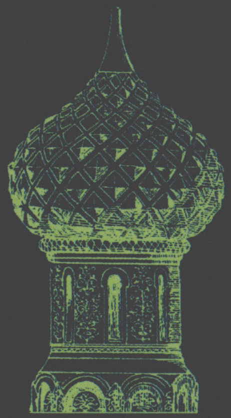

"十一五"国家重点图书

俄罗斯数学
教材选译

复分析导论(第一卷)

单复变函数 (第4版)

□ Б. В. 沙巴特 著
□ 胥鸣伟 李振宇 译

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

"十一五"国家重点图书

● 数学天元基金资助项目

俄罗斯数学教材选译

复分析导论（第一卷）

单复变函数（第4版）

□ Б. В. 沙巴特 著

□ 胥鸣伟 李振宇 译

FUFENXI DAOLUN

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图字: 01–2006–6984 号

Б. В. Шабат
Введение в комплексный анализ (I) 2004

Originally published in Russian under the title
Introduction to Comple Analysis (I) by B. V. Shabat

图书在版编目(CIP)数据

复分析导论: 第 4 版. 第 1 卷, 单复变函数 / (俄罗斯)沙巴特著; 胥鸣伟, 李振宇译. —北京: 高等教育出版社, 2011.1

ISBN 978-7-04-030578-4

Ⅰ.①复…　Ⅱ.①沙…②胥…③李…　Ⅲ.①复分析②单复变函数　Ⅳ.①O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 178202 号

策划编辑　赵天夫　**责任编辑**　赵天夫　**封面设计**　王凌波
责任绘图　尹　莉　**责任印制**　陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	400-810-0598
邮政编码	100120	网　址	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
经　销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
印　刷	涿州市星河印刷有限公司		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开　本	787 × 1092　1/16	版　次	2011 年 1 月第 1 版
印　张	15.75	印　次	2011 年 1 月第 1 次印刷
字　数	370 000	定　价	46.00 元

物料号 30578-00

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要. 《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版,

面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

第一版序言

不进入复数领域而要对函数性质进行详尽的分析是难以想象的. 这里有一个简单的例子: 函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 在数轴的每一点上都有同样的好性质 (无穷次可微), 但是它的泰勒级数 $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots$ 当 $|x|\geqslant 1$ 不再收敛. 停留在实数领域中并不能了解到个中原因: 事实上, 该级数的收敛与发散集合的分界点 $x=\pm 1$ 完全没有什么特别之处. 然而只要进到复数领域情况立即就清楚了: 在圆 $|x|=1$ 上有点 $x=\pm\sqrt{-1}$, 在其上函数 f 变为无穷大, 因此级数不再收敛.

在许多问题中必须转向考虑复变量的函数, 这自然等于是从实数域转向了代数闭的复数域. 令人惊讶的是, 按照著名的弗罗贝尼乌斯 (Frobenius) 定理 (1878 年), 复数域是实数域的保持其代数性质的唯一可能的扩张; 从而对于复数域上的函数成功构造出了一个与实变分析一样完全和严谨的分析学.

转向复分析便有了更深入研究初等函数并建立它们之间有趣联系的可能性. 像三角函数, 它们原来只不过是指数函数的简单组合, 譬如 $\cos x=\frac{1}{2}\left(e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}\right)$. 这样一些在实的与“虚”的量之间的出乎意料的并且非凡的关系便显示了出来, 譬如说 $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}=e^{\frac{\pi}{2}+2k\pi}\ (k=0,\pm 1,\cdots)$.

在实分析中, 仅仅对于单值函数发展了一套严谨的理论, 而多值情形却常常带来了许多麻烦. 复分析则解释了多值性的本质所在, 从而建立了多值函数的完美理论.

复分析还给出了积分计算的有效方法从而得到了渐近估值, 也给出了研究微分方程解的方法, 等等: 能用复分析为工具来解决的问题还可以罗列出很多. 另外还必须提及复变函数能够描述平面向量场, 更有甚者, 在复分析中特别地可以选取出那些函数, 使它们对应于在应用中最感兴趣的, 同时为位势的和无源的场 (即散度为零的场). 因此复分析在极不相同的领域中都找到了许多的应用.

复分析的独有的且吸引人的特征之一是它真正的复合性. 在其中分析与几何, 绝对经典的与全新的课题结合了起来. 各种数学分支与各种应用学科在复分析中碰在了一起. 它的一些概念成了在若干领域中的许多研究课题的模型、源泉和起点, 这

些领域包括了泛函分析、代数、拓扑学、代数几何和微分几何、偏微分方程以及其他的数学分支.

复分析的原始思想出现在 18 世纪后半叶, 首要是与列昂纳多 · 欧拉的名字相联系的. 而大量基础性的理论则主要是由柯西、黎曼和魏尔斯特拉斯在 19 世纪的工作所创建的. 在我们当代, 复分析的比较经典的部分, 即单复变函数的理论, 已经取得了完全现代的形式. 但总又出现一些与新提出的数学课题相关的, 以及与应用相关的没有解决的问题. 而在相对年轻点的部分, 即多复变函数理论, 仍然有着相当多的空白点. 这个领域与现代数学的许多不同领域具有特别丰富的联系, 并越来越引起了人们的注意.

看来研究复分析时不仅应该熟悉单变的, 还要熟悉多变的函数理论. 但是这两个部分除了它们共有的 (比较初等的) 部分之外还具有许多互相之间在原则上相异的性质. 因此至少在当今学科的发展水平上, 我们还需持续不断地研究它们, 但不应只是平行地进行.

这本书是从作者在莫斯科大学讲课的讲义中产生出来的, 其中第一卷涉及的是必修课程, 第二卷则是专业基础课. 本书的意图是将第二卷的许多主要思想从一开始就让它们在第一卷中出现, 并在那里通过更加简单的单变函数的内容加以解释.

写这本书的想法是 A. O. 盖尔丰德向我提出来的, 可惜他没能看到它的成书. A. A. 龚察尔仔细察看了原稿并做了许多明晰的注解. B. C. 弗拉基米洛夫, Б. Я. 勒文, 和 A. И. 马尔库舍维奇给了我一系列有益的建议, 在搜集习题中, 得到了 B. A. 卓里奇的帮助, 我非常感谢我的这些同事们. 我特别感谢本书的编辑 E. M. 奇尔克, 他仔细地审阅了原稿, 消弭了若干不足之处.

Б. В. 沙巴特

1968 年 9 月

目 录

第一章 全纯函数

从描述复数及在它们上面的运算开始. 我们假定读者已经对它们有所了解, 因此我们的描述是简短的, 着重于一些特殊的, 我们以后要用到的内容.

§1. 复平面

1. 复数

考虑有序实数偶对 $z=(x,y)$ 的集合 $\mathbb{C}$, 或者完全等价的, 笛卡儿平面 xOy 的点的集合, 或者平面 (自由) 向量的集合. 两个向量 $z_1=(x_1,y_1)$ 与 $z_2=(x_2,y_2)$ 看作相等 ($z_1=z_2$) 当且仅当 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$; 称表示了 x 轴的对称点的向量 $z=(x,y)$ 和 $\bar{z}=(x,-y)$ 为共轭的向量. 将向量 $(x,0)$ 等同于实数 x; 以 $\mathbb{R}$ 表示所有的实数的集合 (x 轴). 对于实数也只对于实数有 $\bar{z}=z$.

我们在集合 $\mathbb{C}$ 上引进代数运算, 将 $\mathbb{C}$ 转化为一个域. 像向量计算那样引进加法和乘以实数 (标量积) 的运算. 于是我们可以将每一个元素 $z\in\mathbb{C}$ 表示为所谓的"笛卡儿形式":

$$z=x\cdot\mathbf{1}+y\cdot i=x+iy, \tag{1}$$

其中以 $\mathbf{1}=(1,0)$, $i=(0,1)$ 分别表示 x 轴和 y 轴的单位向量 (通常略去第一个单位向量不写).

在向量运算中引进了两种乘法: 对于两个向量 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, 我们有由公式

$$(z_1,z_2)=x_1x_2+y_1y_2 \tag{2}$$

给出的标量积 (内积), 以及由公式

$$[z_1,z_2]=x_1y_2-x_2y_1 \tag{3}$$

给出的向量积①. 但是, 众所周知, 这些乘积中没有一个满足域的公理. 因此我们在 $\mathbb{C}$ 中引进另一个乘积. 就是说, 作为定义令 $i\cdot i=i^2=-1$, 并且如果 x_1+iy_1 与 x_2+iy_2 的乘积按通常的代数规则进行且令 $i^2=-1$, 则称所得到的结果为它们的积 z_1z_2. 换句话说, 按定义我们有

$$z_1z_2=x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1) \tag{4}$$

(可将关系式 $i^2=-1$ 作为由此得到的特殊情形). 显然, 这个乘积可以用公式

$$z_1z_2=(\bar{z}_1,z_2)+i[\bar{z}_1,z_2] \tag{5}$$

通过内积和向量积来表达, 其中 $\bar{z}_1=x_1-iy_1$ 为 z_1 的共轭向量.

习题. 下面的复数乘积为什么不好?

(a) $z_1z_2=x_1x_2+iy_1y_2$;

(b) $z_1z_2=x_1x_2+y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1)$.

假定我们已知所引进的加法与乘法运算将集合 $\mathbb{C}$ 转化成了一个域, 并称其为复数域; 称它的元素即向量 $z=x+iy$ 为复数. 因此, 复数 $z=(x,y)$ 是一个有序的, 完全由实数 x 和 y 组成的偶对, 它们分别地 (按照历史的习惯) 称做复数 z 的实部和虚部, 并以记号

$$x=\operatorname{Re} z,\quad y=\operatorname{Im} z \tag{6}$$

表示. 实部等于零的数 $z=(0,y)$ 称为虚数 (按习惯).

前面引进的表示复数的笛卡儿形式 (1) 对于加法运算 (以及对于它的逆运算减法) 是方便的. 但是, 从 (4) 看出, 要在这个形式下进行乘法 (和除法) 相当不便. 对于后面的这些运算 (同样对于提升为幂和开根的运算) 来说更为方便的则是复数的极 (坐标) 形式:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi), \tag{7}$$

它是由将 (2) 转换到极坐标得到的 (任意复数 $z\neq 0$ 均可表示为这种形式). 复数 $z=x+iy$ 的极半径 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, 极角 φ 即 x 轴的正方向与向量 z 之间的夹角, 分别被称做它的模和幅角并以符号

$$r=|z|,\quad \varphi=\operatorname{Arg} z; \tag{8}$$

模被唯一定义, 而幅角则只准确到一个加法因子, 它是 2π 的整数倍. 为书写简单, 我们引进一个简缩表示

$$\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi} \tag{9}$$

(我们在这里应用了还没有定义的提升一个数为虚幂的运算, 从而仅仅将其理解为一

①在一般情形, 两个向量的向量积仍是一个向量, 它垂直于做乘积向量的所在平面. 但只是在这里我们所考虑的平面向量场的情形, 所有向量积是共线的, 因此完全由标量 (3) 描述.

个符号①), 于是形式 (7) 具有了一个简洁的形式:

$$z = re^{i\varphi}. \tag{10}$$

利用初等的三角公式和乘积公式 (4), 我们得到关系式

$$r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{11}$$

它表明了采用简缩表示 (9) 的自然性. 关系式 (11) 断言, 在复数的乘积下, 它们的模相乘而幅角相加. 在极形式下复数的除法同样可简单地表达为

$$\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \tag{12}$$

(当然设 $r_2 \neq 0$).

在一些问题中引进复数集合 $\mathbb{C}$ 的**紧化**是方便的. 它由对复数集合 $\mathbb{C}$ 添加一个理想元素来完成, 称这个理想元为*无穷远点* $z = \infty$. 与有限点 $(z \neq \infty)$ 不同, 无穷点不参与代数运算. 我们称复数的紧化平面 (即补充了无穷远点的平面 $\mathbb{C}$) 为*闭平面*, 并记为 $\overline{\mathbb{C}}$. 当需要强调其间的区别时, 我们就称 $\mathbb{C}$ 为*开平面*.

如果我们将复平面的点表示换作它们的**球面**表示, 那么对于复数的描述会更加形象. 为此, 我们在三维欧氏空间中选取笛卡儿直角坐标系 ξ, η, ζ, 其中 ξ 和 η 轴分别同于 x 和 y 轴; 考虑在此空间中的单位球面

$$S: \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \tag{13}$$

(图 1). 对于每个点 $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ 我们给定 S 上一个相应的点 $Z(\xi, \eta, \zeta)$, 它是点 z 与球面"北极点" $N(0, 0, 1)$ 的连接射线与该球面的交点.

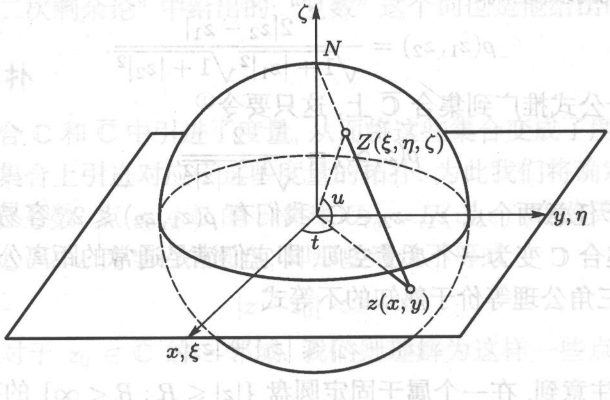

图 1

称这样的对应 $z \mapsto Z$ 为*球极投影*. 在 (13) 中代入射线 Nz 的方程 $\xi = tx$, $\eta = ty$, $\zeta = 1 - t$, 我们求出在射线与球面的交点上有 $t(1 + |z|^2) = 2$, 于是得到了球极投

①在 §13 中我们将引进这个运算, 并将证明右端数为 e (自然对数的底) 的虚幂的公式 (9) 实际上是成立的.

影的方程

$$\xi=\frac{2x}{1+|z|^2},\quad \eta=\frac{2y}{1+|z|^2},\quad \zeta=\frac{|z|^2-1}{1+|z|^2}. \tag{14}$$

由后面一个方程有 $\frac{2}{1+|z|^2}=1-\zeta$, 于是由前两个方程得到逆映射的公式

$$x=\frac{\xi}{1-\zeta},\quad y=\frac{\eta}{1-\zeta}. \tag{15}$$

从 (14) 和 (15) 看出, 球极投影 $z\mapsto Z$ 建立了在 $\mathbb{C}$ 的点与 $S\setminus N$ 的点之间的相互一一的对应 (显然, 点 N 不对应任何一个点 z). 我们约定 N 对应于无穷远点 $z=\infty$, 因而建立了 $\overline{\mathbb{C}}$ 与 S 之间的相互一一对应; *通常我们将* $\overline{\mathbb{C}}$ *与球面* S *等同, 称其为复球面或者黎曼球面*. 开平面 $\mathbb{C}$ 可以等同于 $S\setminus N$, 即去掉点 N (北极点) 的球面.

习题. 设 t 为点 $Z\in S$ 的经度, u 为其纬度 (图 1). 证明在球极投影下对应于 Z 的点为 $z=se^{it}$, 其中 $s=\tan(\pi/4+u/2)$. #

对应于复数几何表示的两种描述方式, 我们在 $\mathbb{C}$ 上引进两个度量. 其中一个是通常的*欧几里得度量*, 在此度量下, $\mathbb{C}$ 中两个点 $z_1=x_1+iy_1$ 和 $z_2=x_2+iy_2$ 之间的距离被取为

$$|z_2-z_1|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{16}$$

第二个是*球面度量*, 在其下两个点 z_1 与 z_2 之间的距离取为它们的球面像之间的欧氏距离 (在 ξ,η,ζ 空间中). 应用公式 (14), 经过不复杂的计算, 我们求得两个点 $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ 之间的球面距离:

$$\rho(z_1,z_2)=\frac{2|z_2-z_1|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}. \tag{17}$$

可以将这个公式推广到集合 $\overline{\mathbb{C}}$ 上, 这只要令①

$$\rho(z,\infty)=\frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}} \tag{18}$$

即可. 显然, 对于任意两个点 z_1, $z_2\in\overline{\mathbb{C}}$, 我们有 $\rho(z_1,z_2)\leqslant 2$. 容易验证这两个度量中每一个都将集合 $\mathbb{C}$ 变为一个度量空间, 即它们满足通常的距离公理②. 特别地, 对于度量 (16) 的三角公理等价于熟知的不等式

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|. \tag{19}$$

最后, 我们注意到, 在一个属于固定圆盘 $\{|z|\leqslant R: R<\infty\}$ 的有界集合 $M\subset\mathbb{C}$ 上, 欧氏的和球面的度量是等价的, 这是因为从 (17) 看出, 对于任意点 z_1, $z_2\in M$ 成立两个不等式

$$\frac{2|z_2-z_1|}{1+R^2}\leqslant\rho(z_1,z_2)\leqslant 2|z_2-z_1| \tag{20}$$

①如果在 (17) 中令 $z_1=z$, 并对分子分母除以 z_2, 然后令 z_2 趋向 ∞, 便得到了公式 (18).

②参看 B. A. 卓里奇的《数学分析》第一卷 (M.: Hayka, 1981, p.413, 有中译本), 蒋铎等译. 北京: 高等教育出版社, 2006.12.

(对此更详细的情形, 可参看下一节). 因此球面度量通常都应用在考虑无界集合时. 通常, 我们将在集合 $\mathbb{C}$ 上考虑欧氏度量, 而在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上则考虑球面度量.

历史注记

作为结尾的是一点历史资料. 第一个提到复数是作为负数的平方根出现在卡尔达诺 (G. Cardano) 的著作《大衍术 (Ars Magna)》(1545 年) 中的; 他认为原则上这样的数可引入到数学之中, 但他的意见是这没有什么意义. 这种判断并没有充足的根据, 它很快就显现出来了. 1572 年, 邦贝利 (R. Bombelli) 发表了著作《代数学》, 在其中他叙述了这种数的运算规则, 并指出如何利用它们去解三次方程①. 长时期里复数仍旧被蒙上了一层神秘的面纱. 1702 年莱布尼茨则认为它们是"人类的那种近乎存在与不存在的两可精神的极佳而神奇的避难所"; 但他也认为 x^4+1 不能分解为两个二次因子的乘积 (然而这可用复数初等地做成).

将复数积极地用于数学中是从欧拉的工作开始的 (参看 §2); 公式 $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ (1748 年) 也归功于他. 将复数的几何表示作为描述平面向量的方法首先出现在丹麦的大地测量员韦塞尔 (C. Wessel) 的著作中 (1799 年), 而后则在阿尔冈 (R. Argand) 的著作中 (1806 年). 然而这些工作没有得到广泛的反响, 甚至于做出了许多复分析基本结果的柯西 (Cauchy) (参看第二章 §5), 他在其早期工作中也只将复数认作为是一个便于计算的符号而已, 并将复的等式看作为描述两个实的量之间的等式的约定写法.

第一次系统地叙述复数, 以及它们上面的运算和它们的几何解释是由高斯在他 1831 年的论文"二次剩余论"中给出的;"复数"这个词也是他给出的.

2. 复平面的拓扑

我们已在集合 $\mathbb{C}$ 和 $\overline{\mathbb{C}}$ 中引进了度量, 从而将这些集合变成了度量空间. 现在我们要在所考虑的集合上引进对应于这些度量的拓扑. 为此我们将确定出开集系.

设 $\varepsilon>0$ 为任意数; 点 $z_0\in\mathbb{C}$ 的 ε-邻域 $U_{z_0}=U(z_0,\varepsilon)$ (在欧氏度量下) 意味着一个以该点为圆心, 以 ε 为半径的圆盘, 即那些满足不等式

$$|z-z_0|<\varepsilon \tag{1}$$

的点 z 的集合. 对于 $z_0\in\overline{\mathbb{C}}$ 的 ε-邻域, 我们则理解为这样一些点 $z\in\overline{\mathbb{C}}$ 的集合: 使得

$$\rho(z,z_0)<\varepsilon. \tag{2}$$

①在邦贝利的书中有关系式

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=4.$$

第 1 小节的公式 (18) 表明 $\rho(z,\infty)<\varepsilon$ 等价于不等式 $|z|>\sqrt{\frac{4}{\varepsilon^2}-1}$; 因此, 无穷远点的 ε-邻域在平面上对应于圆心在坐标原点的圆的外部 (补充一点 $z=\infty$).

我们称 $\mathbb{C}$ (或 $\overline{\mathbb{C}}$) 中的集合 Ω 为*开集*; 是说, 如果对于它的任一点 z_0 存在属于这个集合的邻域 U_{z_0}.

容易验证这样引进的开集概念将 $\mathbb{C}$ 和 $\overline{\mathbb{C}}$ 变成了*拓扑空间*, 即这时满足了通常的公理.

在一些问题中利用所谓的*有孔邻域*较为方便, 在 $\mathbb{C}$ 和 $\overline{\mathbb{C}}$ 上它分别意味着满足不等式

$$0<|z-z_0|<\varepsilon,\quad 0<\rho(z,z_0)<\varepsilon. \tag{3}$$

的点 z 的集合.

在本节我们将考虑那些要在以后不断使用的基本的拓扑概念.

定义 1. 称点 $z_0\in\mathbb{C}$ (相应地, $\overline{\mathbb{C}}$) 为集合 $M\subset\mathbb{C}$ (相应地, $\overline{\mathbb{C}}$) 的*极限点*是说, 如果在 $\mathbb{C}$ (相应地, $\overline{\mathbb{C}}$) 的拓扑意义下, 点 z_0 的任何一个有孔邻域中都至少存在有 M 中的一个点. 称集合 M 为*闭集合*是说, 如果它包含了所有它自己的极限点. 称 M 加上它的所有极限点的集合为 M 的*闭包*, 并以记号 $\overline{M}$ 表示.

例. 所有整数 $\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 的集合 M 在 $\mathbb{C}$ 中没有极限点 (从而为闭). 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 中它有一个不属于 M 的极限点 $z=\infty$ (从而在 $\overline{\mathbb{C}}$ 中不闭). #

在 $\overline{\mathbb{C}}$ 中任意无限集合至少有一个极限点 (**紧性原理**).

表现了复球面完备性的这个原理可以由实数的完备性推导出来; 我们不在此证明它. 在 $\mathbb{C}$ 中紧性原理不再成立 (可由上述例子看到). 但是它对于无限的**有界集**, 即属于任意圆 $\{|z|<R\}$, $R<\infty$ 的无限集合成立. 我们称这样的集合为*紧*①.

由第 1 小节的不等式 (20) 显然推出, 点 $z_0\neq\infty$ 为 $\mathbb{C}$ 拓扑下集合 M 的极限点当且仅当它为在 $\overline{\mathbb{C}}$ 拓扑下 M 的极限点. 换句话说, 在**有限**极限点的范围内应用欧氏度量和应用球面度量有同等的功效. 这里的意义应该理解为第 1 小节末尾所陈述的那种度量等价性.

定义 2. *序列* $\{a_n\}$ 是指非负整数集到 $\mathbb{C}$ (或 $\overline{\mathbb{C}}$) 中的一个映射, 换句话说, 是非负整数变量的一个取复数值的函数. 称 $a\in\mathbb{C}$ (或 $\overline{\mathbb{C}}$) 为*序列* $\{a_n\}$ *的极限点*是指, 如果 a 在 $\mathbb{C}$ (或 $\overline{\mathbb{C}}$) 拓扑下的任意邻域中均含有这个序列的无限多个元素. 称在 $\overline{\mathbb{C}}$ 中有唯一一个极限点 a 的序列 $\{a_n\}$ 为*收敛于* a; 可写其为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a. \tag{4}$$

注. 序列 $\{a_n\}$ 的极限点与值的集合 $\{a_n\}$ 的极限点之间是不相同的. 例如, 序列 $a_n=1(n=0,1,2,\cdots)$ 有极限点 $a=1$, 而点集 $\{a_n\}$ 仅由一个点组成, 没有极

①这与一般紧性的定义不同, 应称为闭包紧. —— 译注

限点.

习题. 证明下面的命题:

(1) 序列 $\{a_n\}$ 收敛于点 a 当且仅当对于任意 $\varepsilon > 0$ 存在自然数 N 使得对于所有 $n \geqslant N$ 满足不等式 $|a_n - a| < \varepsilon$ (如果 $a \neq \infty$) 或者 $\rho(a_n, a) < \varepsilon$ (如果 $a = \infty$);

(2) 点 a 为序列 $\{a_n\}$ 的极限点当且仅当存在收敛于 a 的子序列 $\{a_{n_k}\}$. #

一般说来, 复数的等式 (4) 等价于两个实数的等式. 设 $a \neq \infty$, 于是, 不失一般性, 可以假定 $a_n \neq \infty$, 从而令 $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, $a = \alpha + i\beta$ (对于无穷远点实部和虚部的概念没有意义); 容易证明, (4) 等价于等式

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta.\text{①} \tag{5}$$

在 $a \neq 0, \neq \infty$ 的情形, 可以假定 $a_n \neq 0, \neq \infty$, 从而可令 $a_n = r_n e^{i\varphi_n}$, $a = re^{i\varphi}$; 于是如果

$$\lim_{n\to\infty} r_n = r, \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi, \tag{6}$$

则 (4) 成立, 反之, 如果 (4) 成立, 则 (6) 成立, 其中在第二个等式中适当地选取了 φ_n②. 如果 $a = 0$ 或 ∞, 则 (4) 与一个关系式 $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ 或 $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ 等同 (这时 φ_n 不起作用).

习题. 证明以下命题:

(1) 序列 $\{e^{in}\}$ 发散;

(2) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且 $|\arg a_n| \leqslant \alpha$, 其中 $\alpha < \pi/2$, 则此级数绝对收敛 ($\arg a_n$ 表示由 $\operatorname{Arg} a_n$ 得到的值, 使得它满足条件 $-\pi < \arg a_n \leqslant \pi$). #

我们有时会用到两个集合 M 与 N 之间的距离这个概念, 它被理解为任意两个点之间距离的下确界, 其中一个点属于 M, 而另一点属于 N:

$$\rho(M, N) = \inf_{z' \in M, z'' \in N} \rho(z', z''); \tag{7}$$

在这里当然可考虑用欧氏度量替代球面度量.

定理 1. *如果闭集 $M, N \subset \overline{\mathbb{C}}$ 不相交 ($M \cap N = \varnothing$), 则它们之间的距离为正数.*

证明. 设若相反, $\rho(M, N) = 0$. 由下确界的定义, 存在点序 $z'_n \in M$ 和 $z''_n \in N$ 使得 $\lim_{n\to\infty} \rho(z'_n, z''_n) = 0$. 按照紧性原理, 序列 z'_n 和 z''_n 分别有极限点 z' 和 z'', 并由集合的闭性知 $z' \in M$, $z'' \in N$. 若必要可转而考虑子序列, 故可假定 $z'_n \to$

---

①为证此, 只需利用关系式

$$\max(|\alpha_n - \alpha|, |\beta_n - \beta|) \leqslant |a_n - a| = \sqrt{(\alpha_n - \alpha)^2 + (\beta_n - \beta)^2} \leqslant |\alpha_n - \alpha| + |\beta_n - \beta|.$$

②如果随意选取 φ_n, 则 $\{\varphi_n\}$ 当 a_n 收敛时可能不收敛.