高等数学辅导

（上　册）

盛祥耀　葛严麟
胡金德　张元德　编

清华大学出版社

内容简介

本书基本上是根据教育部1980年制定的工科高等数学教学大纲的要求编写的。也是编者多年来在清华大学数学辅导工作的结晶。

本书上册共六章，包括函数，极限与连续、导数、导数与微分的应用、不定积分、定积分。是工科大学生、电大和职工大学学员、自学高等数学者学习高等数学时的辅导教材。也可供从事工科高等数学教学的教师、非数学专业的研究生及中学数学教师参考。

高等数学辅导

（上册）

盛祥耀　葛严麟　胡金德　张元德　编

☆

清华大学出版社出版

北京　海淀　清华园

北京景山学校印刷厂排版

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

☆

开本：787×1092 1/32 印张：14 3/16 字数：306千字

1983年8月第一版　1983年8月第一次印刷

印数：1—120000

统一书号：15235·46　定价：2.30元

序

目前社会上有不少青年在自学或通过电视学习工科类的高等数学，他们希望得到老师的辅导，但机会不多，编写本书的目的就是想在这方面提供一些我们力所能及的帮助．编写时也考虑到了在校学习的工科类大学生的情况，希望对他们也能提供一些辅导，至于能否体现这些良好的愿望，这就要请读者来评说了．

本书是通过例题的分析、讲解、提问、小结等方式提供辅导的．例题的选择基本上符合高等工业院校高等数学大纲所规定的要求，因此，不管读者使用什么样的工科类教材，都能使用此书．

本书共分十二章：函数、极限与连续、导数、导数与微分的应用、不定积分、定积分、空间解几及矢量代数、多元函数及其微分法、重积分、曲线积分与曲面积分、级数、微分方程等。全书共收集了500道左右的例题，850道左右的习题．例题中有基本概念讨论题；有似是而非的提问题；有初学者易在计算中出现的错误或不易理解的澄清题；有介绍基本方法、思路的计算或证明题；有一题多解的开扩思路题；也有较灵活的综合题．不少例题在讲解前作了如何思考或如何下手的分析，在讲解完后有些还提出新问题，帮助读者进一步掌握和理解。这些例题的绝大部分都在编者所在的单位清华大学数学上使用过，其中不少例题还是我们多年来经常使用的．

读者在使用本书时，我们建议先看一下每一节的内容提要及例题，自己想一想，动手算一算，然后再去看例题分析，这

样帮助会大些．为了使读者有指导地做习题，在每章的最后附有习题，（有＊号题可暂时略去不看或不做）这些题会做了，教学大纲所规定的要求就达到了．

编写本书时，我们参考了下列教材：清华大学高等数学教研组编写的“高等数学（基础部分）”和习题集（未出版），同济大学数学教研组编的“高等数学习题集”，别尔曼著，景毅等译的“数学解析习题汇编”，吉米多维奇著，李英浓译的“数学分析习题集”，在此特向有关人员表示感谢．

编者力图使本书能反映清华大学高等数学教研组近三十年来辅导工作中的经验．但由于我们水平较低，反映肯定是不充分的．如果有机会我们还要不断完善．

本书的缺点和错误，恳请读者指正．

编者　1981.9

目　　录

第一章　函　　数

§1　预备知识

（一）内容提要

1　区间及其各种表示法

满足不等式 $a<x<b$ 的一切实数 x 的全体叫做开区间，记作 (a,b)。

满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切实数 x 的全体叫做闭区间，记作 $[a,b]$。

满足不等式 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的一切实数 x 的全体叫做半开区间，记作 $[a,b)$，或 $(a,b]$。

记号 $(-\infty,+\infty)$ 表示全体实数，可写为 $-\infty<x<+\infty$。

记号 $(a,+\infty)$ 表示大于 a 的全体实数，可写为

$$a<x<+\infty.$$

同样可以规定 $(-\infty,a)$，$[a,+\infty)$，$(-\infty,a]$ 等记号的含义。

满足不等式 $|x-a|<l$ 的一切实数 x 的全体叫点 a 的 l 邻域。

2　绝对值及其性质

1°　绝对值定义

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时}, \\ -x, & \text{当 } x<0 \text{ 时}. \end{cases}$$

2°　绝对值的四则运算

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|,$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|,$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},$$

3° 若 $|a|<\varepsilon$ 则 $-\varepsilon<a<\varepsilon$，反之也对。

（二）例题

1.1 将带有绝对值不等式 $|x-2|<3$ 化为不带绝对值的不等式，并用图形表示之。

1.2 将不等式 $-5<x<10$ 化为带有绝对值的不等式。

1.3 将点 x_0 的 δ 邻域用不带有绝对值不等式表示，并用圆括弧表示之。

1.4 解下列不等式：

1° $x^2+2x-3\geqslant 0$；　　2° $\dfrac{x+2}{2x^2+x-1}\leqslant 0$；

3° $|x+2|+|x-2|\leqslant 12$。

（三）例题分析

1.1 将带有绝对值不等式 $|x-2|<3$ 化为不带绝对值的不等式，并用图形表示之。

解：根据绝对值性质 3°，可将带有绝对值不等式化为不带绝对值不等式。

因为 $|x-2|<3$，

所以 $-3<x-2<3$，

即 $-1<x<5$。

它的图形表示在数轴上 $x=-1$ 与 $x=5$ 两点之间的一段线段，但不包括 $x=-1$ 及 $x=5$ 两个端点（不包括的点用圆圈表示）。见图 1—1。

图 1—1

1.2　将不等式 $-5<x<10$ 化为带有绝对值的不等式。

分析：先找出区间 $(-5,10)$ 的中点，再求出区间长度的一半，即可化为带有绝对值的不等式。

解：设区间中点为 x_0，那么

$$x_0=\frac{10+(-5)}{2}=\frac{5}{2}.$$

区间长度的一半设为 l，那么

$$l=\frac{10-(-5)}{2}=\frac{15}{2},$$

所以带绝对值的不等式为

$$\left|x-\frac{5}{2}\right|<\frac{15}{2}.$$

它也叫点 $\frac{5}{2}$ 的 $\frac{15}{2}$ 邻域。

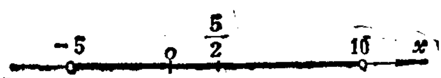

图　1—2

1.3　将点 x_0 的 δ 邻域用不带有绝对值不等式表示，并用圆括弧表示之。

解：根据邻域的定义有

$$|x-x_0|<\delta,$$

去掉绝对值得，

$$-\delta<x-x_0<\delta,$$

即 $$x_0-\delta<x<x_0+\delta.$$

所以它的不带绝对值不等式及圆括弧为：

$$x_0-\delta<x<x_0+\delta,\qquad (x_0-\delta,\ x_0+\delta).$$

1.4　解下列不等式：

1°　$x^2+2x-3\geqslant 0$；　　　2°　$\dfrac{x+2}{2x^2+x-1}\leqslant 0$；

3° $|x+2|+|x-2|\leqslant 12$。

解

1° 方法一。

将原式左边因式分解后可化为

$$(x+3)(x-1)\geqslant 0,$$

这个不等式相当于下列两个不等式组

$$\begin{cases} x+3\geqslant 0 \\ x-1\geqslant 0 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x+3\leqslant 0 \\ x-1\leqslant 0. \end{cases}$$

它们的分别是 $x\geqslant 1$ 和 $x\leqslant -3$，所以原不等式的解为 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -3$。

方法二。

分析：将不等式左边因式分解后，可以看出，只有当变量 x 通过 $x=1$ 和 $x=-3$ 时，不等式的左边才会改变正负号，其它的点均不会改变其正负号，因此我们只要讨论在三个区间 $(-\infty,-3]$，$[-3,1]$，$[1,+\infty)$ 上上述不等式是否成立就行了。

令 $f(x)=(x+3)(x-1)$。

当 $-\infty<x\leqslant -3$ 时，因 $(x+3)\leqslant 0$，$(x-1)<0$，所以 $f(x)\geqslant 0$；当 $-3\leqslant x\leqslant 1$ 时，因 $(x+3)\geqslant 0$，$(x-1)\leqslant 0$ 所以 $f(x)\leqslant 0$；当 $1\leqslant x<+\infty$ 时，因 $(x+3)>0$，$(x-1)\geqslant 0$，所以 $f(x)\geqslant 0$，综合上述，原不等式的解为

$$x\leqslant -3 \quad 或 \quad x\geqslant 1.$$

上述讨论也可用表格列出。

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$		$-$		$+$	

它简单明瞭。

这个方法要点是：（1）因式分解，（2）找出各个因子的零值点，这些零值点把数轴分成若干个区间．（3）逐个地讨论在这些区间上 $f(x)$ 的正负号。

如果遇到因式较多时，此法特别有效。

2° 分母因式分解，得

$$\frac{x+2}{(2x-1)(x+1)}\leqslant 0.$$

令 $f(x)=\dfrac{x+2}{(2x-1)(x+1)}$，分子、分母中各因式的零值点分别为 -2，-1，$\dfrac{1}{2}$，

列表

x	$-\infty$		-2		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	

所以不等式的解为

$$x\leqslant -2 \text{ 或 } -1<x<\frac{1}{2}.$$

3°

分析，去掉绝对值，由于点 -2 的两侧，式 $(x+2)$ 会变号，在点 2 的两侧式 $(x-2)$ 会变号，所以应该分三个区间：$-\infty<x\leqslant -2$，$-2\leqslant x\leqslant 2$，$2\leqslant x<+\infty$ 来讨论。

（1） 设 $-\infty<x\leqslant -2$，则已给的不等式为

$$-(x+2)-(x-2)\leqslant 12,$$

即

$$x\geqslant -6.$$

所以在 $(-\infty,-2]$ 上的解为 $-6\leqslant x\leqslant -2$。

（2） 设 $-2\leqslant x\leqslant 2$，则已给的不等式为

$$(x+2)-(x-2)\leqslant 12,$$

即 $$4\leqslant 12.$$

此式恒成立，故其解 $-2\leqslant x\leqslant 2$。

(3) 设 $2\leqslant x<+\infty$，则已给不等式为

$$(x+2)+(x-2)\leqslant 12,$$

即 $$x\leqslant 6,$$

所以在 $[2,+\infty)$ 上的解为 $2\leqslant x\leqslant 6$。

综合上述讨论，原不等式的解为

$$-6\leqslant x\leqslant 6.$$

小结：对解含有绝对值的不等式时，通常应找出每个绝对值式子的零值点，这些零值点把所考虑的范围分成了若干区间，分别讨论这些区间上不等式的解，就可解得不等式。

§2 函数概念、定义域、函数符号

(一) 内容提要

1. 函数定义

设有两个变量 x 和 y，如果对于 x 所考虑范围内的每一个值，y 按一定规则对应着一个或多个确定的值．则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$。

x 称为自变量，y 称为因变量。

2. 定义域。

对于自变量 x 变化范围内的每一个值 x_0，函数 y 有一个确定的值 y_0 与之对应，我们称函数在点 x_0 处是有定义的，使函数有定义的点的全体（也就是 x 变化范围）称为函数的定义域。

3. 反函数定义

设函数 $y=f(x)$，当变量 x 在一个区域 $\mathscr{X}$ 内变化时，变量 y 在区域 $\mathscr{Y}$ 内变化，如果对于变量 y 在区域 $\mathscr{Y}$ 内任取一个值

y_0，变量 x 在区域 $\mathscr{X}$ 内有 x_0，使 $y_0=f(x_0)$；则变量 x 是变量 y 的函数，用 $x=\varphi(y)$ 表示，函数 $x=\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数。

（二） 例题

1.5 问 x^2 是不是 x 的函数？

1.6 在函数的公式表示法中，一个函数是否只能是一个式子表示？

1.7 若变量 x 与 y 不能用公式表示其相互间的关系时，能否说 x 与 y 不存在函数关系？

1.8 x 与 y 之间的一个方程，是否总能确定 y 与 x 之间是函数关系？

1.9 函数 $f(x)$ 满足什么条件时，下列式子才有意义？

1° $y=\dfrac{1}{f(x)}$， 2° $y=\sqrt[n]{f(x)}$，n 为偶数，

3° $y=\log_a f(x)$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$，

4° $y=\arcsin f(x)$。

1.10 求下列函数的定义域：

1° $y=\arcsin\dfrac{x-2}{3}$； 2° $=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$。

3° $y=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$。

1.11 问函数 $\lg(x^2)$ 与函数 $2\lg x$ 相同吗？

1.12 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$， 求 $f(0)$， $f(-x)$， $f(x+1)$，$f(x)+1$， $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$， $\dfrac{1}{f(x)}$。

1.13 设 $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x})$， 证明

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)。$$

1.14 设 $\varphi(x)=x^2$, $\psi(x)=2^x$, 求 $\varphi(\varphi(x))$, $\psi(\psi(x))$, $\varphi(\psi(x))$, $\psi(\varphi(x))$.

1.15 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$, 求 $f(x)$.

1.16 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & 当 -\infty<x\leqslant 0,\\ 2^x, & 当 \ 0<x<+\infty.\end{cases}$

求 $f(-2)$, $f(-1)$ $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.

1.17 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+x, & 当 \ x\leqslant 1,\\ x+5, & 当 \ x>1.\end{cases}$

求 $f(x+a)$, a 为常数.

*1.18 设 $\varphi(x)=\begin{cases}1, & 当 \ |x|\leqslant 1,\\ 0, & 当 \ |x|>1.\end{cases}$

$$\psi(x)=\begin{cases}2-x^2, & 当 |x|\leqslant 1,\\ 2, & 当 |x|>1.\end{cases}$$

求 (1) $\varphi(\varphi(x))$, (2) $\varphi(\psi(x))$, (3) $\psi(\varphi(x))$, (4) $\psi(\psi(x))$.

1.19 求下列函数的反函数:

1° $y=1+\lg(x+2)$; 2° $y=\dfrac{2^x}{1+2^x}$.

*1.20 求 $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ 的反函数.

(三) 例题分析

1.5 问 x^2 是不是 x 的函数?

答: 有人说如果写为 $y=x^2$, 它是 x 的函数, 而 x^2 因为没有变量 y, 所以它不是 x 的函数. 这样认识是不正确的. 事实上, 这里也有两个变量, 一个是 x, 另一个是 x^2, 对于变量 x 所考虑的每一个值, 变量 x^2 就有一个确定值与之对应. 这是符合函数的定义的, 所以 x^2 是 x 的函数. 这里 x^2 扮演了 y 的角色, 只不过没有写为 $y=x^2$ 罢了.

1.6 在函数的公式表示法中，一个函数是否只能是一个式子表示？

答：不，由于有些函数关系复杂，我们需要用多个式子来表示它，例如在考察一克冰由 $-10℃$ 上升到 $10℃$ 的水的过程中，我们研究它所吸收的热量 Q 与其温度 T 之间的关系时，就需要用多个式子表示，事实上，由于冰的热容量为 0.5，水的热容量为 1，一克 0℃ 的冰变为 0℃ 的水的溶解热为 80 卡，因此 Q 与 T 的关系为

$$Q=\begin{cases}0.5(T+10), & \text{当 } -10\leqslant T\leqslant 0,\\ T+85, & \text{当 } 0<T\leqslant 10.\end{cases}$$

这个函数是由两个式子表示的，它的对应规则是这样的：当 T 在 $[-10,0]$ 上变化时，Q 由式子 $0.5(T+10)$ 确定；当 T 在 $(0,10]$ 上变化时，Q 由式子 $T+85$ 确定。

这个例子告诉我们：有些函数的关系较为复杂需要用多个式子表示，此刻你不能理解为是多个函数，而应该理解为由多个式子表示的一个函数。

1.7 若变量 x 与 y 不能用公式表示其相互间的关系时，能否说 x 与 y 不存在函数关系？

答：不能这样讲。函数的表示法有三种：公式表示法；图形表示法；表格表示法。公式表示法只是其中一种。当函数关系不能用公式表示时，还可以用其它形式来表示。所以当变量 x 与 y 之间不能用公式表示时，就不能讲不存在函数关系，例如用自动记录仪记录了一天中气温 T 与时间 t 的关系的曲线，它表示了 T 与 t 的函数关系。但它很难用公式表示。

1.8 x 与 y 之间的一个方程，是否总能确定 y 与 x 之间是函数关系？

答：不，例如方程 $x^2+y^2+1=0$，在我们所考虑的实数范

围内x与y就不存在函数关系，这是因为对于任何x值（或y值）在实数范围内没有一个y值（或x值）能使$x^2+y^2+1=0$。

经过1.5，1.6，1.7，1.8四个问题的讨论，我们可以明确以下几点：

（1） 一个函数可以由几个式子来表示，不要把多个式子表示的一个函数，理解为多个函数。

（2） 函数的表示法有三种，公式表示法只是其中的一种，特别要注意，不要把由图形或表格表示的函数关系说成不是函数关系。

（3） x与y之间的一个方程不是总能确定x与y之间是函数关系。

1.9 函数$f(x)$满足什么条件时，下列式子才有意义？

1° $y=\dfrac{1}{f(x)}$； 2° $y=\sqrt[n]{f(x)}$，n为偶数；

3° $y=\log_a f(x)$ （$a>0$，且$a\neq 1$）；

4° $y=\arcsin f(x)$。

解： 1° $f(x)\neq 0$，

2° $f(x)\geqslant 0$，

3° $f(x)>0$，

4° $|f(x)|\leqslant 1$。

以上情形是求函数定义域的基础。

1.10 求下列函数的定义域：

1° $y=\arcsin\dfrac{x-2}{3}$； 2° $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$；

3° $y=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$。

1° 求函数$y=\arcsin\dfrac{x-2}{3}$的定义域。