三导丛书

线性代数

（同济·第四版）

导教·导学·导考

DAOJIAO DAOXUE DAOKAO

徐仲 陆全 编

- 考点研究
- 重要结论与公式
- 主要方法
- 常考题型及考研典型题精解
- 课后习题全解
- 学习效果两级测试题及答案

4

西北工业大学出版社

三导丛书

线性代数

（同济·第四版）

导教·导学·导考

徐仲　陆全　编

西北工業大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数(同济·第四版)导教·导学·导考/徐仲,陆全编.
—西安:西北工业大学出版社,2005.1
(三导丛书)
ISBN 7-5612-1851-6

Ⅰ.线… Ⅱ.①徐… ②陆… Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第118248号

出版发行: 西北工业大学出版社
通信地址: 西安市友谊西路127号 邮编:710072
电　　话: 029—88493844 88491757
网　　址: www.nwpup.com
印 刷 者: 陕西向阳印务有限公司
开　　本: 850 mm×1 168 mm 1/32
印　　张: 9.187 5
字　　数: 233千字
版　　次: 2005年1月第1版 2005年1月第1次印刷
定　　价: 13.00元

前 言

线性代数课程是高等学校普遍开设的一门重要的数学基础课。在全国统一命题的硕士研究生入学数学考试中，线性代数内容占25%左右(满分150分)。其中"数学一"含三小题、两大题，共30分;"数学二"含三小题、两大题，共33分;"数学三"和"数学四"均含三小题、两大题，共38分。

线性代数这门课程具有理论上的抽象性、逻辑推理的严密性和工程应用的广泛性。读者在学习线性代数时，往往感到抽象难懂，对基本概念及定理结论在理解上感到困难;对如何把所学内容具体应用到解题上感到缺少思路，难以下手;对于课程结束时的考试和考研的相关内容把握不准，迫切需要得到具体指导与帮助。本书就是为解决这些问题而编写的。

本书按照同济大学数学教研室编的最新版《线性代数》(第四版)的自然章编排，每一章由以下六部分内容构成:

一、考点研究——编写该部分的目的主要是使读者明确本章的重点、常考点以及应掌握的程度。编写中参考了《全国硕士研究生入学统一考试——数学考试大纲》和西北工业大学等国内重点高等学校制订的《线性代数教学大纲》，并将其内容加以细化和归纳，使学生能够正确把握教学、学习和考试的要求。

二、重要结论与公式——本部分将相应章节的内容进行了简明扼要的叙述、归纳和总结，部分内容列表或借助框图直观地进行了说明。对于有些内容未按章节顺序给出，这是由于线性代数的知识前后联系紧密，相互渗透，集中给出有利于加深读者对基本概念、公式、定理等重点内容的理解和正确应用。

三、主要方法——本部分给出了相应章节一些主要计算过程的描述，以使读者熟悉具体计算步骤，提高动手能力。

四、常考题型及考研典型题精解——精选了线性代数中具有代表性的部分典型例题，通过对典型例题的解题分析，归纳出线性代数中一些问题的解决方法和技巧，使读者可以举一反三、触类旁通。对于那些需要了解更多典型题的读者，可参阅《线性代数典型题分析解集》(第2版)(西北工业大学出版社，2000)。

五、课后习题全解——本部分给出了《线性代数》(同济大学第四版)各章习题的全部解答。由于线性代数中解题方法的多样性，对于具有多种解法或答案的习题，一般只给出一种解法或答案。

六、学习效果两级测试题及答案——本部分根据线性代数课程考试和考研内容，精选了适量的自测题，并附有答案和部分提示。读者可以通过这些测试题进一步掌握解题要领，巩固和加深对基本概念的理解，增强解决问题的能力，并检验自已对所学知识掌握的程度。

为了帮助读者了解并适应考试，书末附录中提供了两套线性代数课程考试真题及解答。建议读者在动手做过习题后，再参阅答案。

本书由徐仲、陆全分工合作完成。书中的疏漏和不妥之处，敬请读者指正。

编　者

2004年11月于西北工业大学

目　录

第一章 行 列 式

行列式是线性代数中的重要工具,在求解线性方程组、求逆矩阵、判断向量组的线性相关性、求矩阵的特征值、判断二次型的正定性等方面都要用到.

一、考 点 研 究

1. 考试内容与考试要求

考试内容	行列式的概念和基本性质　行列式按行(列)展开定理
考试要求	(1) 了解 n 阶行列式的概念,掌握行列式的性质. (2) 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式. (3) 会用克拉默(Cramer)法则.

2. 考点分析

行列式是代表某个数的一个记号. 计算行列式即是把这个记号所代表的数具体计算出来. 行列式的计算方法很多,技巧性较强,有关行列式的习题也可以编得很难,但这不一定是考点. 在考研试题的线性代数部分中,纯粹考行列式的题很少,且以低阶行列式的计算为主,少数的 n 阶行列式也容易计算. 因此,读者应该以熟悉行列式的性质、掌握行列式的基本计算方法为重点,对于 3,4

阶行列式能熟练计算，而一般 n 阶行列式计算只要适当要求即可，不必很难.

二、重要结论与公式

1. 排列的性质

性质 1	交换排列中任意两个数，将改变排列的奇偶性.
性质 2	n 个数 $1,2,\cdots,n$ 可以构成 $n!$ 个不同的 n 阶排列，其中奇、偶排列的个数各占 $\frac{n!}{2}$.
性质 3	任一 n 阶排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 与标准排列 $12\cdots n$ 都可以经过一系列对换互变，且所做对换的次数与排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 有相同的奇偶性.

2. 对角线法则

对于 2 阶与 3 阶行列式，可以采用对角线法则来记它们所代表的数：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underline{a_{11}a_{22}} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{a_{11}a_{22}a_{33}} + \underline{a_{12}a_{23}a_{31}} + \underline{a_{13}a_{21}a_{32}} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

即实线上 2 个（3 个）元素的乘积取正号，虚线上 2 个（3 个）元素的乘积取负号，再求其代数和就是行列式的值.

3. 一些特殊行列式的值

(1) 上（下）三角行列式等于其主对角线上元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

（2）次三角行列式的值等于次对角线元素的乘积并添加适当符号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

（3）分块三角行列式可化为低阶行列式的乘积

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & * & \cdots & * \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} * & \cdots & * & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{mn}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

(4) 范德蒙(Vandermonde)行列式直接套用公式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i - x_j) =$$

$$\begin{aligned} &(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\times \\ &(x_3 - x_2)\cdots(x_n - x_2)\times \\ &\cdots \quad \cdots \quad \times \\ &(x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

4. 行列式的基本性质

性质 1 行列式与其转置行列式的值相等.

性质 2 行列式中某一行(列)如果有公因数 k,则 k 可以提到行列式符号外. 特别地,若行列式中某行(列)元素全是零,则行列式的值为零.

性质 3 对换行列式中某两行(列)的位置,行列式的值改变符号. 特别地,如两行(列)元素对应相等或成比例,则行列式的值是零.

性质 4 如果行列式中某行(列)的每个元素都是两个数的和,则这个行列式可以拆成两个行列式的和,这两个行列式分别以

这两组数作为行(列),其余各行(列)与原行列式相同.

性质 5 把行列式某行(列)的 k 倍加至另一行(列),行列式的值不变.(在行列式计算中,往往先用这条性质作恒等变形,以期简化计算.)

5. 行列式按行(列)展开公式

设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,则

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

其中

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是 a_{ij} 的代数余子式.

6. 有关行列式的重要公式

行列式一行(列)元素与另一行(列)元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \qquad (i\neq j)$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \qquad (i\neq j)$$

7. Cramer 法则

定理　对于 n 个未知数 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

如果系数行列式 $D = |a_{ij}| \neq 0$，则方程组有惟一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中 D_j 是把 D 中第 j 列换成常数项所得到的行列式，即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

推论　含 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解（即无穷多解）的充分必要条件是它的系数行列式 $D = 0$.

注　该推论的充分性由克拉默法则即得，而必要性由第三章的齐次线性方程组有无穷多解的判定条件得到.

三、主 要 方 法

除了较简单的行列式可以利用定义直接计算外，一般行列式

计算的基本方法是：

方法一 利用行列式的性质对行列式做恒等变形化为上（下）三角行列式或次三角行列式，从而直接求得其值.

方法二 利用按行（列）展开定理降低行列式的阶数. 但在展开之前往往先通过对行列式恒等变形，使得新行列式的某一行（列）中有较多的零，再按该行（列）展开.

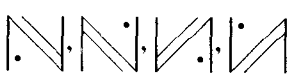
在计算行列式时，应根据行列式的特点和元素的规律性，采取适当的次序和步骤来进行，因此，首先观察和研究行列式元素的规律性是重要的.

计算行列式的常用技巧有三角化法、升阶（或加边）法、递推法、数学归纳法等.

四、常考题型及考研典型题精解

例 1－1 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ & a_2 & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & & & & a_n \end{vmatrix}$$

分析 对于形如的所谓两条线的行列式，可直接展开降阶，再利用三角或次三角行列式的结果直接

计算.

解　按第 1 列展开得

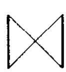
$$D_n = a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & a_n \end{vmatrix} +$$

$$b_n(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} b_1 & & & \\ a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$a_1a_2\cdots a_n + (-1)^{n+1}b_1b_2\cdots b_n$$

例 1 - 2　计算 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & c & d & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & c & & & & & d & \\ c & & & & & & & d \end{vmatrix}$$

分析　这是形如  的所谓两条线行列式,可直接展开得到递推公式.

解　按第 1 行展开得

$$D_{2n}=a\begin{vmatrix} a & & & & & b & 0 \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a & b & & & \\ & & c & d & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c & & & & & d & \\ 0 & & & & & & d \end{vmatrix}+$$

$$b(-1)^{1-2n}\begin{vmatrix} 0 & a & & & & & b \\ & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & a & b & & \\ & & & c & d & & \\ & & \iddots & & & \ddots & \\ & c & & & & & d \\ c & & & & & & 0 \end{vmatrix}=$$

$$ad\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}-$$

$$bc(-1)^{(2n-1)+1}\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}=$$

$$(ad-bc)D_{2n-2}$$