, ρ_0 是没有应力条件下的质量密度, \bar{T}_{ab} 是应力偏置张量, U_j^0 是下式的本征矢量:

$$\rho_0 w_0^2 U_k^0 = N_r N_s C_{jrks} U_j^0 \quad (A2)$$

所有的量都以晶轴为参考轴。对于(YXWl) ϕ, θ 切族, 单位矢量 N_i (片子的厚度方向) 和 U_i 是 ϕ 和 θ 的函数。

为了计算方便,方程(A1)用矩阵形式表示^[19], ($\alpha, \beta, \gamma, \delta=1, 2, \dots, 6$)

$$(\rho_0 w^2)' = \bar{T}'_\alpha [A_\alpha + U_\beta 2\rho_0 w_0^2 S_{\alpha\beta} + B_\beta B_\gamma S_{\delta\alpha} C_{\beta\gamma\delta}] \quad (\text{A3})$$

在此用了下面一些规定的帮助:

$$[A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6] = [N_1 N_1, N_2 N_2, N_3 N_3, 2N_2 N_3, 2N_1 N_3, 2N_1 N_2]$$

$$[U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6] = [U_1^0 U_1^0, U_2^0 U_2^0, U_3^0 U_3^0, U_2^0 U_3^0, U_1^0 U_3^0, U_1^0 U_2^0]$$

$$[B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6]$$

$$= [N_1 U_1^0, N_2 U_2^0, N_3 U_3^0, N_2 U_3^0 + N_3 U_2^0, N_1 U_3^0 + N_3 U_1^0, N_1 U_2^0 + N_2 U_1^0] \quad (\text{A4})$$

在代数学上弄清(A1)式和(A3)的等效,对计算(A3)式是有利的。

系数 K 由下式给出

$$K = -\tau_q (\rho_0 w^2)' / (2\rho_0 w_0^2) \quad (\text{A5})$$

其中负号是转换成(4)和(5)式的习惯符号。因为方程(A1)中的 \bar{T}'_α 反比于 τ_q ,所以 K 与 τ_q 无关并且仅是 $S_{\alpha\beta}$, $C_{\alpha\beta\gamma}$, ϕ 和 θ 的函数。

应力 \bar{T}_α 必须从晶片轴系统旋转到方程(A1~A5)所用的晶轴系统来计算^[2]。这里所考虑的各向异性是假定薄膜中的应力与标量成比例,即

$$\alpha \equiv \bar{T}_w / \bar{T}_L \quad (\text{A6})$$

归一化是由假定在薄膜中储存的弹性能量对于各向同性和各向异性应力情况相同而实现的。

用已发表的 $C_{\alpha\beta}$, $S_{\alpha\beta}$ 和 $C_{\alpha\beta\gamma}$ 数值^[20, 21]进行计算。

参 考 资 料(略)

2. 弯曲或长度伸缩振动石英棒机电耦合系数的确定

【摘要】 确定了弯曲和长度伸缩振动石英棒横截面上的电能和压电能密度。这些量再加上弹性能密度就能给出横截面的机电耦合系数。对棒的整个长度积分可以得到动态机电耦合系数以及谐振器的静态和动态电容。

更具体地说,已经研究了金属电极图对弯曲振动($XY-NT$ 耦合)和长度伸缩振动的电能和压电能密度的影响。

已经证明只用横截面或某条线上的平均静电位来计算压电能密度就成了。确定这个电位的一个很普通的方法是应用保角变换获得均匀静电场。已经知道在保角变换时保持静电容,所以这个方法也是计算单位长度的静电容以至电能密度的一个简便途径。

引 言

因为电极产生的电场不均匀,所以不能直接计算弯曲振动模石英棒的机电耦合系数。对 NT 耦合来说不均匀性一般很小,所以在一级近似时可以忽略,但它却是 XY 耦合的一个重要分量。

根据保角变换,已经发展了一种可以获得均匀静电场的计算方法。这样就能直接确定机电耦合系数和动态及静电容了。这个方法也可应用于因电极比棒窄而产生不均匀电场的长度伸缩振动石英棒。

由于作了以下假设,前述方法并不精密。

1. 假定所处理的问题是两维的,沿长度方向的边缘影响没有考虑进去。
2. 假定电能全部集中在棒内。从几何形状考虑以及根据石英的相对介电常数比1大的多的事实,证明这个假定是正确的。
3. 假定石英在电性能上是各向同性的。由于沿光轴的介电系数与 XY 平面内的仅差2.7%,因而这个假定仅产生很小的误差。

此外,我们认为在振动棒内除了沿长度方向的法向应力外,所有机械应力都几乎为零。这就要求横截面的尺寸与长度相比要小得多。

定义和基本方程

石英棒长度沿 Y 轴,而横截面为笛卡儿坐标系 X, Z 。当然石英棒可作单转角或两次转角。可将下述量表示为:

S_{22}	弹性系数	} 材料性能
ε	介电系数	
d_{12}	压电系数	

$T_2(X, Y, Z)$ 沿 Y 方向的机械应力

ϕ_0 电极间的电位差

$\phi(X, Z)$ 静电位

dC_0 长度 dY 的静电容

横截面 S (高 h 、宽 b) 的各种能量密度和机电耦合系数由下述关系式给出^[1]:

弹性密度:

$$u_m = \frac{1}{2bh} \iint_s S_{22} T_2^2 dX dZ$$

电能密度

$$u_e = \frac{1}{2bh} \phi_0^2 \frac{dC_0}{dY}$$

压电能密度

$$u_p = \frac{1}{2bh} \iint_s d_{12} \frac{\partial \phi}{\partial X} T_2 dX dZ$$

机电耦合系数

$$K^2 = \frac{u_p^2}{u_m u_e}$$

将能量密度对整个长度积分可得到整个谐振器的能量。对于电能和压电能密度，只要对长度的金属电极部分进行积分即可。

众所周知^[2]，象石英这样的弱耦合材料其动态机电耦合系数(这是用振动谐振器中存在的应力计算的总的机电耦合系数)几乎等于动态电容与静电容之比。当静电容和动态机电耦合系数确定以后，就可以直接导出动态电容。

弯 曲 振 动

XY 平面弯曲 (XY 耦合)

图 1 给出了棒的应力随 X 分布的截面图。

定义下述平均电位:

$$\bar{\phi}_s = \frac{1}{bh} \iint_s \phi(X, Z) dX dZ$$

$$\bar{\phi}_{\lambda 1} = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \phi\left(-\frac{h}{2}, Z\right) dZ$$

$$\bar{\phi}_{\lambda 2} = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \phi\left(\frac{h}{2}, Z\right) dZ$$

$$\bar{\phi} = \bar{\phi}_s - \frac{\bar{\phi}_{\lambda 1} + \bar{\phi}_{\lambda 2}}{2}$$

于是横截面的各种能量密度和机电耦合系数由下述关系式给出:

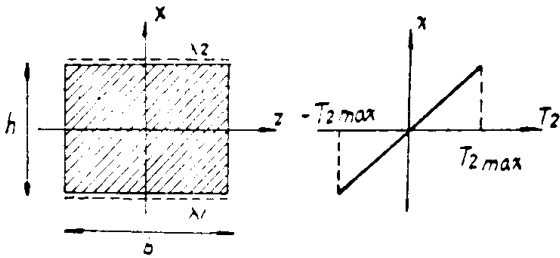


图1 XY平面弯曲棒的横截面

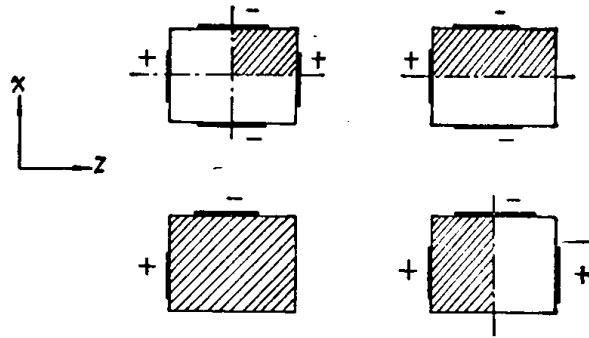


图2 XY平面弯曲金属电极图

$$u_m = \frac{1}{6} S_{22} T_{2max}^2$$

$$u_e = \frac{1}{2bh} \frac{dC_0}{dY} \phi_0^2$$

$$u_p = \frac{d_{12} T_{2max}}{h} \bar{\phi}$$

$$K^2 = \frac{12d_{12}^2}{S_{22}} \cdot \frac{b}{h} \frac{\left(\frac{\bar{\phi}}{\phi_0}\right)^2}{dC_0/dY}$$

为了确定 $(\bar{\phi}/\phi_0)$ 和 $\left(\frac{dC_0}{dY}\right)$ 后面要定义保角变换

本文考虑的金属电极如图2所示。

每个电极图都画出了存在的对称轴,并用阴影画出了所用这些对称的单元。

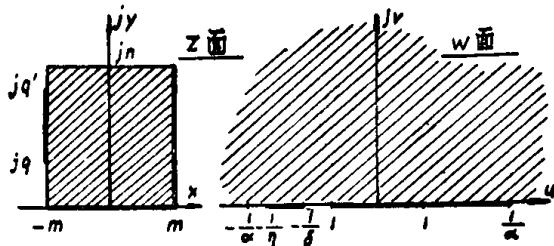


图3 XY平面弯曲第一次保角变换

换如图3所示,使用了 Jacobi 椭圆函数 Sn 、 Cn 和 dn 。

在 Z 平面和 W 平面之间的变换公式为:

$$u = \frac{Sn(X, \alpha) dn(Y, \alpha')}{Cn^2(Y, \alpha') + \alpha^2 Sn^2(X, \alpha) Sn^2(Y, \alpha')}$$

$$v = \frac{Sn(Y, \alpha') Cn(Y, \alpha') Cn(X, \alpha) dn(X, \alpha)}{Cn^2(Y, \alpha') + \alpha^2 Sn^2(X, \alpha) Sn^2(Y, \alpha')}$$

α 和 α' 由下式定义

$$\frac{m}{n} = \frac{K(\alpha)}{K(\alpha')} \quad \alpha' = \sqrt{1-\alpha^2}$$

而

$$K(\alpha) = \int_0^1 \frac{dZ}{(1-Z^2)(1-\alpha^2 Z^2)}$$

最通用的金属电极是能获得最强机电耦合的双对称电极。有时为了简化激励弯曲振动的二次谐波的电极连接有可能采用一个对称轴,或者没有对称轴的金属电极。一般都使用不对称电极。

根据 Schwarz-christoffel 法,第一次保角变换^[3]将矩形截面变换在一个半平面上。该变

第一类椭圆全积分。

考虑 Jacobi 函数的性质, 我们得到下述关系:

$$\delta = \frac{1 + (\alpha^2 - 1) \operatorname{Sn}^2(q, \alpha)}{\operatorname{dn}(q, \alpha')}$$

$$\eta = \frac{1 + (\alpha^2 - 1) \operatorname{Sn}^2(q', \alpha)}{\operatorname{dn}(q', \alpha')}$$

$$\beta = \operatorname{Sn}(\rho, \alpha)$$

$$\sigma = \operatorname{Sn}(\rho', \alpha)$$

通称为双线性变换^[4]的第二次保角变换, 将半平面变换在另一个半平面上, 以便将金属电极对称化。此变换如图 4 所示。

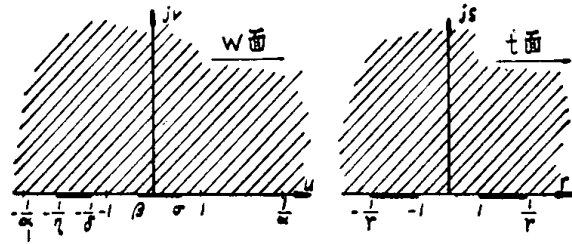


图 4 XY 平面弯曲第二次保角变换

将 W 平面变换成 t 平面的变换公式的复数形式为:

$$t = \frac{AW + B}{W + C}$$

要确定所含的常数是很烦人的。结果列出如下:

$$A = \frac{N}{(1 + \delta\beta) [\eta(1 + \delta\sigma) - \delta(1 + \eta\beta)]}$$

而

$$N = (1 + \delta\beta)(\delta - \eta) + \delta(\sigma - \beta) [(\delta - \eta) + \delta(1 + \eta\beta)] + 2\delta\sqrt{(\delta - \eta)(\sigma - \beta)(1 + \eta\beta)(1 + \delta\sigma)}$$

$$B = \frac{A(1 - \delta\beta) + (1 + \delta\beta)}{2\delta}$$

$$C = \frac{A(1 + \delta\beta) + (1 - \delta\beta)}{2\delta}$$

$$r = \frac{A(1 + \delta\beta) + (1 + 2\sigma\delta - \delta\beta)}{A(1 + 2\sigma\delta - \delta\beta) + (1 + \delta\beta)}$$

在特殊情况:

$$\eta = \frac{\delta}{1 + \delta(\sigma - \beta)} \text{ 时存在简并}$$

这时变换公式变成:

$$t = \frac{2\delta W + (1 - \delta\beta)}{1 + \delta\beta} \quad \text{而} \quad \gamma = \frac{1 + \delta\beta}{1 + 2\delta\sigma - \delta\beta}$$

也是根据 Schwarz-christoffel 方法的第三次变换^[5], 将半平面变换成矩形, 其两边完全镀金属电极。这样静电场就均匀了。此变换如图 5 所示并由下述关系描述:

$$C \approx \int_0^t \frac{dZ}{(1-Z^2)(1-\gamma^2 Z^2)} \equiv F(\text{ArC sin } t; r)$$

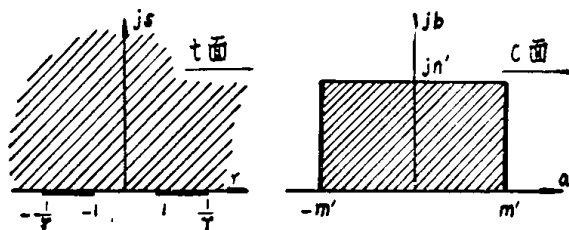


图5 XY平面弯曲第二次保角变换

第一类椭圆积分。

需要计算的量是 C 平面的静电位，确定实数座标 a 就可以了。利用椭圆积分的性质可得：

$$a = F(\lambda, \gamma)$$

$(\tan^2 \lambda)^{-1}$ 是 P 的二次方程的正根。

$$P^2 - P \left[\frac{1-\mu^2}{\mu^2} + \frac{\gamma}{\mu} \left(\frac{\nu^2-1+\nu\sqrt{\nu^2-1}}{\nu+\sqrt{\nu^2-1}} \right)^2 - (1-\gamma^2) \right] - (1-\gamma^2) \frac{1-\mu^2}{\mu^2} = 0$$

其中：

$$\mu = \frac{1}{2} \sqrt{(r+1)^2 + S^2} - \frac{1}{2} \sqrt{(r-1)^2 + S^2}$$

$$\nu = \frac{1}{2} \sqrt{(r+1)^2 + S^2} + \frac{1}{2} \sqrt{(r-1)^2 + S^2}$$

m' 和 n' 由简单的关系给出：

$$m' = K(\gamma)$$

$$n' = K \sqrt{1-\gamma^2}$$

K ：第一类椭圆全积分。

由于所用方程很复杂不可能用分析积分确定平均电位 $\bar{\phi}$ 。已经使用计算机程序对一规则排列电极的静电位作了数值计算，并计算了平均值。

静电容由下述关系简单地给出：

$$\frac{dC_0}{dY} = \frac{2n'}{m'}$$

各次变换时都将此量采用^[4]。

作为一个例子，我们处理如图6所示的对称金属电极。

每单位长度的静电容 $\frac{dC_0}{dY}$ 在图7给出。

$\frac{b}{h} = \frac{1}{2}$ 和 2 以及 $\frac{b}{h} = \frac{2}{3}$ 和 $\frac{3}{2}$ 的曲线完

全一样来自介电各向同性的假定。

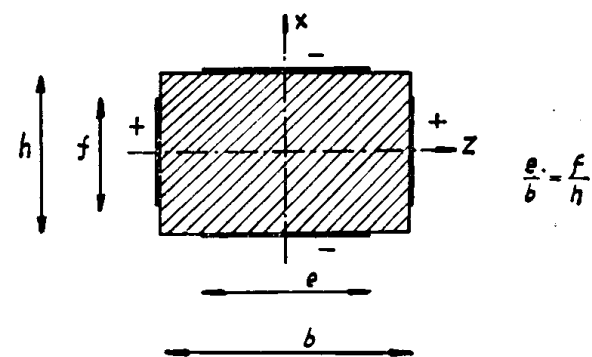


图6 XY平面弯曲对称型金属电极

图8表示量 $\frac{b}{h} \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi_0} \right)^2$ ，它正比于动态电容，可以看出对于给定的 b/h 比值，使用全电极可获得最高的动态电容。但由于静电容无穷大，不能完全采用这种电极。

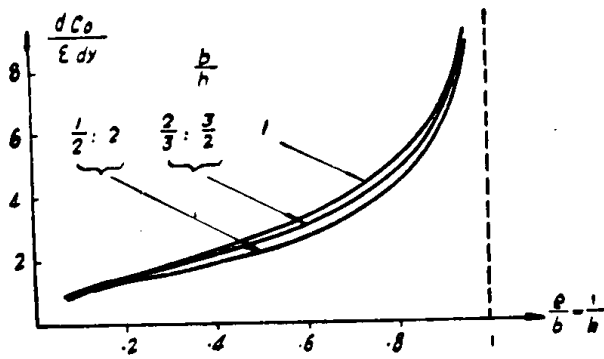


图7 对称型金属电极每单位长度静电容

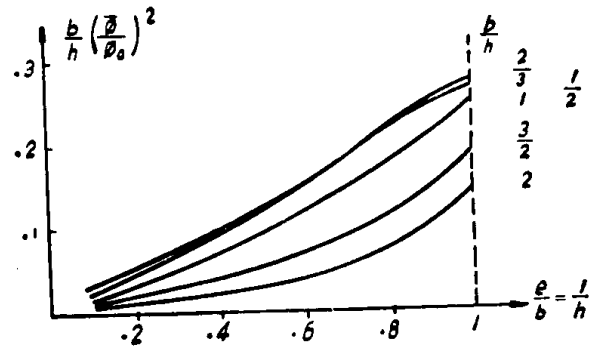


图8 对称型金属电极动态电容

为了较好地表示 b/h 比值对动态电容的影响。在图9中将 $\frac{b}{h} \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi_0}\right)^2$ 表示成该比值的对数函数。虚线是从图8获得的。相应于全电极、极限的实线可以用一个相当简单的方法⁽⁴⁾ 计算得到。该方法用正交函数的无穷级数表示电位。这个计算结果由下述关系给出：

$$\frac{\bar{\phi}}{\phi_0} = \frac{16}{\pi^3} \frac{h}{b} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\tan h\left(n \frac{\pi}{2} \frac{b}{h}\right)}{n^3}$$

图9说明为使动态电容达最大值， $\frac{b}{h}$ 比值应选为 0.6。

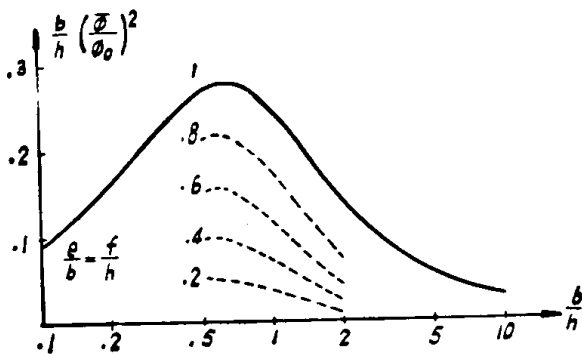


图9 对称型金属电极动态电容

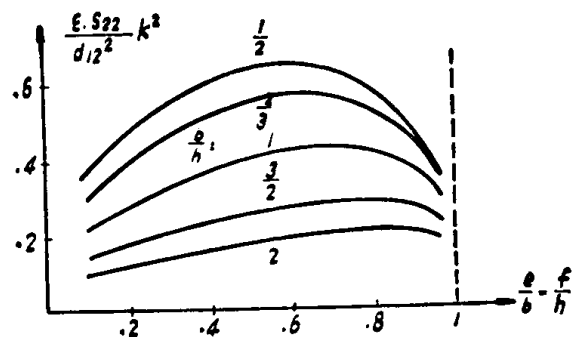


图10 对称型金属电极机电耦合系数

图10给出了其值等于动态电容和静电容之比的一个量，它正比于机电耦合系数的平方。这些曲线使该比值达到最大值的平均值，常将它作为石英谐振器的设计判据。

ZY平面弯曲(NT耦合)

图11给出了应力分布沿Z轴的一个棒的横截面。和XY弯曲不同的 $\bar{\phi}$ 值由下述关系给出：

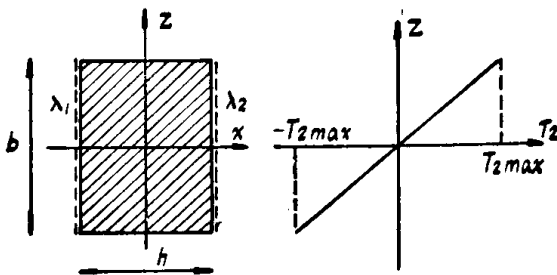


图11 XZ平面弯曲棒的横截面

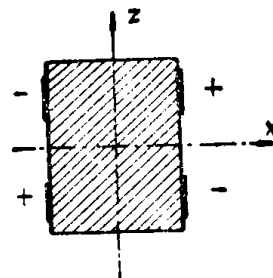


图12 ZY平面弯曲对称型金属电极

$$\bar{\phi} = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{Z}{b} \left[\phi\left(\frac{h}{2}, Z\right) - \phi\left(-\frac{h}{2}, Z\right) \right] dZ$$

为了计算 $\bar{\phi}$ 仅需确定直线 λ_1 和 λ_2 上的静电位。计算时间明显地减小。
计算能量密度的公式和 XY 弯曲的相同。

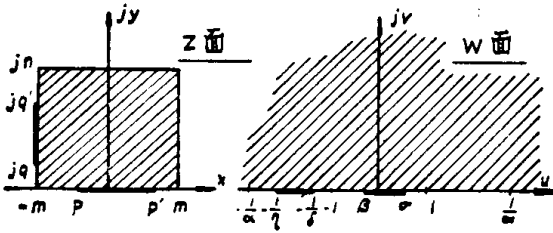


图 13 ZY 平面弯曲第一次保角变换

将要讨论的对称型金属电极图如图 12 所示。这是 NT 棒一般使用的电极图。

所需要的保角变换和 XY 耦合的很类似。因为对称关系, 仅需考虑横截面的四分之一。

图 13 说明了将横截面变换在一个半平面上。 Z 平面和 W 平面间变换公式和 XY 弯曲的相同。

在半平面内用来使金属电极对称化的双线性变换参数是不同的。

$$A = \frac{N}{(1-\delta) [\eta(\alpha+\delta) - \alpha\delta(1-\eta)]}$$

而

$$N = \alpha(1-\delta)(\delta-\eta) + \delta(1+\alpha) [(\delta-\eta) + \delta(1-\eta)] + 2\delta\sqrt{(\delta-\eta)(1+\alpha)(1-\eta)(\alpha+\delta)}$$

$$B = \frac{A(1+\delta) + (1-\delta)}{2\delta}$$

$$C = \frac{A(1-\delta) + (1+\delta)}{2\delta}$$

$$\gamma = \frac{A(1-\delta) + \left(1 + 2\frac{\delta}{\alpha} + \delta\right)}{A\left(1 + 2\frac{\delta}{\alpha} + \delta\right) + (1-\delta)}$$

如果 $\eta = \frac{\alpha\delta}{\alpha+\delta+\alpha\delta}$ 时则存在简并

其次 $t = \frac{2\delta W + (1+\delta)}{1-\delta}$ 而 $\gamma = \frac{1-\delta}{1+\delta-2\frac{\delta}{\alpha}}$

最后一个变换, 是给出具有均匀静电场的, 它和 XY 弯曲的完全相同。

整个长度的积分

如前所述, 为了确定动态和静电容, 要求对棒的整个长度将各种能量密度进行积分。

除了 T_2 外略去所有其它应力时的运动微分方程以及它的解都是大家熟知的^[8]。各种积分都可直接进行, 这里只给出结果。

我们定义下述各量:

L : 棒的长度

L_m : 金属电极图长度, 中心对称。

$$\nu = \frac{L_m}{L}。$$

静电容 C_0 , 动态电容 C_1 和动态机电耦合系数 K_m , 由下述关系给出:

$$C_0 = L_m \frac{dC_0}{dY}$$

$$C_1 = 12\lambda L \frac{d_{12}^2}{S_{22}} \frac{b}{h} \left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2$$

$$\frac{C_1}{C_0} \approx K m^2 = \mu K^2$$

而

$$\mu = \frac{2[\cos \rho \sin h(\nu\rho) - \cos h\rho \sin(\nu\rho)]^2}{\nu\rho^2(\cos^2 \rho + C \cos h^2 \rho)}$$

$$\lambda = \nu\mu$$

$$\rho \approx 2,365 \tan \rho + \tan h\rho = 0 \text{ 的解}$$

图 14 表示两个量： λ 正比于动态电容， μ 正比于动态机电耦合系数。已经计算了棒中心对称的金属电极的这些参数的曲线， ν 是金属电极长度的比例。

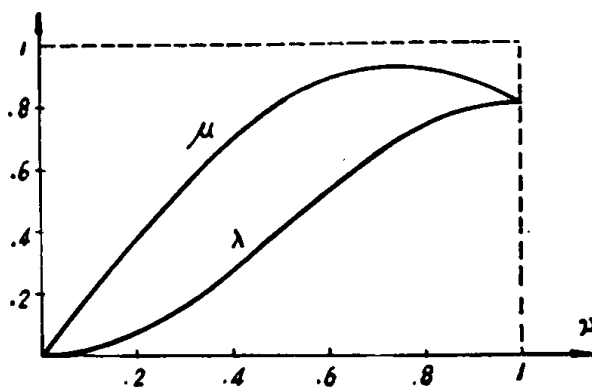


图 14 弯曲: 动态电容和耦合系数

可以看出需要全电极才能使动态电容最大。但是, 当金属电极长度占总长度的 60% 时, 可以获得最强的耦合, 以至最佳的电容比。

沿 Y 的长度伸缩

一般 X 面沿 Z 方向全镀电极, 因为机电耦合系数可达最大。但是为了减小谐振器的动态电容这些面需要采用部分电极。这时静电场是不均匀的, 但可采用根据保角变换的相同方法以便获得均匀电场。

下面仅考虑金属电极图对称的情况。图 15 示出了棒的横截面。

假定在整个横截面应力 T_2 都是常量时, 给出各种能量密度的关系式如下:

$$u_m = \frac{1}{2} S_{22} T_2^2$$

$$u_e = \frac{\varepsilon}{2bh} \iint_s \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial Z}\right)^2 \right] dX dZ$$

$$u_p = \frac{d_{12} T_2}{2bh} \iint_s \frac{\partial \phi}{\partial X} dX dZ$$

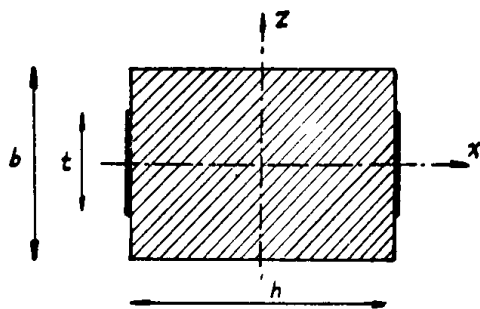


图 15 长度伸缩棒的横截面