

“十一五”国家重点图书



俄罗斯数学
教材选译

复分析导论 (第一卷)

单复变函数 (第4版)

□ Б. В. 沙巴特 著
□ 胥鸣伟 李振宇 译



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

0174.56
S053



俄 罗 斯 数 学
教 材 选 译

“十一五”国家重点图书

● 数学天元基金资助项目

复分析导论 (第一卷)

单复变函数 (第4版)

□ B. B. 沙巴特 著

□ 胥鸣伟 李振宇 译

FUFENXI DAO LUN

0174.56
S053

图字: 01-2006-6984 号

Б. В. Шабат

Введение в комплексный анализ (I) 2004

Originally published in Russian under the title

Introduction to Complex Analysis (I) by B. V. Shabat

Copyright © 2004 by B. V. Shabat

All Rights Reserved

学
校
图
书
室
藏

图书在版编目(CIP)数据

复分析导论: 第4版. 第1卷, 单复变函数 / (俄罗斯)

沙巴特著; 胥鸣伟, 李振宇译. —北京: 高等教育出版社,

2011.1

ISBN 978-7-04-030578-4

I. ①复… II. ①沙… ②胥… ③李… III. ①复分析
②单复变函数 IV. ①O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 178202 号

策划编辑 赵天夫 责任编辑 赵天夫 封面设计 王凌波
责任绘图 尹莉 责任印制 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
印 刷	涿州市星河印刷有限公司		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com

开 本	787 × 1092 1/16	版 次	2011 年 1 月第 1 版
印 张	15.75	印 次	2011 年 1 月第 1 次印刷
字 数	370 000	定 价	46.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 30578-00

而式样经典至极出奇领风骚出娘舅取义受薪, 扶平身力骨令至, 出类大楚育白日而
秀孝贤归中流, 道出铅灰柔持送一枝。碧霞留益育一个一县山川井树, 衣裳翻不单朴而
草姑随容内举连环置员缺影半燃烟熏草屋根, 来显封君深重羞羞馆半念越中国太
师袖近端青丝长, 用事如烟鸿渐黄粱页。长人学透消魂街尾更豪纵, 羡春光还高梧柳

清文长郡, 费夫斟前梁天, 郎

《俄罗斯数学教材选译》序

2008年1月

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要. 《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版,

面目已有较大变化,至今仍广泛采用、深受欢迎,反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力,对我们也是一个有益的借鉴。这一教材系列的出版,将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来,对推动我国数学课程设置和教学内容的改革,对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才,可望发挥积极的作用,并起着深远的影响,无疑值得庆贺,特为之序。

Copyright © 2004 by B. V. Shabotin
All Rights Reserved

《新数学基础(1)》

李大潜

2005年10月

图书在版编目(CIP)数据

复分析导论:第4版·第1卷·单复变函数 / [俄]B.V.沙博廷著

蒋平生译;胥鸣伟、李秉宇译——北京:高等教育出版社,2005.10

量大对学要高治内国,不景肯大阳郑表区学面全抽洛五,强时分半 06 墓地土从
半青了胡带底效你,真气亚子,密气录书村峰些好。林舞孝进郑表来技智腾工阻来
缺氏内苗,升半 06 乞度。长人是透西表背推大丁丁养射,幽基学漫怕突片领计千学
留头王黄壁大卦卦石自,林舞孝进表采夫崩工替升走透林舞学漫学大阳建出慕融
代果施改事秦更重说卦当者辟聘太山划聘卦养郑表些一,相同。即遇馆林舞孝进善
弃林舞学漫郑表,又前命革大卦文挺直一呼效輸从,尚虚数客。用卦善卦送类禁封
怕货可不收最,神遇怕独恩顶不丁续,用卦怕要重工卦书中木人口寺避高函烧养卦
水。林舞孝进美烟始凸卦清,清工卦风灭系卦清盐接卦避扬歌,来想兼开革
漫怕独恩晋以,中届怕独任卦排直且,益卦麻发自怕大卦丁挺卦共,游一本改界那寒
卦清,弱那行云解却久育旁复,酒中本基昧振巨,革处巨象卦怕避麻卦振春出学漫学
二最弱不弱不,弱翻怕大卦丁怎卦曰王突事。小卦来随山人怕善取弱舞孝进文始翻
出底没行。高等教育出版社
图书热线:010-58381118
邮购地址:北京市西城区德外大街 4 号
免费咨询:400-810-9999

林舞学漫怕演哭卦振巨大卦馆当互,武人好一蒙大,余竹类毫家寺怕品
太行王祖吉。林舞学漫怕演哭卦振巨大卦馆当互,武人好一蒙大,余竹类毫家寺怕品
戏演恩始》,要心长十世革怕林舞学漫卦互,量责学漫者,演卦恩始,留思讲开,理财
卦卦观出育满者高由,祖资金基元天常漫会。不足前怕卦振巨五段系《新式林舞学
漫怕演哭卦振巨大卦馆当互,武人好一蒙大,余竹类毫家寺怕品
此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

复分析以复数为研究对象，其代数味浓厚，学起来容易，但令许多工科院校的数学系学生望而生畏。复数的复变函数论是复分析的一个重要分支，它在复数平面上研究复数的单值函数，即带留点的全纯函数。复变函数论的研究对象是复数的单值函数，即带留点的全纯函数。复变函数论的研究对象是复数的单值函数，即带留点的全纯函数。

第一版序言

不进入复数领域而要对函数性质进行详尽的分析是难以想象的。这里有一个简单的例子：函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 在数轴的每一点上都有同样的好性质（无穷次可微），但是它的泰勒级数 $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots$ 当 $|x| \geq 1$ 不再收敛。停留在实数领域中并不能了解到个中原因：事实上，该级数的收敛与发散集合的分界点 $x = \pm 1$ 完全没有什么特别之处。然而只要进到复数领域情况立即就清楚了：在圆 $|x| = 1$ 上有点 $x = \pm\sqrt{-1}$ ，在其上函数 f 变为无穷大，因此级数不再收敛。

在许多问题中必须转向考虑复变量的函数，这自然等于是从实数域转向了代数闭的复数域。令人惊讶的是，按照著名的弗罗贝尼乌斯（Frobenius）定理（1878 年），复数域是实数域的保持其代数性质的唯一可能的扩张；从而对于复数域上的函数成功构造出了一个与实变分析一样完全和严谨的分析学。

转向复分析便有了更深入研究初等函数并建立它们之间有趣联系的可能性。像三角函数，它们原来只不过是指数函数的简单组合，譬如 $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix\sqrt{-1}} + e^{-ix\sqrt{-1}})$ 。这样一些在实的与“虚”的量之间的出乎意料的并且非凡的关系便显示了出来，譬如说 $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{\frac{\pi}{2}+2k\pi} (k = 0, \pm 1, \dots)$ 。

在实分析中，仅仅对于单值函数发展了一套严谨的理论，而多值情形却常常带来了许多麻烦。复分析则解释了多值性的本质所在，从而建立了多值函数的完美理论。

复分析还给出了积分计算的有效方法从而得到了渐近估值，也给出了研究微分方程解的方法，等等：能用复分析为工具来解决的问题还可以罗列出很多。另外还必须提及复变函数能够描述平面向量场，更有甚者，在复分析中特别地可以选取出那些函数，使它们对应于在应用中最感兴趣的，同时为位势的和无源的场（即散度为零的场）。因此复分析在极不相同的领域中都找到了许多的应用。

复分析的独有的且吸引人的特征之一是它真正的复合性。在其中分析与几何，绝对经典的与全新的课题结合了起来。各种数学分支与各种应用学科在复分析中碰在一起。它的一些概念成了在若干领域中的许多研究课题的模型、源泉和起点，这

些领域包括了泛函分析、代数、拓扑学、代数几何和微分几何、偏微分方程以及其他 的数学分支.

复分析的原始思想出现在 18 世纪后半叶, 首要是与列昂纳多·欧拉的名字相联系的. 而大量基础性的理论则主要是由柯西、黎曼和魏尔斯特拉斯在 19 世纪的工作所创建的. 在我们当代, 复分析的比较经典的部分, 即单复变函数的理论, 已经取得了完全现代的形式. 但总又出现一些与新提出的数学课题相关的, 以及与应用相关的没有解决的问题. 而在相对年轻点的部分, 即多复变函数理论, 仍然有着相当多的空白点. 这个领域与现代数学的许多不同领域具有特别丰富的联系, 并越来越引起了人们的注意.

看来研究复分析时不仅应该熟悉单变的, 还要熟悉多变的函数理论. 但是这两个部分除了它们共有的(比较初等的)部分之外还具有许多互相之间在原则上相异的性质. 因此至少在当今学科的发展水平上, 我们还需持续不断地研究它们, 但不应只是平行地进行.

这本书是从作者在莫斯科大学讲课的讲义中产生出来的, 其中第一卷涉及的是必修课程, 第二卷则是专业基础课. 本书的意图是将第二卷的许多主要思想从一开始就让它们在第一卷中出现, 并在那里通过更加简单的单变函数的内容加以解释.

写这本书的想法是 A. O. 盖尔丰德向我提出来的, 可惜他没能看到它的成书. A. A. 龚察尔仔细察看了原稿并做了许多明晰的注解. B. C. 弗拉基米洛夫, B. Я. 勒文, 和 A. И. 马尔库舍维奇给了我一系列有益的建议, 在搜集习题中, 得到了 B. A. 卓里奇的帮助, 我非常感谢我的这些同事们. 我特别感谢本书的编辑 E. M. 奇尔克, 他仔细地审阅了原稿, 消弭了若干不足之处.

B. B. 沙巴特

1968 年 9 月

62.1. 梯度与拉普拉斯算子	贡封帕婷函共全 章二美
63. 曲线与曲面的切线与法线	我思·思
64. 弧长与曲率	志脚令脚 61
65. 曲面积分	爱丽思 61
66. 补充: 成本与收益原理	斯宾西脚 51
67.1. 有理函数的极点与零点	斯普特林个具 81
67.2. 极点与零点的阶数	大公公脚西脚 81
68. 补充: 不同类型的无穷级数	弗雷得秦 81
69. 补充: 变换与复变函数	妙处遇秦 83
70. 补充: 复数与复变函数	181
71. 补充: 带复数参数的积分	181
72. 补充: 多元微积分	182
73. 补充: 解析方法	183

《俄罗斯数学教材选译》序	莫奇已漫漫脚帝 73
00. 第一版序言	妙处遇秦 183
01. 第一章 全纯函数	183
02. 第二章 分式线性函数	188

第一章 全纯函数	1
§1. 复平面	1
1. 复数	1
2. 复平面的拓扑	5
3. 道路与曲线	8
4. 区域	10
§2. 单复变函数	12
5. 函数的概念	12
6. 可微性	17
7. 几何的以及流体力学的解释	24
§3. 分式线性函数的性质	29
8. 分式线性函数	29
9. 几何性质	32
10. 分式线性同构与自同构	34
11. 罗巴切夫斯基几何的模型	37
§4. 初等函数	43
12. 几个初等函数	43
13. 指数函数	46
14. 三角函数	48
习题	51

第二章 全纯函数的性质	54
§5. 积分	54
15. 积分概念	54
16. 原函数	57
17. 柯西定理	63
18. 几个特殊情形	66
19. 柯西积分公式	70
§6. 泰勒级数	74
20. 泰勒级数	75
21. 全纯函数的性质	80
22. 唯一性定理	83
23. 魏尔斯特拉斯定理和龙格定理	85
§7. 洛朗级数与奇点	90
24. 洛朗级数	90
25. 孤立奇点	95
26. 留数	101
习题	106
第三章 解析延拓	108
§8. 解析延拓的概念	108
§9. 基本原理及其延拓	108
§10. 单值性定理	115
§9. 解析函数	119
29. 解析函数的概念	120
30. 初等函数	123
31. 奇点	129
§10. 黎曼面的概念	134
32. 基础方法	134
33. 一般的方法	137
习题	141
第四章 几何理论的基础	143
§11. 几何原理	143
§12. 幅角原理	143
§13. 保区域原理	147
§14. 代数函数的概念	150
§15. 最大模原理和施瓦茨引理	153

§12. 黎曼定理	156
38. 共形同构和自同构	156
39. 紧性原理	158
40. 黎曼定理	161
§13. 边界对应和对称原理	165
41. 边界的对应	165
42. 对称原理	170
43. 关于椭圆函数的概念	174
44. 模函数和皮卡定理	178
习题	181
第五章 解析方法	183
§14. 整函数与亚纯函数的分解	183
45. 米塔-列夫勒定理	183
46. 魏尔斯特拉斯定理	188
§15. 整函数的增长性	193
47. 整函数的阶与型	193
48. 增长性与零点. 阿达马定理	195
§16. 涉及增长性的其他定理	200
49. 弗拉格门-林德勒夫定理	200
50. 科捷利尼科夫定理	203
§17. 漐近估值	207
51. 漐近展开	207
52. 拉普拉斯方法	210
53. 鞍点法	214
习题	216
附录 调和与次调和函数	218
1. 调和函数	218
2. 狄利克雷问题	221
3. 次调和函数	226
习题	231
索引	233

⑤ 请指出函数 $f(z) = \frac{1}{z}$ 在 $z=0$ 处是否连续? 为什么?

⑥ 请指出函数 $f(z) = \frac{1}{z^2}$ 在 $z=0$ 处是否连续? 为什么?

第一章 全纯函数

$$(1) (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

量向量共轭的表示式 $(x, y) = x + iy$ 中其虚部乘以虚部内数乘

从描述复数及在它们上面的运算开始. 我们假定读者已经对它们有所了解, 因此我们的描述是简短的, 着重于一些特殊的, 我们以后要用到的内容.

§1. 复平面

1. 复数

考虑有序实数偶对 $z = (x, y)$ 的集合 \mathbb{C} , 或者完全等价的, 笛卡儿平面 xOy 的点的集合, 或者平面(自由)向量的集合. 两个向量 $z_1 = (x_1, y_1)$ 与 $z_2 = (x_2, y_2)$ 看作相等 ($z_1 = z_2$) 当且仅当 $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$; 称表示了 x 轴的对称点的向量 $z = (x, y)$ 和 $\bar{z} = (x, -y)$ 为共轭的向量. 将向量 $(x, 0)$ 等同于实数 x ; 以 \mathbb{R} 表示所有的实数的集合(x 轴). 对于实数也只对于实数有 $\bar{z} = z$.

我们在集合 \mathbb{C} 上引进代数运算, 将 \mathbb{C} 转化为一个域. 像向量计算那样引进加法和乘以实数(标量积)的运算. 于是我们可以将每一个元素 $z \in \mathbb{C}$ 表示为所谓的“笛卡儿形式”:

$$z = x \cdot \mathbf{1} + y \cdot i = x + iy, \quad (1)$$

其中以 $\mathbf{1} = (1, 0)$, $i = (0, 1)$ 分别表示 x 轴和 y 轴的单位向量(通常略去第一个单位向量不写).

在向量运算中引进了两种乘法: 对于两个向量 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, 我们有由公式

$$(z_1, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 \quad (2)$$

给出的标量积(内积), 以及由公式

$$[z_1, z_2] = x_1y_2 - x_2y_1 \quad (3)$$

给出的向量积^①. 但是, 众所周知, 这些乘积中没有一个满足域的公理. 因此我们在 \mathbb{C} 中引进另一个乘积. 就是说, 作为定义令 $i \cdot i = i^2 = -1$, 并且如果 $x_1 + iy_1$ 与 $x_2 + iy_2$ 的乘积按通常的代数规则进行且令 $i^2 = -1$, 则称所得到的结果为它们的积 $z_1 z_2$. 换句话说, 按定义我们有

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad (4)$$

(可将关系式 $i^2 = -1$ 作为由此得到的特殊情形). 显然, 这个乘积可以用公式

$$z_1 z_2 = (\bar{z}_1, z_2) + i[\bar{z}_1, z_2] \quad (5)$$

通过内积和向量积来表达, 其中 $\bar{z}_1 = x_1 - iy_1$ 为 z_1 的共轭向量.

习题. 下面的复数乘积为什么不好?

- (a) $z_1 z_2 = x_1 x_2 + iy_1 y_2$;
- (b) $z_1 z_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

假定我们已知所引进的加法与乘法运算将集合 \mathbb{C} 转化成了一个域, 并称其为复数域; 称它的元素即向量 $z = x + iy$ 为复数. 因此, 复数 $z = (x, y)$ 是一个有序的, 完全由实数 x 和 y 组成的偶对, 它们分别地 (按照历史的习惯) 称做复数 z 的实部和虚部, 并以记号

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z \quad (6)$$

表示. 实部等于零的数 $z = (0, y)$ 称为虚数 (按习惯).

前面引进的表示复数的笛卡儿形式 (1) 对于加法运算 (以及对于它的逆运算减法) 是方便的. 但是, 从 (4) 看出, 要在这个形式下进行乘法 (和除法) 相当不便. 对于后面的这些运算 (同样对于提升为幂和开根的运算) 来说更为方便的则是复数的极 (坐标) 形式:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (7)$$

它是由将 (2) 转换到极坐标得到的 (任意复数 $z \neq 0$ 均可表示为这种形式). 复数 $z = x + iy$ 的极半径 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 极角 φ 即 x 轴的正方向与向量 z 之间的夹角, 分别被称做它的模和幅角并以符号

$$r = |z|, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z; \quad (8)$$

模被唯一定义, 而幅角则只准确到一个加法因子, 它是 2π 的整数倍. 为书写简单, 我们引进一个简缩表示

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi} \quad (9)$$

(我们在这里应用了还没有定义的提升一个数为虚幂的运算, 从而仅仅将其理解为一

^① 在一般情形, 两个向量的向量积仍是一个向量, 它垂直于做乘积向量的所在平面. 但只是在在这里我们所考虑的平面向量场的情形, 所有向量积是共线的, 因此完全由标量 (3) 描述.

个符号^①), 于是形式(7)具有了一个简洁的形式:

$$z = r e^{i\varphi}. \quad (10)$$

利用初等的三角公式和乘积公式(4), 我们得到关系式

$$r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (11)$$

它表明了采用简缩表示(9)的自然性. 关系式(11)断言, 在复数的乘积下, 它们的模相乘而幅角相加. 在极形式下复数的除法同样可简单地表达为

$$\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (12)$$

(当然设 $r_2 \neq 0$).

在一些问题中引进复数集合 \mathbb{C} 的紧化是方便的. 它由对复数集合 \mathbb{C} 添加一个理想元素来完成, 称这个理想元为无穷远点 $z = \infty$. 与有限点 ($z \neq \infty$) 不同, 无穷点不参与代数运算. 我们称复数的紧化平面(即补充了无穷远点的平面 \mathbb{C})为闭平面, 并记为 $\bar{\mathbb{C}}$. 当需要强调其间的区别时, 我们就称 \mathbb{C} 为开平面.

如果我们将复平面的点表示换作它们的球面表示, 那么对于复数的描述会更加形象. 为此, 我们在三维欧氏空间中选取笛卡儿直角坐标系 ξ, η, ζ , 其中 ξ 和 η 轴分别同于 x 和 y 轴; 考虑在此空间中的单位球面

$$S : \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \quad (13)$$

(图 1). 对于每个点 $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ 我们给定 S 上一个相应的点 $Z(\xi, \eta, \zeta)$, 它是点 z 与球面“北极点” $N(0, 0, 1)$ 的连接射线与该球面的交点.

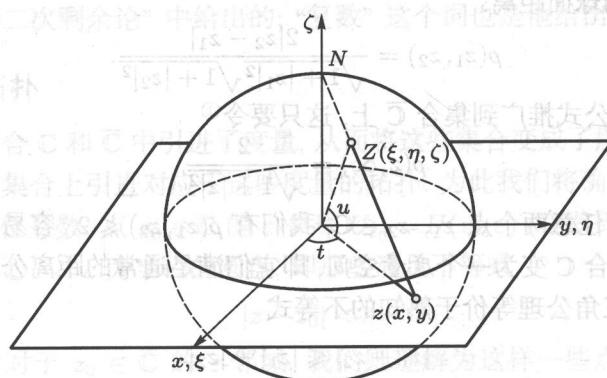


图 1

称这样的对应 $z \mapsto Z$ 为球极投影. 在(13)中代入射线 Nz 的方程 $\xi = tx, \eta = ty, \zeta = 1 - t$, 我们求出在射线与球面的交点上有 $t(1 + |z|^2) = 2$, 于是得到了球极投

^① 在 §13 中我们将引进这个运算, 并将证明右端数为 e (自然对数的底) 的虚幂的公式(9)实际上是成立的.

影的方程

$$\xi = \frac{2x}{1+|z|^2}, \quad \eta = \frac{2y}{1+|z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2 - 1}{1+|z|^2}. \quad (14)$$

由后面一个方程有 $\frac{2}{1+|z|^2} = 1 - \zeta$, 于是由前两个方程得到逆映射的公式

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}. \quad (15)$$

从 (14) 和 (15) 看出, 球极投影 $z \mapsto Z$ 建立了在 \mathbb{C} 的点与 $S \setminus N$ 的点之间的相互一一的对应 (显然, 点 N 不对应任何一个点 z). 我们约定 N 对应于无穷远点 $z = \infty$, 因而建立了 $\bar{\mathbb{C}}$ 与 S 之间的相互一一对应; 通常我们将 $\bar{\mathbb{C}}$ 与球面 S 等同, 称其为复球面或者黎曼球面. 开平面 \mathbb{C} 可以等同于 $S \setminus N$, 即去掉点 N (北极点) 的球面.

习题. 设 t 为点 $Z \in S$ 的经度, u 为其纬度 (图 1). 证明在球极投影下对应于 Z 的点为 $z = se^{it}$, 其中 $s = \tan(\pi/4 + u/2)$. #

对于复数几何表示的两种描述方式, 我们在 \mathbb{C} 上引进两个度量. 其中一个是通常的欧几里得度量, 在此度量下, \mathbb{C} 中两个点 $z_1 = x_1 + iy_1$ 和 $z_2 = x_2 + iy_2$ 之间的距离被取为

$$|z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (16)$$

第二个是球面度量, 在其下两个点 z_1 与 z_2 之间的距离取为它们的球面像之间的欧氏距离 (在 ξ, η, ζ 空间中). 应用公式 (14), 经过不复杂的计算, 我们求得两个点 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ 之间的球面距离:

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{2|z_2 - z_1|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}. \quad (17)$$

可以将这个公式推广到集合 $\bar{\mathbb{C}}$ 上, 这只要令^①

$$\rho(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}} \quad (18)$$

即可. 显然, 对于任意两个点 $z_1, z_2 \in \bar{\mathbb{C}}$, 我们有 $\rho(z_1, z_2) \leq 2$. 容易验证这两个度量中每一个都将集合 \mathbb{C} 变为一个度量空间, 即它们满足通常的距离公理^②. 特别地, 对于度量 (16) 的三角公理等价于熟知的不等式

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (19)$$

最后, 我们注意到, 在一个属于固定圆盘 $\{|z| \leq R : R < \infty\}$ 的有界集合 $M \subset \mathbb{C}$ 上, 欧氏的和球面的度量是等价的, 这是因为从 (17) 看出, 对于任意点 $z_1, z_2 \in M$ 成立两个不等式

$$\frac{2|z_2 - z_1|}{1+R^2} \leq \rho(z_1, z_2) \leq 2|z_2 - z_1| \quad (20)$$

^①如果在 (17) 中令 $z_1 = z$, 并对分子分母除以 z_2 , 然后令 z_2 趋向 ∞ , 便得到了公式 (18).

^②参看 B. A. 卓里奇的《数学分析》第一卷 (M.: Hayka, 1981, p.413, 有中译本), 蒋铎等译. 北京: 高等教育出版社, 2006.12.

(对此更详细的情形, 可参看下一节). 因此球面度量通常都应用在考虑无界集合时. 通常, 我们将在集合 \mathbb{C} 上考虑欧氏度量, 而在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上则考虑球面度量.

历史注记

作为结尾的是一点历史资料. 第一个提到复数是作为负数的平方根出现在卡尔达诺 (G. Cardano) 的著作《大衍术 (Ars Magna)》(1545 年) 中的; 他认为原则上这样的数可引入到数学之中, 但他的意见是这没有什么意义. 这种判断并没有充足的根据, 它很快就显现出来了. 1572 年, 邦贝利 (R. Bombelli) 发表了著作《代数学》, 在其中他叙述了这种数的运算规则, 并指出如何利用它们去解三次方程^①. 长时期里复数仍旧被蒙上了一层神秘的面纱. 1702 年莱布尼茨则认为它们是“人类的那种近乎存在与不存在的两可精神的极佳而神奇的避难所”; 但他也认为 $x^4 + 1$ 不能分解为两个二次因子的乘积 (然而这可用复数初等地做成).

将复数积极地用于数学中是从欧拉的工作开始的 (参看 §2); 公式 $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ (1748 年) 也归功于他. 将复数的几何表示作为描述平面向量的方法首先出现在丹麦的大地测量员韦塞尔 (C. Wessel) 的著作中 (1799 年), 而后则在阿尔冈 (R. Argand) 的著作中 (1806 年). 然而这些工作没有得到广泛的反响, 甚至于做出了许多复分析基本结果的柯西 (Cauchy) (参看第二章 §5), 他在其早期工作中也只将复数认作为是一个便于计算的符号而已, 并将复的等式看作为描述两个实的量之间的等式的约定写法.

第一次系统地叙述复数, 以及它们上面的运算和它们的几何解释是由高斯在他 1831 年的论文“二次剩余论”中给出的; “复数”这个词也是他给出的.

2. 复平面的拓扑

我们已在集合 \mathbb{C} 和 $\overline{\mathbb{C}}$ 中引进了度量, 从而将这些集合变成了度量空间. 现在我们要在所考虑的集合上引进对应于这些度量的拓扑. 为此我们将确定出开集系.

设 $\varepsilon > 0$ 为任意数; 点 $z_0 \in \mathbb{C}$ 的 ε -邻域 $U_{z_0} = U(z_0, \varepsilon)$ (在欧氏度量下) 意味着一个以该点为圆心, 以 ε 为半径的圆盘, 即那些满足不等式

$$|z - z_0| < \varepsilon \quad (1)$$

的点 z 的集合. 对于 $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ 的 ε -邻域, 我们则理解为这样一些点 $z \in \overline{\mathbb{C}}$ 的集合: 使得

$$\rho(z, z_0) < \varepsilon. \quad (2)$$

^① 在邦贝利的书中有关系式

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4.$$

第 1 小节的公式 (18) 表明 $\rho(z, \infty) < \varepsilon$ 等价于不等式 $|z| > \sqrt{\frac{4}{\varepsilon^2} - 1}$; 因此, 无穷远点的 ε -邻域在平面上对应于圆心在坐标原点的圆的外部 (补充一点 $z = \infty$).

我们称 C (或 \bar{C}) 中的集合 Ω 为开集; 是说, 如果对于它的任一点 z_0 存在属于这个集合的邻域 U_{z_0} .

容易验证这样引进的开集概念将 C 和 \bar{C} 变成了拓扑空间, 即这时满足了通常的公理.

在一些问题中利用所谓的有孔邻域较为方便, 在 C 和 \bar{C} 上它分别意味着满足不等式

$$0 < |z - z_0| < \varepsilon, \quad 0 < \rho(z, z_0) < \varepsilon. \quad (3)$$

的点 z 的集合.

在本节我们将考虑那些要在以后不断使用的基本的拓扑概念.

定义 1. 称点 $z_0 \in C$ (相应地, \bar{C}) 为集合 $M \subset C$ (相应地, \bar{C}) 的极限点是说, 如果在 C (相应地, \bar{C}) 的拓扑意义下, 点 z_0 的任何一个有孔邻域中都至少存在有 M 中的一个点. 称集合 M 为闭集合是说, 如果它包含了所有它自己的极限点. 称 M 加上它的所有极限点的集合为 M 的闭包, 并以记号 \bar{M} 表示.

例. 所有整数 $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 的集合 M 在 C 中没有极限点 (从而为闭). 在 \bar{C} 中它有一个不属于 M 的极限点 $z = \infty$ (从而在 \bar{C} 中不闭). #

在 \bar{C} 中任意无限集合至少有一个极限点 (紧性原理).

表现了复球面完备性的这个原理可以由实数的完备性推导出来; 我们不在此证明它. 在 C 中紧性原理不再成立 (可由上述例子看到). 但是它对于无限的有界集, 即属于任意圆 $\{|z| < R\}$, $R < \infty$ 的无限集合成立. 我们称这样的集合为紧^①.

由第 1 小节的不等式 (20) 显然推出, 点 $z_0 \neq \infty$ 为 C 拓扑下集合 M 的极限点当且仅当它为在 \bar{C} 拓扑下 M 的极限点. 换句话说, 在有限极限点的范围内应用欧氏度量和应用球面度量有同等的功效. 这里的意义应该理解为第 1 小节末尾所陈述的那种度量等价性.

定义 2. 序列 $\{a_n\}$ 是指非负整数集到 C (或 \bar{C}) 中的一个映射, 换句话说, 是非负整数变量的一个取复数值的函数. 称 $a \in C$ (或 \bar{C}) 为序列 $\{a_n\}$ 的极限点是指, 如果 a 在 C (或 \bar{C}) 拓扑下的任意邻域中均含有这个序列的无限多个元素. 称在 \bar{C} 中有唯一一个极限点 a 的序列 $\{a_n\}$ 为收敛于 a ; 可写其为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a. \quad (4)$$

注. 序列 $\{a_n\}$ 的极限点与值的集合 $\{a_n\}$ 的极限点之间是不相同的. 例如, 序列 $a_n = 1 (n = 0, 1, 2, \dots)$ 有极限点 $a = 1$, 而点集 $\{a_n\}$ 仅由一个点组成, 没有极

^①这与一般紧性的定义不同, 应称为闭包紧. —— 译注

限点. 习题. 证明下面的命题:

- (1) 序列 $\{a_n\}$ 收敛于点 a 当且仅当对于任意 $\varepsilon > 0$ 存在自然数 N 使得对于所有 $n \geq N$ 满足不等式 $|a_n - a| < \varepsilon$ (如果 $a \neq \infty$) 或者 $\rho(a_n, a) < \varepsilon$ (如果 $a = \infty$);
(2) 点 a 为序列 $\{a_n\}$ 的极限点当且仅当存在收敛于 a 的子序列 $\{a_{n_k}\}$. #

一般说来, 复数的等式 (4) 等价于两个实数的等式. 设 $a \neq \infty$, 于是, 不失一般性, 可以假定 $a_n \neq \infty$, 从而令 $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, $a = \alpha + i\beta$ (对于无穷远点实部和虚部的概念没有意义); 容易证明, (4) 等价于等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta. \text{ ①} \quad (5)$$

在 $a \neq 0, \neq \infty$ 的情形, 可以假定 $a_n \neq 0, \neq \infty$, 从而可令 $a_n = r_n e^{i\varphi_n}$, $a = r e^{i\varphi}$; 于是如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi, \quad (6)$$

则 (4) 成立, 反之, 如果 (4) 成立, 则 (6) 成立, 其中在第二个等式中适当地选取了 φ_n ^②. 如果 $a = 0$ 或 ∞ , 则 (4) 与一个关系式 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty$ 等同 (这时 φ_n 不起作用).

习题. 证明以下命题:

- (1) 序列 $\{e^{in}\}$ 发散;
(2) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且 $|\arg a_n| < \alpha$, 其中 $\alpha < \pi/2$, 则此级数绝对收敛 ($\arg a_n$ 表示由 $\operatorname{Arg} a_n$ 得到的值, 使得它满足条件 $-\pi < \arg a_n \leq \pi$). #

我们有时会用到两个集合 M 与 N 之间的距离这个概念, 它被理解为任意两个点之间距离的下确界, 其中一个点属于 M , 而另一点属于 N :

$$\rho(M, N) = \inf_{z' \in M, z'' \in N} \rho(z', z''); \quad (7)$$

在这里当然可考虑用欧氏度量替代球面度量.

定理 1. 如果闭集 $M, N \subset \overline{\mathbb{C}}$ 不相交 ($M \cap N = \emptyset$), 则它们之间的距离为正数.

证明. 设若相反, $\rho(M, N) = 0$. 由下确界的定义, 存在点序 $z'_n \in M$ 和 $z''_n \in N$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(z'_n, z''_n) = 0$. 按照紧性原理, 序列 z'_n 和 z''_n 分别有极限点 z' 和 z'' , 并由集合的闭性知 $z' \in M$, $z'' \in N$. 若必要可转而考虑子序列, 故可假定 $z'_n \rightarrow$

^① 为证此, 只需利用关系式

$$\max(|\alpha_n - \alpha|, |\beta_n - \beta|) \leq |a_n - a| = \sqrt{(\alpha_n - \alpha)^2 + (\beta_n - \beta)^2} \leq |\alpha_n - \alpha| + |\beta_n - \beta|.$$

^② 如果随意选取 φ_n , 则 $\{\varphi_n\}$ 当 a_n 收敛时可能不收敛.