纯粹数学与应用数学专著 第1号

# 数论在近似分析中的应用

华罗庚 王 元 著

科学出版社

纯粹数学与应用数学专著 第1号

# 数论在近似分析中的应用

华罗庚 王 元 著

科 学 出 版 社

1 9 7 8

## 内 容 简 介

本书是作者对"数论在近似分析中的应用"这一新兴的应用数学分支，集国内外二十年的最新成果，从理论与使用两个方面进行的一个总结。本书可供数论理论研究工作者及实际数值计算工作者参考。

纯粹数学与应用数学专著 第 1 号

**数论在近似分析中的应用**

华罗庚 王 元著

*

科学出版社出版
北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1978年10月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1978年10月第一次印刷 印张：8 插页：精 2
印数：精：1—50,050 平：1—94,150 字数：208,000

统一书号：13031・808
本社书号：1156・13—1

定价：布面精装 1.75 元 平 装 1.00 元

# 序

数论是最古老的数学分支之一．但是数论在近似分析问题上系统的应用研究，则还只有二十年历史．这显然是由于电子计算机的发展与应用的结果,从而使人们的思想与眼界比过去开阔了．例如,由于计算工具的落后,关于数值积分的研究,几个世纪以来,常常局限于单重积分的数值计算问题．直至五十年代，多重积分近似计算的研究，才如雨后春笋般的发展起来．数论方法也是研究多重积分近似计算的重要方法之一．

本书所介绍的数论方法是用来研究多变数的近似分析问题的．简而言之，首先用数论方法构造出高维立方体中的一致分布点集贯,然后将这一点集贯用于高维近似分析问题,即利用它将一个连续性的问题化为离散性的问题来处理．例如要计算一个高维立方体上的定积分，我们就用事先选定的一致分布点集上的被积函数值构成的单和来逼近多重积分．在被积函数适合一定的条件下，逼近的误差主阶是与维数无关的． 有时甚至是臻于至善的．值得一提的是可以证明用古典方法得到的高维数值积分公式，误差的主阶是与维数有关的．当维数稍大时，误差便很大而无法使用．所谓 Monte Carlo 方法得到的误差,虽然亦与维数无关,但却是概率意义的误差,而不是普通意义的误差．当然,也可以利用一致分布点集贯来构造逼近多变数周期函数的三角多项式；利用它来构造近似计算某类积分方程解的代数方程组等等．

数论中的不少重要原理与方法,例如同余式论,指数和的估计方法,丢番图逼近论与代数数论中的一些重要结果,都可以有效地用来构造高维一致分布点集贯．这些近似分析中的数论方法基本上都产生于五十年代末． 例如，借助于某种完整三角和的估计，Коробов, Н. М.[1] (1957)定义了高维空间所谓的方幂点集贯．借助于孙子定理，Halton, J. H.[1] (1960)推广了 Van der Corput, J.

G.[1] 点列，利用 $r$ 进位小数定义了高维空间的一致分布点集贯. Коробов, Н. М.[2] (1959) 与 Hlawka, E.[3] (1962) 独立地定义了所谓的完全佳格点点集贯. Бахвалов, Н. С.[1] (1959) 与 Haselgrove, C. B.[1] (1961) 独立地定义了适合某些丢番图不等式的高维空间佳点贯. 关于利用实分圆域的独立单位组来构造高维空间一致分布点集贯的思想，是华罗庚与王元[1]于 1960 年发表的. 关于这一方法在近似分析问题上的应用及理论探讨见华罗庚与王元 [4, 5, 6, 7, 8]. 在 1974 年，华罗庚与王元[6,7]还提出了用 PV 数的极小多项式构造的递推公式来定义高维空间一致分布点集贯的方法. 经过二十年，无论在实际应用上，还是在理论上，这些方法都取得了很好的成果. 因此在理论上对这一新兴的近似分析分支进行一次总结，使数论理论研究工作者及实际数值计算工作者，皆能更易于了解这一分支的内容，也许会有一些方便之处. 这就促使我们来撰写这样一本小册子.

本书所需的数论知识，除华罗庚《数论导引》的若干章节外，还需几条更深的数论定理，关于这些定理的证明，本书提供了参考资料，以供查阅. 除引 5.1 外，其余定理只与个别章节有关. 书末附有"格点点集表"，以供从事实际工作时查阅. 本书的参考资料，仅限于与书中所涉及的内容相关的部分. 其他有关重要资料，关于多重积分近似计算问题，请参看 Haber, S. [1] 与 Stroud, A. H. [1]. 关于一致分布理论及应用，请参看 Kuiper, L. 与 Niederreiter, H. [1].

在我们工作的近二十年中，曾先后得到过何祚庥、冯康、徐钟济、万庆萱、王光寅、徐峰与魏公毅等同志的热情支持与大力帮助，我们还不断收到读者来信，对我们的工作提出了很多宝贵意见. 我们谨在此致以最衷心的感谢.

最后，限于作者水平，书中缺点与错误一定不少. 我们衷心希望这本小册子问世后，能得到更多的批评指教.

华罗庚　王　元

1976 年 5 月 5 日完稿，　1977 年 11 月 29 日修改



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

# 目　　录

# 第一章　代数数与有理逼近

## §1. 代数数域的单位

命 $\alpha$ 是一个 $s$ 次代数数，则代数数域 $\mathscr{F}_s = R(\alpha)$ 是 $\alpha$ 的有理系数多项式所演出的域。

对于 $\mathscr{F}_s$ 中的一个数 $\xi(=\xi^{(1)})$，命 $\xi^{(1)}, \cdots, \xi^{(s)}$ 表示其全体共轭数．假定 $\omega_1, \cdots, \omega_s$ 是 $\mathscr{F}_s$ 的整底．作方阵

$$\Omega = (\omega_j^{(i)}),\quad 1 \leqslant i, j \leqslant s,$$

则方阵

$$S = \Omega'\Omega = \left(\sum_{k=1}^{s} \omega_i^{(k)} \omega_j^{(k)}\right),\quad 1 \leqslant i,\ j \leqslant s$$

称为 $\mathscr{F}_s$ 的基方阵．显然基方阵是有有理整元素的方阵．在模群作用下，基方阵的不变性是表示代数数域的一个特征．S 的行列式 $\Delta = \det S$ 称为域的基数．

假定 $s = r_1 + 2r_2$．在 $\alpha$ 的共轭数中，$\alpha, \alpha^{(2)}, \cdots, \alpha^{(r_1)}$ 是实的，$\alpha^{(r_1+1)}, \cdots, \alpha^{(r_1+r_2)}$ 是复的，而且 $\alpha^{(r_1+r_2+1)} = \overline{\alpha^{(r_1+1)}}, \cdots, \alpha^{(r_1+2r_2)} = \overline{\alpha^{(r_1+r_2)}}$．因此对于任何 $\xi \in \mathscr{F}_s$，常有

$$\xi^{(r_1+r_2+i)} = \overline{\xi^{(r_1+i)}},\quad 1 \leqslant i \leqslant r_2.$$

换言之，对于任何 $\xi$，在 $\xi$ 的共轭数中，最多有 $r_1 + r_2$ 个不同的绝对值

$$|\xi^{(1)}|, \cdots, |\xi^{(r_1)}|, |\xi^{(r_1+1)}|, \cdots, |\xi^{(r_1+r_2)}|.$$

记 $r = r_1 + r_2$．命

$$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{r-1}$$

为 $\mathscr{F}_s$ 的一组单位．若

$$\det(\log|\varepsilon_j^{(i)}|) \neq 0,\ 2 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant r-1,$$

则称 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{r-1}$ 为 $\mathscr{F}_s$ 的一个独立单位组。

由熟知的 Dirichlet 定理可知 $\mathscr{F}_s$ 中必存在一个独立单位组（见 Fricke, R. [1]）。

今后用 $c(f, g, \cdots)$ 表示仅与 $f, g, \cdots$ 有关之正常数，但不一定代表同一数值，不再声明。

本节将证明

**定理 1.** 命 $\gamma_1, \cdots, \gamma_r$ 为任意一组满足

$$\sum_{i=1}^{r_1} \gamma_i + \sum_{i=r_1+1}^{r} 2\gamma_i = 0 \tag{1}$$

之实数，则存在单位 $\eta \in \mathscr{F}_s$ 适合于

$$c^{-1}e^{\gamma_i} \leqslant |\eta^{(i)}| \leqslant ce^{\gamma_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant r, \tag{2}$$

此处 $c = c(\mathscr{F}_s)$。

证. 命 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{r-1}$ 为 $\mathscr{F}_s$ 的一个独立单位组，且命

$$\xi^{(i)} = \varepsilon_1^{(i)a_1} \cdots \varepsilon_{r-1}^{(i)a_{r-1}}, \quad i = 1, 2, \cdots, r$$

及 $c = e^a$，此处

$$a = 2^{-1} \max_{1 \leqslant i \leqslant r} \left( \sum_{j=1}^{r-1} |\log |\varepsilon_j^{(i)}|| \right), \tag{3}$$

则得

$$\prod_{i=1}^{r_1} |\xi^{(i)}| \prod_{j=1}^{r_2} |\xi^{(r_1+j)}|^2 = \prod_{k=1}^{r-1} \left( \prod_{i=1}^{r_1} |\varepsilon_k^{(i)}| \prod_{j=1}^{r_2} |\varepsilon_k^{(r_1+j)}|^2 \right)^{a_k} = 1. \tag{4}$$

解线性方程组

$$a_1 \log |\varepsilon_1^{(i)}| + \cdots + a_{r-1} \log |\varepsilon_{r-1}^{(i)}| = \gamma_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant r. \tag{5}$$

方程组(5)中共有 $r-1$ 个变数 $a_1, \cdots, a_{r-1}$，$r$ 个方程. 由于

$$\det(\log |\varepsilon_j^{(i)}|) \neq 0, \quad 2 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant r-1,$$

所以除 $i = 1$ 所对应的方程外有唯一的解. 由 (1), (4) 可知这一解适合于 $i = 1$ 所对应的方程.

命 $b_k$ 是最接近于 $a_k$ 的整数，则

$$|b_k - a_k| \leqslant \frac{1}{2}, \quad 1 \leqslant k \leqslant r-1.$$



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

定义单位

$$\eta(=\eta^{(1)}) = \varepsilon_1^{b_1}\cdots\varepsilon_{r-1}^{b_{r-1}}.$$

今往验证 $\eta$ 适合条件 (2). 由 (3), (5) 可知

$$\left|\log|\eta^{(i)}| - \log|\xi^{(i)}|\right| = \left|\log|\eta^{(i)}| - \gamma_i\right|$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{r-1}|b_k - a_k|\left|\log|\varepsilon_k^{(i)}|\right| \leqslant a.$$

故得 (2) 式. 定理证完.

特别对于实代数数域 $\mathscr{F}_s$, 取 $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_2 = \cdots = \gamma_r = \bar{\gamma}$, 则条件 (2) 变为

$$\gamma + (s-1)\bar{\gamma} = 0 \quad 或 \quad \bar{\gamma} = -\frac{\gamma}{s-1}.$$

故由定理 1 推出

**定理 2.** 假定 $\alpha$ 为 $s$ 次实代数数,则对于任意实数 $\gamma$,皆存在 $\eta \in \mathscr{F}_s$ 使

$$c^{-1}e^{\gamma} \leqslant |\eta| \leqslant ce^{\gamma} \tag{6}$$

与

$$c^{-1}e^{-\frac{\gamma}{s-1}} \leqslant |\eta^{(i)}| \leqslant ce^{-\frac{\gamma}{s-1}}, \quad i = 2, \cdots, s, \tag{7}$$

此处 $c = c(\mathscr{F}_s)$.

特别取 $\gamma = 1, 2, \cdots$ 时, 则由定理 2 可知实域中存在绝对值趋于无穷的单位贯,其共轭数都差不多大,所谓差不多大者是指相差一个只与域 $\mathscr{F}_s$ 有关的常数倍数.

附记.

在(6)中我们不妨假定 $\eta > 0$, 否则可以取 $-\eta$ 代替 $\eta$.

## §2. 整底的有理逼近

命 $\mathscr{F}_s$ 为实代数数域, 则由定理 1.2 (即 §1, 定理 2) 可知 $\mathscr{F}_s$ 中有递增的单位贯 $\eta_l (l = 1, 2, \cdots)$ 适合于

$$\eta_l > l, \ |\eta_l^{(i)}| \leqslant c(\mathscr{F}_s)\eta_l^{-\frac{1}{s-1}}, \quad 2 \leqslant i \leqslant s. \tag{1}$$

命

$$n_l = \sum_{i=1}^{s} \eta_l^{(i)} \tag{2}$$

及

$$h_j^{(l)} = \sum_{i=1}^{s} \eta_i^{(l)} \omega_i^{(j)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant s, \tag{3}$$

则 $n_l$ 与 $h_j^{(l)}(1 \leqslant j \leqslant s)$ 都是有理整数.

本节将证明

**定理 1.** 命 $\eta_l(l = 1, 2, \cdots)$ 为适合于(1)的单位贯,$(n_l, h_1^{(l)}, \cdots, h_s^{(l)})\,(l = 1, 2, \cdots)$ 为由(2), (3)定义的有理整数组贯,则有整底的有理逼近式

$$\left|\frac{h_i^{(l)}}{n_l} - \omega_i\right| \leqslant c(\mathscr{F}_s) n_l^{-1-\frac{1}{s-1}}, \quad 1 \leqslant i \leqslant s. \tag{4}$$

证. 为简单计,略去指标 $l$. 由(1), (2), (3)可知

$$n = \eta + O(\eta^{-\frac{1}{s-1}}) = \eta + O(n^{-\frac{1}{s-1}}) = \eta(1 + O(n^{-1-\frac{1}{s-1}}))$$

与

$$h_j = \eta\omega_i + O(\eta^{-\frac{1}{s-1}}) = \eta\omega_j(1 + O(n^{-1-\frac{1}{s-1}})).$$

所以

$$\frac{h_l}{n} = \omega_j(1 + O(n^{-1-\frac{1}{s-1}}))(2 + O(n^{-1-\frac{1}{s-1}}))^{-1}$$

$$= \omega_j + O(n^{-1-\frac{1}{s-1}}), \quad 1 \leqslant j \leqslant s,$$

其中与"$O$"有关的常数仅依赖于 $\mathscr{F}_s$. 定理证完.

今往求出 $n$ 与 $h_j(1 \leqslant j \leqslant s)$ 的表达式. 将 $\eta$ 表为

$$\eta = \sum_{j=1}^{s} k_j \omega_j, \tag{5}$$

此处 $k_j(1 \leqslant j \leqslant s)$ 为有理整数. 由(5)及其共轭式子得

$$(\eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(s)}) = (k_1, \cdots, k_s)\Omega', \tag{6}$$

因而

$$(\eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(s)})\Omega = (k_1, \cdots, k_s)\mathrm{S} = (h_1, \cdots, h_s). \tag{7}$$

又命

$$\sum_{j=1}^{s} a_j \omega_j = 1, \tag{8}$$

则

$$n=\sum_{i=1}^{s}\eta^{(i)}\sum_{j=1}^{s}a_j\omega_i^{(j)}=\sum_{j=1}^{s}a_j\sum_{i=1}^{s}\eta^{(i)}\omega_i^{(j)}=\sum_{j=1}^{s}a_jh_j. \quad (9)$$

因此由 (5), (7), (8), (9) 即可得对应于 $\eta$ 的有理整数组 $(n, h_1, \cdots, h_s)$.

附记.

1. 在以上讨论中,并不需要假定 $\omega_i(1\leqslant i\leqslant s)$ 为整底, 只要 $\omega_i(1\leqslant i\leqslant s)$ 为 $\mathscr{F}_s$ 的一组基底, 而单位 $\eta$ 又可以表为 $\omega_i(1\leqslant i\leqslant s)$ 的有有理整系数的线性表达式即可.

2. 算出有理整数组 $(n, h_1, \cdots, h_s)$, 仅需 $c(\mathscr{F}_s)\log n$ 次初等运算.

3. 由 Schmidt, W. M. 定理(见 Schmidt, W. M.[1,2])可知(4)之右端已不允许作本质改进, 即 $n^{-1-\frac{1}{s-1}}$ 不能换为 $n^{-1-\frac{1}{s-1}-\varepsilon}$, 此处及以后 $\varepsilon$ 皆表示任意给定正数,所以由这里给出的整底 $\omega_i(1\leqslant i\leqslant s)$ 的有理逼近有最佳的误差阶. 但是我们在这里并没有考虑(4)的右端的常数因子 $c(\mathscr{F}_s)$ 的最佳问题. 显然由证明过程可见 $c(\mathscr{F}_s)$ 与独立单位组的选取有关. 除此而外, 还与整底 $\omega_i(1\leqslant i\leqslant s)$ 的选取有关. 命

$$\lceil\omega\rceil=\max_{1\leqslant i,\ j\leqslant s}|\omega_i^{(j)}|,$$

则 (4) 之右端与整底的关系应为 $O(\lceil\omega\rceil n^{-1-\frac{1}{s-1}})$.

我们猜想在基数最小的实代数数域中, 可以选取适当的单位与整底使逼近有最好的常数.

4. 关于寻求适合于 (4) 的整数贯 $(n_l, h_1^{(l)}, \cdots, h_s^{(l)})$ $(l=1, 2, \cdots)$ 的问题, 当 $s=2$ 时, 即用熟知的连分数展开方法(见华罗庚[1]第十章); 当 $s>2$ 时, 经典方法则一般只能证明存在无限多个整数组 $(n_l, h_1^{(l)}, \cdots, h_s^{(l)})$ 使 (4) 成立 (见华罗庚 [1] 第二十章), 却不能给出具体定出 $(n_l, h_1^{(l)}, \cdots, h_s^{(l)})$ 的可行算法. 在此介绍的方法说明, 只要知道实代数数域的一个独立单位组, 即可以得到域的整底的最佳有理逼近式. 我们将在以下几节给出实代数数

域整底有理逼近的具体例子.

## §3. 实分圆域

命 $p$ 为一个素数 $\geqslant 5$ 及 $s=\frac{1}{2}(p-1)$. 习知方程

$$x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1=0 \tag{1}$$

是有理数域 $R$ 上的既约方程(见华罗庚 [1] 第一章). 它的根为 $e^{\frac{2\pi il}{p}}(1\leqslant l\leqslant p-1)$. 作代换

$$x+x^{-1}=y \quad 或 \quad x=\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}, \tag{2}$$

则得

$$1+\sum_{\nu=1}^{s}\left(\left(\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}\right)^{\nu}+\left(\frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}\right)^{\nu}\right)=0. \tag{3}$$

由方程(1)的既约显然导出方程(3)亦是既约的. 方程(3)的根为

$$2\cos\frac{2\pi l}{p},\quad 1\leqslant l\leqslant s. \tag{4}$$

所以域 $\mathscr{R}_s=R\left(\cos\frac{2\pi}{p}\right)$为 $s$ 次完实代数数域(当 $\alpha$ 及其共轭数都是实代数数时,我们称 $R(\alpha)$ 为完实代数数域). (4) 为它的一组基底. 我们称 $\mathscr{R}_s$ 为 $s$ 次实分圆域.

易知

$$\sum_{l=1}^{s}2\cos\frac{2\pi l}{p}=-1, \tag{5}$$

又由(3)可知

$$(-1)^s\prod_{l=1}^{s}\left(2\cos\frac{2\pi l}{p}\right)=1+\sum_{\mu=1}^{\left[\frac{s}{2}\right]}\frac{(-4)^{\mu}}{2^{2\mu-1}}$$

$$=1+2\sum_{\mu=1}^{\left[\frac{s}{2}\right]}(-1)^{\mu}=(-1)^{\left[\frac{s}{2}\right]},$$

所以

$$\prod_{l=1}^{s}\left(2\cos\frac{2\pi l}{p}\right)=(-1)^{\left[\frac{1}{2}(s+1)\right]}=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}, \qquad (6)$$

因此 $2\cos\frac{2\pi l}{p}$ $(1\leqslant l\leqslant s)$ 都是域 $\mathscr{R}_s$ 的单位.

命 $g$ 表示 mod $p$ 的一个原根. 由于

$$2\cos\frac{2\pi}{p}g^{l\pm s}=2\cos\left(-\frac{2\pi}{p}g^l\right)=2\cos\frac{2\pi}{p}g^l, \qquad (7)$$

所以(4)可以写为

$$\omega_l=2\cos\frac{2\pi}{p}g^l,\quad 1\leqslant l\leqslant s. \qquad (8)$$

又由(7)可以扩大足码范围,定义 $\omega_{l\pm s}=\omega_l$.

变换

$$\sigma:\ \omega_l\to\omega_{l+1},\quad 1\leqslant l\leqslant s, \qquad (9)$$

是实分圆域的一个自同构. 一共有 $s$ 个自同构

$$\sigma,\sigma^2,\cdots,\sigma^{s-1},\sigma^s(=\sigma^0=1). \qquad (10)$$

它们组成自同构群. $\mathscr{R}_s$ 中的一个数 $\xi(=\xi^{(1)})$, 经这 $s$ 个自同构变换,得到它的 $s$ 个共轭数 $\xi^{(1)},\cdots,\xi^{(s)}$.

作方阵

$$\Omega=(\omega_{i+j}),\quad 1\leqslant i,j\leqslant s. \qquad (11)$$

由于

$$\sum_{k=1}^{s}4\cos\frac{2\pi lk}{p}\cos\frac{2\pi mk}{p}=\sum_{k=1}^{s}\left(2\cos\frac{2\pi(l+m)k}{p}+2\cos\frac{2\pi(l-m)k}{p}\right)=\begin{cases}p-2, & 当\ l=m,\\ -2, & 当\ l\neq m,\end{cases}$$

所以

$$S=\Omega'\Omega=pI-2M, \qquad (12)$$

这儿 I 为单位方阵及 $M=(m_{ij})$, 其中 $m_{ij}=1$.

取 $\mathscr{R}_s$ 的一个独立单位组 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{s-1}$, 且诸 $\varepsilon_l(1\leqslant l\leqslant s-1)$ 都可以表为 $\omega_1,\cdots,\omega_s$ 的有理整系数的线性表达式(我们将在下节讨论 $\mathscr{R}_s$ 的单位), 则由定理 1.2 的方法构造单位贯

$$\eta_l = \varepsilon_1^{a_1^{(l)}} \cdots \varepsilon_{s-1}^{a_{s-1}^{(l)}}, \quad l = 1, 2, \cdots \tag{13}$$

满足

$$\eta_l > l, \quad |\eta_l^{(i)}| \leqslant c\eta_l^{-\frac{1}{s-1}}, \quad 2 \leqslant i \leqslant s, \tag{14}$$

此处 $c = c(\mathscr{R}_s) > 0$。

若

$$\eta_l = \sum_{i=1}^{s} k_i^{(l)} \omega_i, \tag{15}$$

则由

$$(h_1^{(l)}, \cdots, h_s^{(l)}) = (k_1^{(l)}, \cdots, k_s^{(l)})(p\mathrm{I} - 2\mathrm{M})$$

得出

$$h_i^{(l)} = pk_i^{(l)} - 2\sum_{j=1}^{s} k_j^{(l)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant s, \tag{16}$$

又由(5)得

$$n_l = -\sum_{j=1}^{s} k_j^{(l)} = -\sum_{j=1}^{s} h_j^{(l)}. \tag{17}$$

**定理 1.** 命 $(n_l, h_1^{(l)}, \cdots, h_s^{(l)})$ $(l = 1, 2, \cdots)$ 为由满足(14)的单位贯 $\eta_l (l = 1, 2, \cdots)$ 及(15), (16), (17)定义的整数组贯,则得有理逼近式

$$\left| \frac{h_j^{(l)}}{n_l} - \omega_j \right| < c(\mathscr{R}_s) n_l^{-1-\frac{1}{s-1}}, \quad 1 \leqslant j \leqslant s. \tag{18}$$

记 $c_1^{(l)} = 1$, $c_j^{(l)} = h_j^{(l)} (2 \leqslant j \leqslant s)$. 由于 $\mathscr{R}_2 = R\left(\cos\frac{2\pi}{5}\right) = R(\sqrt{5})$, 所以将整数组贯 $(n_l, c_1^{(l)}, \cdots, c_s^{(l)})$ $(l = 1, 2, \cdots)$看作是普通 Fibonacci 贯的推广,这种推广保有最佳有理逼近式(18)。

## §4. 实分圆域的单位

命 $g$ 为 mod $p$ 的原根,则习知

$$\rho_l = \frac{\sin\frac{\pi}{p} g^{l+1}}{\sin\frac{\pi}{p} g^l}, \quad 1 \leqslant l \leqslant s-1 \tag{1}$$



此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com