大学课程
辅导与应试
系列丛书

●南北名校联合 ●四方名师打造 ●天下名品汇粹

大学文科数学辅导

主 编：张效成
副主编：戴 瑛 张建华

- 内容提要
- 典型例题分析
- 练习及参考答案
- 综合习题

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

大学文科数学辅导

主　编　张效成
副主编　戴　瑛　张建华

天津大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学辅导/张效成主编.—天津:天津大学出版社,2004.7

ISBN 7-5618-1963-3

Ⅰ.大… Ⅱ.张… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第055424号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨风和
地　　址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
印　　刷 河北省永清县印刷厂
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 170mm×240mm
印　　张 20.75
字　　数 542千
版　　次 2004年7月第1版
印　　次 2004年7月第1次
印　　数 1-3 000
定　　价 27.00元

大学文科数学辅导编委会

主　编　张效成

副主编　戴　瑛　张建华

编　委　（排名不分先后）

贾兰香　刘桂茹　柴巧珠

王　建　王雪梅　邹　华

张　泽　刘民千　高敏艳

前　言

数学的重要性日益为人们所认识，越来越多的高等院校把"高等数学"列为文科大学生必修的基础课程．与此同时，文科大学生学习数学的热情和积极性也空前高涨．但是，由于大学的高等数学与中学数学的连接有一定跨度，加之课程涉及内容比较广泛，知识点多且教学速度也比中学提高很多，学生普遍感到难以适应此门课程的学习，尤其在做作业或考试时，常常陷于束手无策的窘迫之中，而由此导致苦恼，甚而至于产生畏难情绪和恐惧心理，严重者则丧失了学习信心．为了帮助文科大学生学好数学，我们编写了这本辅导读物．

本书涉及的内容是微积分、线性代数和概率统计．全书共分为 3 部分，第 1 部分是微积分，包括 7 章；第 2 部分是线性代数，包括 3 章；第 3 部分是概率统计，包括 6 章．各章节的结构大致相同，即每章的开头指出本章的要点，除个别章外，章下划分为节．视知识点的多寡，节下或分目或不再分目．基本的结构为三段式结构模式："内容提要"、"典型例题分析"和"练习及参考答案"．其中，"内容提要"既简明扼要又系统全面地对本节或本目的理论和方法做了概括．在"典型例题分析"中，例题是从不同侧面和不同角度精心选择的，并且在解题前、解题中或解题后插入了必要的分析和解释．仔细阅读这些例题及其分析，会使读者得到启发，会帮助读者逐步掌握解题思路和技巧，并能做到举一反三．毫无疑问，看别人怎么解题是必要的，但这只是在学习，而真正要掌握那些理论和方法，还必须得自己动手去做题，不想做题就想学好数学，那只能是一种幻想．这就像至今还没有谁单靠看书就能学会游泳一样．但是，做题也要讲究方法，一是要循序渐近，一是要有代表性．这就像学游泳，先学分解动作，再学手脚并用．为此，我们在"练习及参考答案"中安排了若干"单打一"练习题．这些练习题的作用在于帮助读者循序渐进地去掌握本节或本目所涉及到的理论与方法．最后，每一章都以"综合习题及参考答案"作为本章的结束．这里的习题具有一定的综合性，其作用在于帮助读者把截至本章的理论与方法能够融会贯通地去应用．并且，这里所选的习题，在题型上、在解题思路和解题方法上及在知识点的覆盖上都做了细心的考虑．相信这一部分在一定程度上可以帮助读者克服做题的片面性或盲目性．为了方便阅读与查找，参考答案没有集中地放在最后而是紧随在题目之后，恳切希望不要滥用这种便利，一定先是自己动手去做，做完后去和答案进行核对，或者实在无从下手时，可以"参考参考"答案．

"大学文科"这样一个概念实际上往往囊括了众多的学科专业，其中有人文类专业、哲学类专业、政法类专业以及艺术类专业等等．就我国大学的现状而言，这些专业对数学教育的要求有着非常大的差异．比如像心理学专业和社会学专业等学科，对数学就有比较高的要求，尤其像概率论和数理统计课程，是必须下力气学好的，这就是他们学好和用好专业理论与方法的重要基础．而像另外一些专业，如历史学似乎对数学的要求可

以低一些.其实这种状况不是一成不变的.国外早就有计量历史这样一个专业方向了.如果我们也要建立并发展这一方向,数学则必然成为从事该领域研究所必需的重要工具之一.因此,本书作者在编写时,为了照顾"文科"这样一个大跨度的特点,同时考虑到各个学科门类未来的发展,在内容的广度和深度上做了慎重考虑,能够满足文科各学科门类对数学的需要.

本书也可供从事大学文科数学教学工作的教师作为参考书籍.

此外,对于想攻读双学位的文科同学来说,如果选择的第二学位是经济管理类专业,或者你将来想报考经济管理类的硕士研究生,那么,本书对你也一定很有帮助.

本书的第一部分由戴瑛等编写,第二部分由张效成等编写,第三部分由张建华等编写.全书由张效成统稿.在编写过程中,扈才思同志始终给予了热情的支持和鼓励,对本书的框架提出了宝贵的建议.

很多优秀的出版物给了我们诸多启发,在此不能一一列举.

对于上述方方面面给予我们的帮助,我们一并表示诚挚的谢意.

由于编者水平有限,书中难免有不妥之处,欢迎批评指正.

编者

2003 年 5 月

目　录

第1部分　微积分

第2部分 线性代数

第3部分 概率统计

第 1 部分

微　积　分

第 1 章　函数与极限

本章主要内容为函数的概念及其表示法，函数的几种性态，复合函数、反函数、基本初等函数、初等函数；数列极限和函数极限的概念及它们的性质，函数的左、右极限，无穷大量和无穷小量的概念及其关系，无穷小量的基本性质，极限的四则运算，极限存在的两个准则，两个重要极限，函数连续的概念，初等函数的连续性.

1.1　函　　数

一、函数

【内容提要】

定义 1.1.1　设 x、y 是两个变量，X 是给定的一个数集. 若 $\forall x \in X$，按照某一法则 f，变量 y 都有惟一确定的值与它对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$，$x \in X$，x 称为自变量，y 称为因变量.

定义 1.1.2　使函数有定义的所有自变量取值的全体，称为函数的定义域，记为 D_f；相应地因变量 y 的变化范围称为函数的值域，记为 R_f.

通常函数有三种表示法：列表法、图像法、解析法（公式法）.

【典型例题分析】

例 1.1.1　求函数 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1-x^2)$ 的定义域.

解　由题意，$x \neq 0$ 且 $1-x^2>0$，即 $x \neq 0$，$x^2<1$.

所以　　$D_f=(-1,0)\cup(0,1)$.

例 1.1.2　求函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域和值域.

解　由题意，$1-x^2 \geqslant 0$，即 $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

因此，此函数的定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,1]$.

注　由上面的例题，可以看出，求一函数的定义域往往只需除去以下几种自变量的值：

(1) 使分母为零的自变量的值；

(2) 使对数的真数为零或负数的自变量的值；

(3) 使偶次方根内被开方数为负数的自变量的值；

(4) 使反三角函数无定义的点等.

函数的定义域、值域、对应规律是函数概念的三要素.

例 1.1.3　画出函数

$$y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0\end{cases}$$

的图像.

解　此函数的图像如图 1.1 所示.

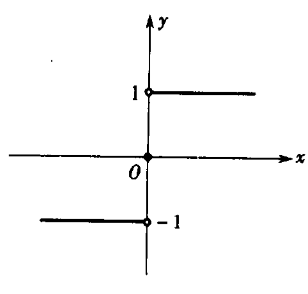

图 1.1

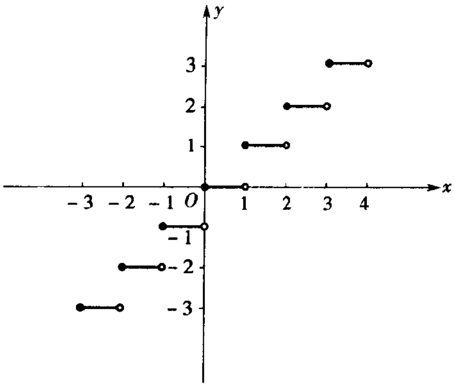

图 1.2

通常称这个函数为符号函数,它是分段函数.

例 1.1.4 取整函数$[x]$.

这是计算机上的重要函数,$[x]$表示不超过 x 的最大整数.例如:

$$[-1]=-1,[0]=0,[-1.23]=-2,$$
$$[0.45]=0,[1.78]=1.$$

取整函数的定义域 $D_f=\mathbf{R}$,其值域 $R_f=\mathbf{Z}$(其中 $\mathbf{Z}$ 表示全体整数的集合).

取整函数也是分段函数,它可表示为

$$y=[x]=\begin{cases}\cdots, & \cdots,\\ 2, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & 0\leqslant x<1,\\ -1, & -1\leqslant x<0,\\ \cdots, & \cdots.\end{cases}$$

取整函数$[x]$的图像是由无穷多条与 x 轴平行的单位长线段组成的阶梯形,见图 1.2.

【练习及参考答案】

1.求函数 $y=\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x-2}}$的定义域.

2.求函数 $y=\arcsin(x-2)$的定义域.

3.一商店对某种饮料的价格是这样规定的:购买量不超过 10 瓶时,每瓶价格为 3 元;购买量超过 10 瓶而小于等于 50 瓶时,其中 10 瓶每瓶仍为 3 元,其余的每瓶为 2.7 元;购买量超过 50 瓶时,其中 10 瓶每瓶为 3 元,另 40 瓶每瓶为 2.7 元,超过 50 瓶的部分,每瓶 2.1 元.试列出购买费用 y 与购买量 x 之间的函数关系,并画出图像.

参考答案

1. $(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$. **2.** $[1,3]$.

3. $y=f(x)=\begin{cases}3x, x\leqslant 10,\\ 30+2.7(x-10), 10<x\leqslant 50,\\ 138+2.1(x-50), x>50.\end{cases}$ 图略.

二、函数的特性

【内容提要】

定义 1.1.3 设函数 $y=f(x)$的定义域为 D_f,如果存在正数 M,使得对任意 $x\in D_f$,恒有$|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$在 D_f 内有界或称$f(x)$是有界函数,否则称为无界.

定义 1.1.4 设函数 $y=f(x)$的定义域 D_f 关于原点对称,且对 $\forall x\in D_f$,有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$是偶函数,偶函数的图像是关于 y 轴对称的;同样,对 $\forall x\in D_f$,若有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$是奇函数,奇函数的图像是关于原点对称的.

定义 1.1.5 对函数 $y=f(x)$,若存在常数 $T>0$,使得对 $\forall x\in D_f$,都有 $f(x+T)=f(x)$成立,则称此函数为周期函数,满足上式的最小 T 称为函数的周期.

定义 1.1.6 设函数 $y=f(x)$,区间$(a,b)\subseteq D_f$,$\forall x_1,x_2\in(a,b)$,且 $x_1<x_2$,如有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$在(a,b)内是单调增的;如有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$在(a,b)内是单调减的.

若在上述定义中，不等号严格成立，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是严格单调增(减)的，所有的统称为单调函数．

【典型例题分析】

例 1.1.5 函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的．

函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界，而在 $(1,2)$ 内是有界的．

因此，我们讨论函数的有界性时，一定要指出其所在区间．

例 1.1.6 判定下列函数的奇偶性．

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$； (2) $f(x)=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$．

解 判定一个函数的奇偶性，只需按照定义，求出 $f(-x)$，找出它与 $f(x)$ 的关系即可．

(1) $f(-x)=\dfrac{1}{1+(-x)^2}=\dfrac{1}{1+x^2}=f(x)$，

因此，$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 是偶函数；

(2) $f(-x)=\log_a(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\log_a\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\log_a(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$，

因此，$f(x)=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数．

例 1.1.7 说明函数 $f(x)=x^2+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调性．

解 任取 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则 $x_1-x_2<0, x_1+x_2>0$，于是有

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)<0,$$

从而 $f(x_1)<f(x_2)$．所以函数 $f(x)=1+x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上是严格单调增函数；

任取 $x_1,x_2\in(-\infty,0]$，且 $x_1<x_2$，则 $x_1-x_2<0, x_1+x_2<0$，于是有

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)>0,$$

从而 $f(x_1)>f(x_2)$．所以函数 $f(x)=1+x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上是严格单调减函数．

【练习及参考答案】

1．讨论下列函数的奇偶性．

(1) $f(x)=x\sin x-\cos x$； (2) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$．

2．判断下列函数的单调性．

(1) $f(x)=3x-6$； (2) $f(x)=\log_a x$．

参考答案

1．(1)偶函数；(2)奇函数．

2．(1) $f(x)=3x-6$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增的；(2)当 $a>1$ 时，$f(x)=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增，当 $0<a<1$ 时，$f(x)=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减．

三、初等函数

【内容提要】

定义 1.1.7 若函数 $f(x)$ 是区间 (a,b) 上的严格单调函数，$f(a)=A, f(b)=B$，则对每个 $y\in(A,B)$ (或 (B,A)) 存在惟一的值 $x\in(a,b)$，使得 $f(x)=y$，x 由 y 惟一确定，即确定了一个定义在 (A,B) (或 (B,A)) 上的函数，称此函数为 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上的反函数，记为

$$y=f^{-1}(x), x\in(A,B)\ (\text{或}(B,A)).$$

若把函数 $y=f(x)$ 与其反函数的图像画在同一坐标平面上，则两者的图像关于直线 $y=x$ 对称．

增函数的反函数仍是增函数，减函数的反函数仍是减函数.

定义 1.1.8 设函数 $y=f(u)$，$u\in D_f$，函数 $u=g(x)$，$x\in D_g$. 若 $u=g(x)$ 的值域 $R_g\subset D_f$，则通过中间变量 u 将 y 表示成 x 的函数，即 $y=f(g(x))$，那么 y 就称为 x 的复合函数.

复合函数实际上是把一个函数代入另一个函数得到的，这种运算称为复合运算.

幂函数 x^{μ}（μ 为常数）、指数函数 a^x（a 为常数，$a>0,a\neq1$）、对数函数 $\log_a x$（$a>0,a\neq1$）、三角函数（$\sin x,\cos x,\tan x,\cot x$ 等）、反三角函数（$\arcsin x,\arccos x,\arctan x,\operatorname{arccot} x$ 等）统称为基本初等函数.

由常数及基本初等函数，经过有限次的四则运算和有限次的复合运算而得的用一个式子表示的函数称为初等函数.

【典型例题分析】

例 1.1.8 设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\quad(x>0)$，求 $f(x)$.

解 （法Ⅰ） 用换元法.

令 $\frac{1}{x}=u$，则 $x=\frac{1}{u}(u>0)$，代入原式得

$$f(u)=\frac{1}{u}+\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}\quad(u>0).$$

由于函数关系与表示自变量的字母无关，故

$$f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\quad(x>0).$$

（法Ⅱ） 用拼凑法.

因为原函数为 $\frac{1}{x}$ 的函数，因此，要把原式变为 $\frac{1}{x}$ 的表达式.

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}=x\left(1+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)=\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}}\quad\left(x>0,\text{即}\frac{1}{x}>0\right),$$

故 $$f(x)=\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}=\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\quad(x>0).$$

例 1.1.9 设 $f(x)=\frac{x}{x-1}$，试验证 $f(f(f(x)))=f(x)$，并求 $f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$，$x\neq0,x\neq1$.

证 $f(f(f(x)))$ 是一个多次复合函数，要求解它的值，则需按照复合函数的定义，一次一次地复合.

$$f(f(x))=\frac{f(x)}{f(x)-1}=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=\frac{x}{x-(x-1)}=x,$$

$$f(f(f(x)))=\frac{x}{x-1}=f(x).$$

$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}-1}=\frac{1}{1-f(x)}=\frac{1}{1-\frac{x}{x-1}}=1-x.$$

例 1.1.10 验证函数 $y=\frac{1-x}{1+x}$ 的反函数就是它本身.

解 求一个函数的反函数就是反解此函数，把 x 表示成 y 的函数，再令 x 表自变量，y 表因变量即求出原函数的反函数.

由 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 得 $y(1+x)=1-x$，即 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$. 所以 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，即此函数的反函数就是它本身.

例 1.1.11 设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=cx$，其中 a,b,c 均为非零常数，且 $|a|\neq|b|$，求 $f(x)$ 的表达式.

解 由于已知条件中只给出了 $f(x)$ 与 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 之间的关系式，要求 $f(x)$ 的表达式，那只有通过代换把 $f(x)$ 求出.

因
$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=cx, \tag{1}$$
所以在上式中，用 $\dfrac{1}{x}$ 代替 x，可得到
$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=\frac{c}{x}. \tag{2}$$
解(1)、(2)联立方程组，即可得
$$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(acx-\frac{bc}{x}\right)\quad(|a|\neq|b|).$$

【练习及参考答案】

1. 已知 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=\cos x+1$，求 $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)$.

2. 若 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2$，求 $f(x)$.

3. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{x}$，$g(x)=1+x$，求 $f(g(x))$.

4. 设 $g(x)=1+x$，且当 $x\neq0$ 时，$f(g(x))=\dfrac{1-x}{x}$，求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

5. 若 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+1}{x}$，求其反函数 $f^{-1}(x)$.

参考答案

1. $1-\cos x$（提示：先求 $f(x)$，再求 $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)$）. **2.** $(1+x)^2$. **3.** $-\dfrac{x}{1+x}$.

4. -3（提示：先求 $f(x)$，再求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$）. **5.** $x-1$.

1.2 极　　限

一、函数极限与连续性的概念

【内容提要】

定义 1.2.1 设数列 $\{y_n\}$ 和常数 A，当 n 越来越大时，通项 y_n 逐渐无限地逼近常数 A，则称 A 是数列 $\{y_n\}$ 当 n 趋于无穷大时的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A.$$

此时亦称$\{y_n\}$收敛于 A,并称之为收敛数列,否则称为发散数列.

定义 1.2.2 设 $y=f(x)$是给定函数,如果自变量 x 在某个变化过程中变化时(包括 $x\to x_0$, $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$),函数 $y=f(x)$相应地变化而无限接近于常数 A,则称 A 为函数$y=f(x)$在该变化过程中的极限,或称 $y=f(x)$收敛到 A,记为

$$\lim_{x\to\square} y = A.$$

定义 1.2.3 对于给定函数 $y=f(x)$,如果自变量 x 从一侧趋于x_0 时,函数$y=f(x)$相应地变化而无限接近于常数 A,则称 A 为函数 $y=f(x)$的单侧极限.

当 $x\to x_0^-$ 时,称为左极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$;

当 $x\to x_0^+$ 时,称为右极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

定理 1.2.1 函数 $y=f(x)$在点 x_0 的极限存在的充分必要条件是 $f(x)$在点 x_0 的左、右极限都存在,且相等.

定义 1.2.4 设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某一邻域内有定义,若满足 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$,则称函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处是连续的.

若满足 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$,则称函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处是右连续的.

若满足 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$,则称函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处是左连续的.

或设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某个邻域内有定义,若 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$满足 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$,则称函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处是连续的.

如果函数 $f(x)$在某区间(a,b)内的每一点都连续,则称此函数在该区间内是连续的;如果 $f(x)$在区间(a,b)内每一点连续,且在 a 点右连续,在 b 点左连续,则称 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续.

定理 1.2.2 一切初等函数在其定义域内都是连续的,即若 $f(x)$是一初等函数,且点 x_0 是其定义域内一点,则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$(极限值等于函数值).

【典型例题分析】

例 1.2.1 试说明函数 $y=\sin x$,当 $x\to\infty$ 时没有极限.

解 因为 $x\to\infty$,所以 x 总可以取到$x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$的无穷多个点,从而使 $y=\sin x$ 反复取值 $+1$ 及 -1.因此,不存在常数 A,当 $x\to\infty$时,函数值 $y=\sin x$ 与其无限接近,即极限不存在.

例 1.2.2 求极限$\lim\limits_{x\to 2}\ln\sin\frac{\pi}{x}$.

解 $y=\ln\sin\frac{\pi}{x}$是一初等函数,且 $x=2$ 点是其定义域内一点.故由定理 1.2.2 知 $y=\ln\sin\frac{\pi}{x}$在 $x=2$ 点连续,即

$$\lim_{x\to 2}\ln\sin\frac{\pi}{x}=\ln\sin\frac{\pi}{2}=0.$$

例 1.2.3 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$(由于 $\arctan x$ 是一初等函数), $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$.

故 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 极限不存在.

例 1.2.4 讨论当 $x\to 0$ 时,函数 $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$ 是否有极限?

解 注意此时函数是一个分段函数,点 $x=0$ 是其一分段点,在此点左、右函数的表达式不同,要判断分段函数在分段点处是否有极限,我们就要利用定理 1.2.1,判断函数在这点的左、右极限是否存在且,是否相等.

$$f(x)=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}\dfrac{x}{x}=1, & x>0,\\[2ex] \dfrac{x}{-x}=-1, & x<0,\end{cases}$$

且
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|}=1,\ \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}=-1,$$

左、右极限存在但不相等,因此 $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$ 当 $x\to 0$ 时,极限不存在.

【练习及参考答案】

1.求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\sin x$.

2.求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^2+1}$.

3.求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\ln\arctan x$.

4.求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{\cos x}$.

5.求极限 $\lim\limits_{x\to -1^+}\arccos x$.

6.设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0<x\leqslant 1;\\ 1, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$ 问 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 是否存在?

参考答案

1. $\sin 1$. **2.** $\sqrt{2}$. **3.** $\ln\dfrac{\pi}{4}$. **4.** 1. **5.** π. **6.** 存在.

二、极限的性质

【内容提要】

定义 1.2.5 若变量 $y=f(x)$ 在自变量 x 的某个变化过程中的极限是 0,则称 y 为该变化过程中的无穷小量,其倒数 $\dfrac{1}{y}(y\neq 0)$ 称为该变化过程中的无穷大量,记为 ∞.

注 我们说无穷小量时,必须要说明是在某个变化过程中的无穷小量,例如 $y=x^2$,当 $x\to 0$ 时,它是无穷小量,而当 $x\to 1$ 时,它就不是无穷小量.

定理 1.2.3 在某个变化过程中,无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量.

极限运算的性质.

设在同一极限过程中,极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 都存在,则有如下运算法则:

(1) $\forall C\in\mathbf{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0}C=C$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}(Cf(x))=C\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$;

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$;

(5) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$ (其中 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$).