

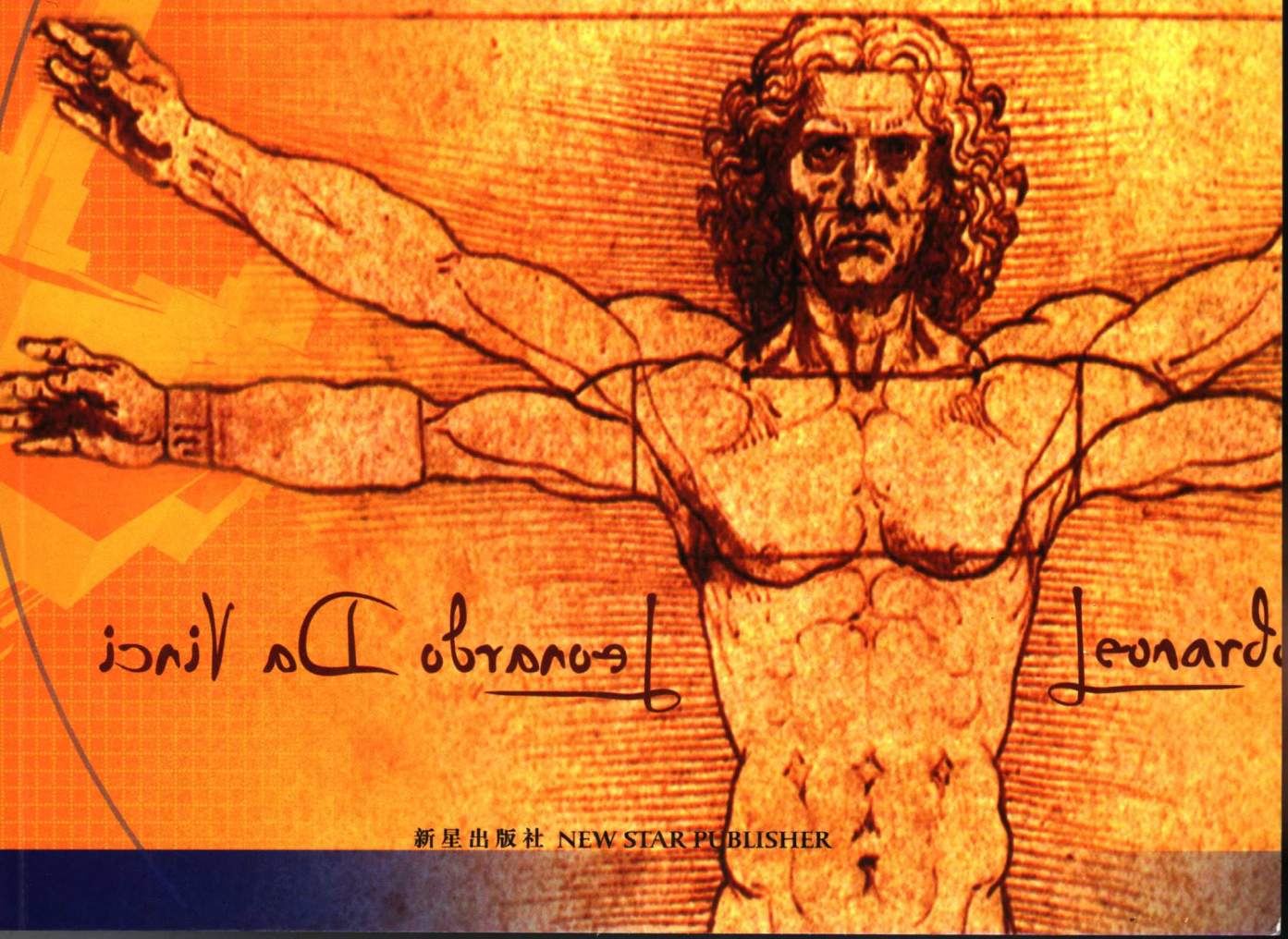
智慧经典

达芬奇的魔镜

考验智慧的经典趣题

[美] 伊万·莫斯科维奇 著

王若峥 译

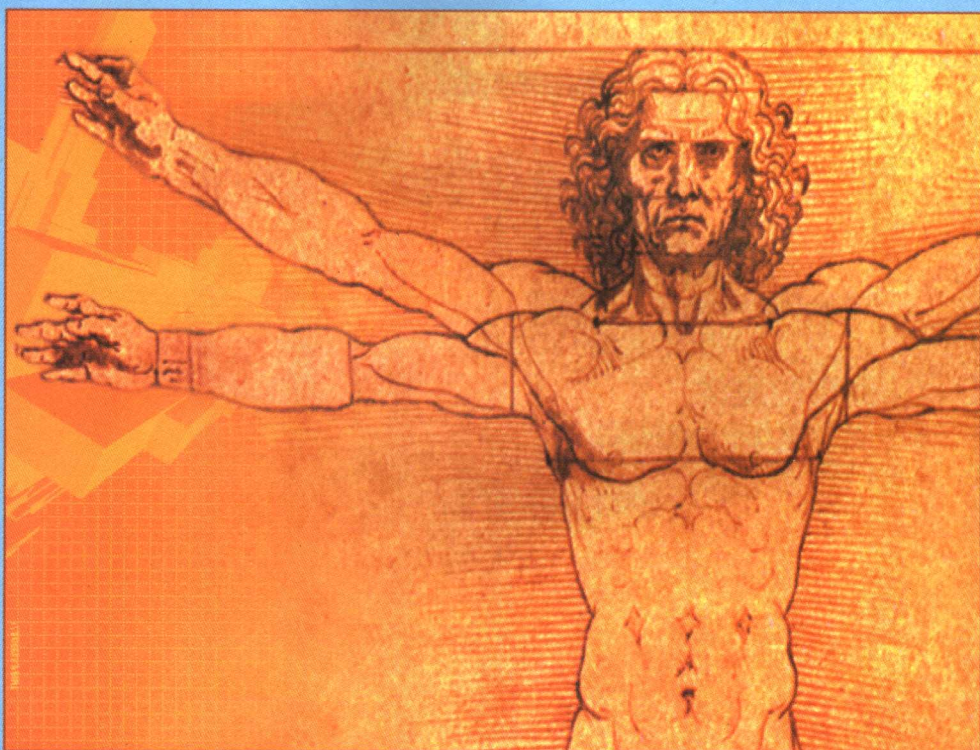


新星出版社 NEW STAR PUBLISHER

达芬奇的魔镜

[美] 伊万·莫斯科维奇 著

王若峥 译



考验智慧的经典趣题

新星出版社 NEW STAR PUBLISHER

图书在版编目 (CIP) 数据

达芬奇的魔镜：考验智慧的经典趣题/(美) 伊万·莫斯科维奇著；
王若峥译. —北京：新星出版社，2006.1

(智慧经典)

ISBN 7-80148-990-X

I. 达... II. ①莫... ②王... III. 数学—普及读物 IV. 01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 148619 号

LEONARDO'S MIRROR & OTHER PUZZLES by IVAN MOSCOVICH

Copyright: © 2004 by IVAN MOSCOVICH

This edition arranged with STERLING PUBLISHING CO., INC.

through BIG APPLE TUTTLE-MORI AGENCY, LABUAN, MALAYSIA.

All rights reserved.

著作权合同登记号：图字：01-2006-0322

达芬奇的魔镜

——考验智慧的经典趣题

[美] 伊万·莫斯科维奇/著

王若峥/译

责任编辑：耿红平

出版发行：新星出版社

出版人：谢刚

地址：北京市东城区金宝街 67 号隆基大厦

邮政编码：100005

电话：010-65270477

传真：010-65270449

电子邮箱：newstar_publisher@163.com

经销：广东联合图书有限公司

销售热线：010-65513628 65512133

印刷：河北大厂彩虹印刷有限公司

开本：787×1092 1/16

印张：8

版次：2006 年 1 月第一版 2006 年 1 月第一次印刷

定价：26.00 元

版权所有，翻版必究；如有质量问题，请通过销售热线联系调换。

目 录

序言	5	阴阳	27
日行迹	6	量地球的人	28
星星的同心圆轨迹	7	地球上有什么?	29
复杂的行星轨迹曲线	7	水球	30
是非曲直 1	8	受到限制的球	31
是非曲直 2	9	疯狂繁殖的兔子	33
是非曲直 3	11	艳丽的向日葵	34
断开的项链	12	和尚爬山	35
DNA	13	堆积圆盘或者圆	36
无限延伸, 然后停止	14	黑球	38
催人入眠的凝视	15	把它堆起来!	39
圆形的计算	17	见缝插针	40
交叉路	18	圆堆积: 把 10 个圆放入 一个正方形	41
神秘的玫瑰——19 点	19	圆堆积: 把 13 个圆放入 一个正方形	42
哈密尔顿道路	20	圆堆积: 把 100 个圆放入 一个正方形	43
回到平面上	21	移入大小不等的圆	45
周游世界游戏	21	炮弹堆	45
希波克拉底弓形	22	边到边	46
方框中的圆	23	领土战争	47
达芬奇的切分	24	剪角	48
达芬奇的魔镜	25		
美丽的花瓣	26		
双耳罐	27		

折线游戏	49	网格锁	73
魔幻移位 1	50	奇妙的色块四重唱	74
魔幻移位 2	51	红—绿—蓝	75
蒙日的圆定理	52	马走“日”字	76
钉住你	53	进来出去	78
传送	54	地形勘测	79
颠簸的旅程	55	斑斑点点的女演员	80
等宽曲线	55	一碗字母汤	81
悬链线：重力曲线	56	随便哪个方向	81
圆锥切割	57	立方体轮廓	82
倾斜的抛物线	59	伸缩绘图器	83
多少个六边形？	60	波赛利连杆	83
计算机操作	61	桌上高尔夫	84
转圈圈？	61	双石棋	86
万花尺	62	平面让你无处可逃	89
螺旋趣题	66	金库奇袭	90
抛硬币	67	在正确的轨道上	91
难以捉摸的椭圆？	67	你被坐标化了吗？	92
内部三角形	68	猫的摇篮	93
图像解析	69	处境艰难	94
蚂蚁	70	通往终点之路	95
蝴蝶收藏	71	嘴对嘴	96
织网	71	答案	98
五花八门的曲线	72		

序 言

早在中学时我就喜欢上了谜题和数学趣题。在1956年，一次偶然的机会使我的这种兴趣转变为一种癖好。当时我看到了《科学美国人》杂志上第一次刊出的马丁·加德纳数学游戏专栏。在过去的50年时间里，我一直在设计和创造教具、谜题、游戏、玩具以及科学博物馆里那些可以拿在手上的展品。

趣味数学是一种重在娱乐的数学，不过，当然了，这个定义实在太宽泛了。趣味数学在很大程度上可谓寓教于乐，而且在趣味数学和“严肃”数学之间其实并没有清晰的界限。要欣赏数学，你并不一定得是一名数学家。数学只是另一种语言——创造性思维和解题的语言，它会丰富你的人生，就像它已经（和仍将）丰富我的人生一样。

不少人似乎都坚信，即便没有任何数学知识，生活仍然有可能过得很好。事实并非如此：数学是所有知识的基础，是所有高等文化的承载者。要开始欣赏和学习数学的基础，任何时候都不会太晚。它会给我们太过迟钝的头脑补充丰富的智力历练，并给我们提供各种各样的乐趣，而这些乐趣可能是我们前所未闻的。

在收集和创造趣题时，我更喜欢那些不仅仅是逗乐的东西，喜欢这样一些趣题，它们能提供智力满足和学习经验的机会，并且激发好奇心和创造性思维。为了强调这些准则，我把我的趣题称为“思维宝”。

“智慧经典”系列通过大量趣题、游戏、问题和其他东西，系统地涵盖了相当广泛的数学思想，从那些来自数学史上的最经典趣题到许多全新的原创思想。

《达芬奇的魔镜》这本书在某种意义上来说，是对莱昂纳多·达芬奇的一种致敬。毫无疑问，他是迄今为止最富创造力的人。除了他著名的密写信息问题，这本书里还包含了他的几个切分问题，它们是从一大堆或者流行或者新奇的趣题、游戏和其他东西里找出来的。

为了把所有趣题都设计得尽可能使每个人都能理解，我花了很多工夫，不过其中仍然有一些问题的答案可能是很难的。由于这一原因，这些思想是以一种新颖的、具有高度美感的视觉形式展现出来的，使得读者更容易体会其中隐含的数学内容。

我比以前任何时候都更加渴望这几本书能表达我对数学的热情和迷恋，并与读者们共享这种热情。这些书把趣味与娱乐同智力挑战联系了起来，通过这种方式，我们可以欣赏与理解大量在艺术、科学和日常生活中司空见惯的思想和基本概念。

书里还包含了一些游戏，它们被设计成能够容易地制作和游玩的样式。许多游戏的结构使它们可以激荡心灵、萌发新思想和洞察力，从而为新的思维模式和创造性表达模式扫清道路。

尽管题材很分散，但在这些书所涉及的题材中仍有一种隐含的连续性。每一道“思维宝”趣题都是独立的（即便事实上它们存在相互关联），因此你可以随意选择一道，沉浸于其中，而不用担心受到交叉引用的困扰。

我希望你会喜欢这套“智慧经典”系列，就像我在为你创造它们时已经感受到的那样。

伊万·莫斯科维奇

基本曲线有无穷无尽的变形——其形式已经不仅仅局限于圆、椭圆或者抛物线了，这些变形在我们的周围到处可见。我们将尖角与断裂的锯齿线同暴力联系在一起，同时我们也把水平直线、渐近线等同于平静，把一些不断改变方向的曲线视为运动的代名词。

❁ 自然界中的曲线

曲线就是一条不停地弯曲但是却没有任何尖角的线。一些曲线（如抛物线）是开放的，也就是说，这条线永远不会回到起点处。一些曲线（如椭圆）会同自身会合，这种曲线是封闭的。

有一些曲线是缠绕在一起的，如螺旋线。将一条颇有分量的铁链两端固定，使其自由下垂，就可以得到一条叫做悬链线的自然曲线（见第56页）。当一个轮子在平地上滚动时，轮子上的一个点所形成的曲线叫做摆线。飞机翅膀的形状以及火箭的轨道曲线都是通过数学公式确定的特殊曲线。

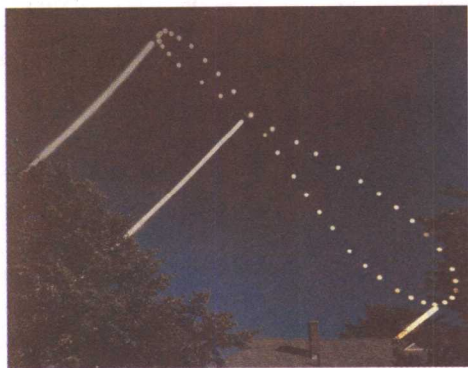
有一些曲线是我们所能获得的最短可能路径。在给定边界内部寻找一个“表面积最小”的曲面或者“最小曲线”的问题称为普拉托问题。虽然经过了180多年的研究，可它仍然没有在数学上得到解决。

肥皂泡就是最小曲面的一个

很好的例子，之所以称为最小曲面，是因为大自然会尽可能利用最短的周长或最小的面积，选择需要能量最少的形状覆盖一个给定的体积大小。

你见过笔直的江河吗？大概没有。事实上，不断重复的弯弯曲曲，在多数情况下，是一条江河的主要特征——这种曲线称为曲流。蛇、江河以及其他许多自然现象似乎都是按照弯曲的、波浪状的形式在运动。多年来，江河曲流的几何规律性激起了很多科学家的研究热情。曲流以一种使江河在转弯的过程中最省力的形式出现，这绝对不是出于巧合。

一条薄铁片可以被弯曲成各种不同形状——这些全都是江河曲流的模型。当我们将这条薄铁片用2个点固定住的时候，它呈现出的弯曲程度是始终如一的。那么，这种弯曲的结果是什么呢？曲线——一条不停地弯曲但是却没有任何尖角的线。



日行迹 天空中的曲线

这幅著名的延时照片是丹尼斯·迪西科历时1年，在每天的同一时间，每隔7~8天进行次曝光，经过44次曝光后得到的结果。它表明太阳在天空中的运行轨迹是一个8字形。

你能解释一下这条奇怪曲线的成因吗？为什么8字的2个环是不对称的？

假设在一个理想的世界里，地球绕太阳公转的轨道为标准的圆形，而且，地球的赤道平面同公转轨道平面重合。那么，在这样的条件下，拍出的照片又会是什么样子呢？

答案：第98页

星星的同心圆轨迹

你也许看过许多张夜空照片，就像右图中所示的那样。

你能不能够解释一下，为什么星星会具有同心圆轨迹，而这张照片又是如何拍摄而成的呢？

答案：第 98 页



如果万能的主在造物之前先征求一下我的意见，我定会向他建议一些更简单的东西。

——卡斯蒂尔国王“智者”阿方索十世（1221-1284）在接受托勒玫体系的教育时所言

复杂的行星轨迹曲线

到公元前 4 世纪时，人们已经开始研究天体。在著名的亚历山大城图书馆里，有众多关于天体运行的文献。文献记录显示，天体的运行可以分为 2 种方式。

太阳、月球以及大部分恒星以近似圆形的轨迹绕地球运转。但是（当时已知的）其余五大行星——土星、木星、火星、金星和水星——则是在神秘莫测的环状轨道上运行。某一天晚上你看到一颗行星朝着某一个方向运动，而过些时候，你又会看到它朝另外一个方向运动。这究竟是什么原因呢？

事实上，它们的轨迹叫做本轮，如右图所示（当一个圆在另一个圆内滚动时，就会产生出本轮曲线。这有点像一枚硬币在一个大圆环里转动）。右边这张照片来自一所天文馆，它显示了这五大行星的复杂运行轨迹。你能不能够解释一下，为什么我们在地球上观察到的外部星体的轨迹会是环绕成圈的本轮曲线呢？

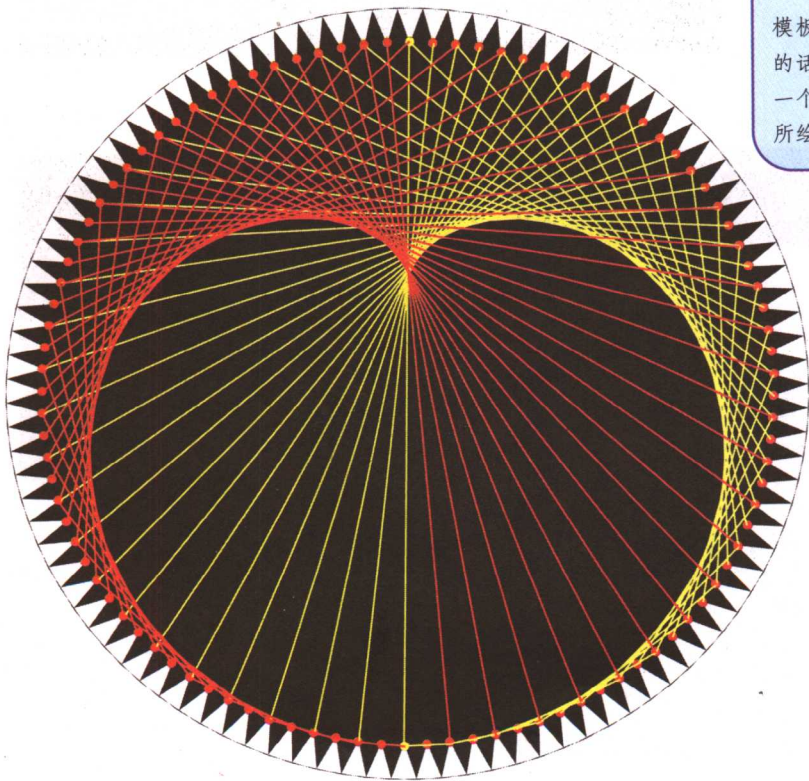
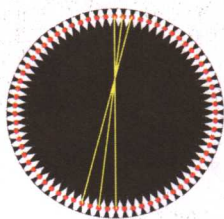
答案：第 99 页



以前你一定在钉板上见过这类美丽的线条图案。其实，你也可以很容易地在纸上把它们画出来，只要多一点点耐心。

► 是非曲直 1

如右边的小图所示，以一条直径作为起始线，然后每次将线的一端移动 1 个间隔，而另一端移动 2 个间隔，依次类推。以这种 1:2 的比率可以绘制出一个心形线，如下图所示。



直线生成的图形和曲线

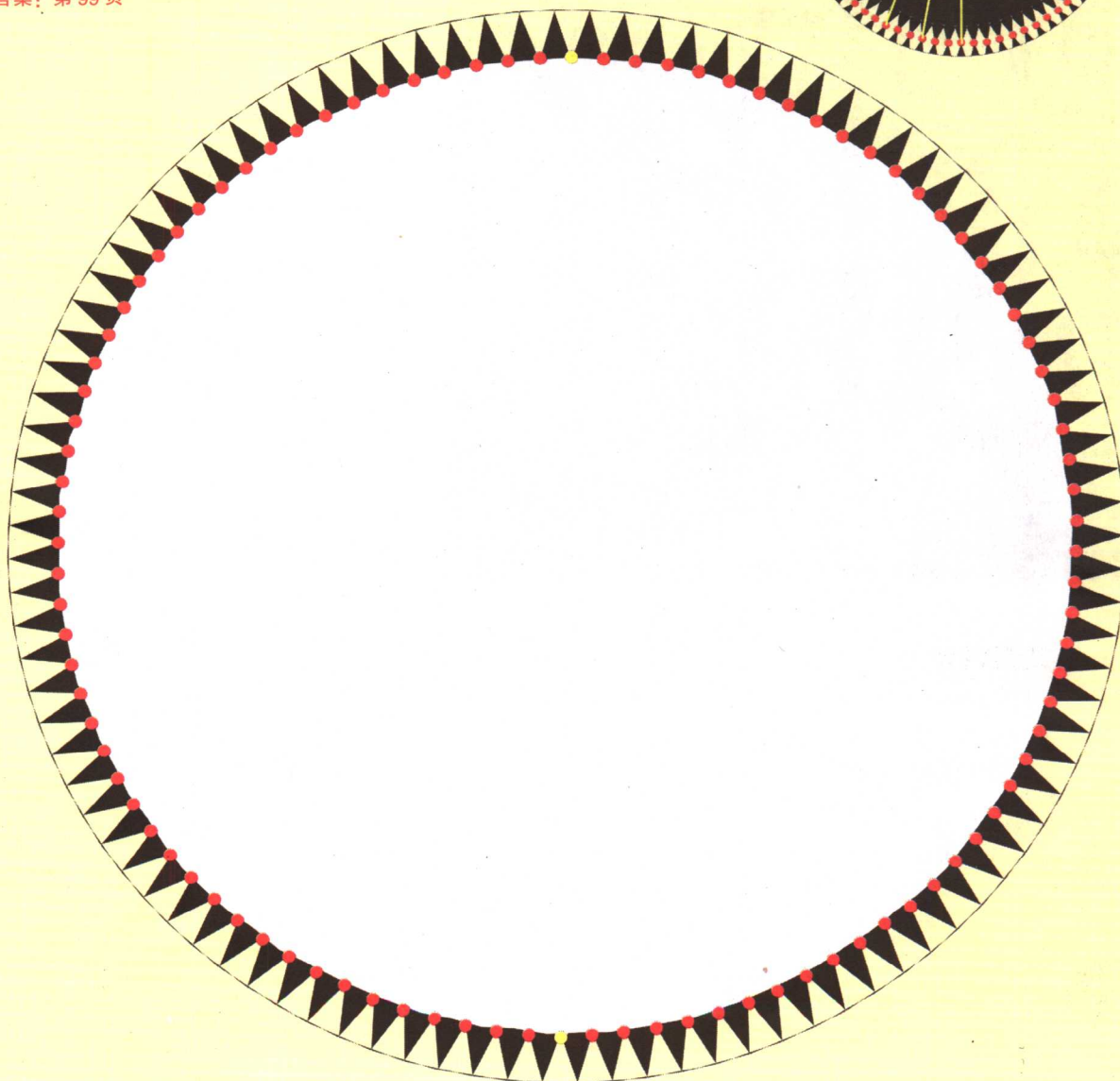
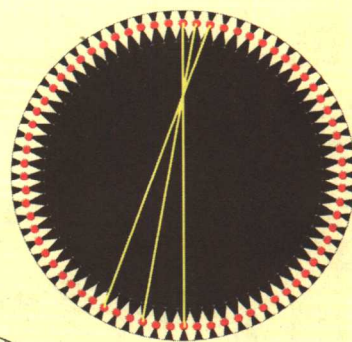
另一种制作这些图形的方法是从硬纸板上复制并且裁剪下一些模板，然后把把这些模板裁成相同大小的细条。然后用彩色的线沿着边沿把这些细条上的点连接起来，于是，奇妙的花样便产生了。这是一种古老的工艺，叫做“曲线缝纫”，由于与数学的相关性，这种工艺具有很强的教育意义。一系列的直线造就了一条完美曲线的视觉幻影，而这些直线都与这条曲线相切。用数学语言来表述，这条曲线就是这族直线的“包络”。这种数学特性使得这些图案设计非常简单易为，并且常常可以得到一些妙不可言的结果。

你也可以随便制订自己的规则、设计模板和实验（为了节省时间，如果你愿意的话，可以在圆周上少分一些点，例如将一个圆弧分为相隔 10° 的 36 个点。但是你所绘制的曲线也许就会不那么平滑了）。

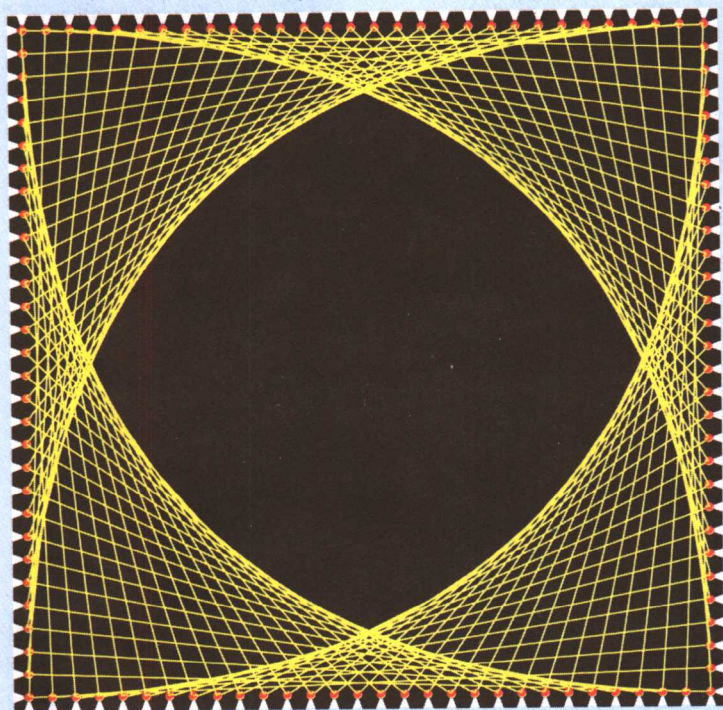
► 是非曲直 2

如右图所示，再次以一条直径作为起始线，但是这次在移动直线的时候，每个回合需将直线的一端移动 1 个间隔，而另一端移动 3 个间隔。看看以这种 1:3 的比率，你会得到什么样的图案？

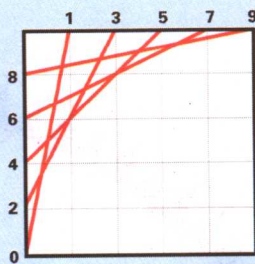
答案：第 99 页



也许你曾经看过一些趣题，它们会问你一些诸如“用3条直线最多可把空间分成几块”之类的问题。这里将会告诉你解决这些问题的最好方法。记住，未雨绸缪，方为良策！



规则 1



注意看图中的5条线是如何把这个正方形分成16个区域的——这是可能的最多划分。

❁ 线条设计

在这几页中，你会看到一些图形和曲线的例子，这些例子是由直线通过曲线缝纫的方法获得的。

曲线缝纫是以几何形状为基础，通过直线来制造曲线与圆弧的视幻影。这是一项很有意义的活动，把几何与数字模式联合在一起，特别强调秩序和对称。上面的例子显示了根据图片旁边描述的方法所形成的图形。在这个例子中，正方形的每一条边都被分割成相等的几个部分。在第1步中，0点沿着顺

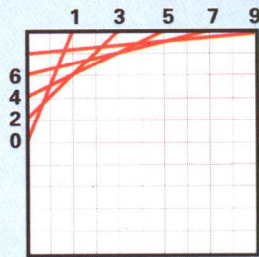
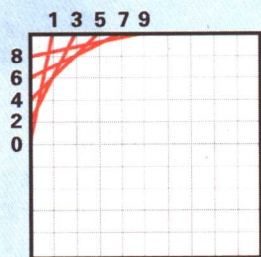
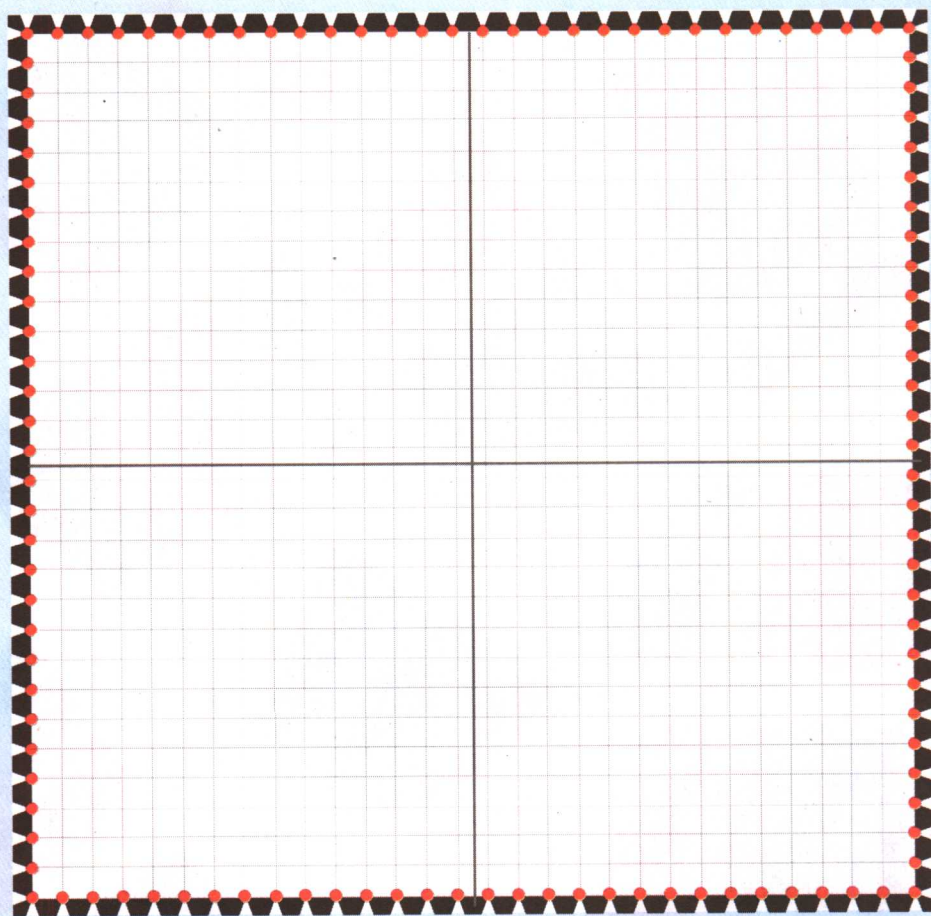
时针方向连接其相邻边上的第1个点。在第2步中，2点沿着顺时针方向连接其相邻边上的第2个点，依次类推。这就是1:1规则。

现在，你可以自己尝试着把这条规则应用于第11页的例子中。规则2与规则1采用相同的方法(1:1)，但是开始时的位置由下端点变为边的中点。而规则3中，连续的几个点会依次连接到相邻边对应的第2点上(1:2)。其实，真正的乐趣在于设置你自己的规则，然后观察出现的结果。

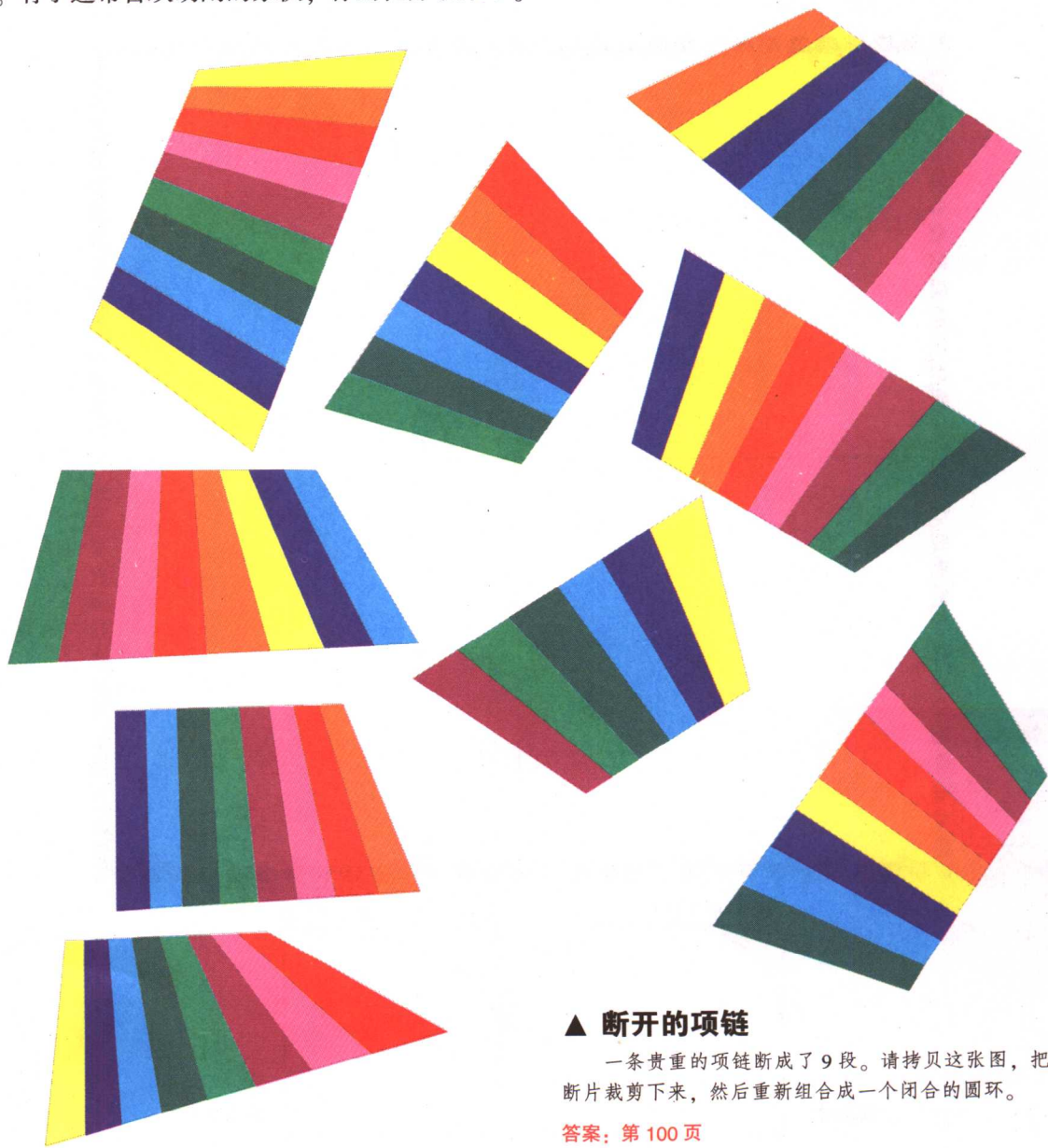
▼ 是非曲直 3

这个网格能让你画出一个令人震惊的图形。选择下面的规则 2 或者规则 3，并且连续应用 4 次，分别应用于这个网格的每个角落。在开始之前，你能不能够预见到它最终将会呈现出怎样的风貌？

答案：第 99 页



在餐馆摔盘子这种希腊习俗是与“克非”联系在一起的，这种朋友之间的聚会里有的是珍馐、美酒和快乐。可是，也许他们真正喜欢的，是那种盘子碎裂时发出的刺耳声音。有了这帮喜欢胡闹的家伙，你的任务就来了。



▲ 断开的项链

一条贵重的项链断成了9段。请拷贝这张图，把这些断片裁剪下来，然后重新组合成一个闭合的圆环。

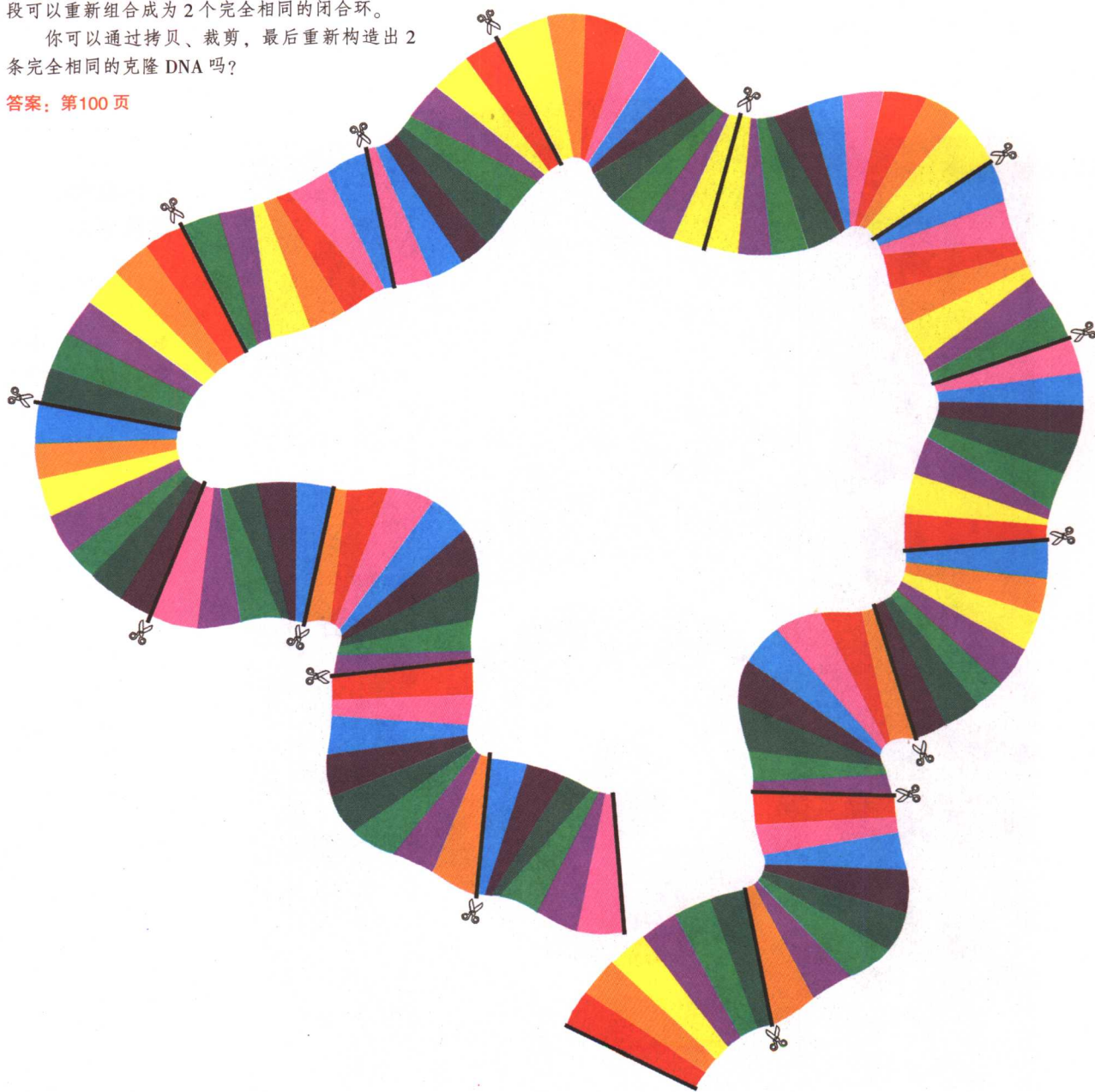
答案：第100页

▼ DNA

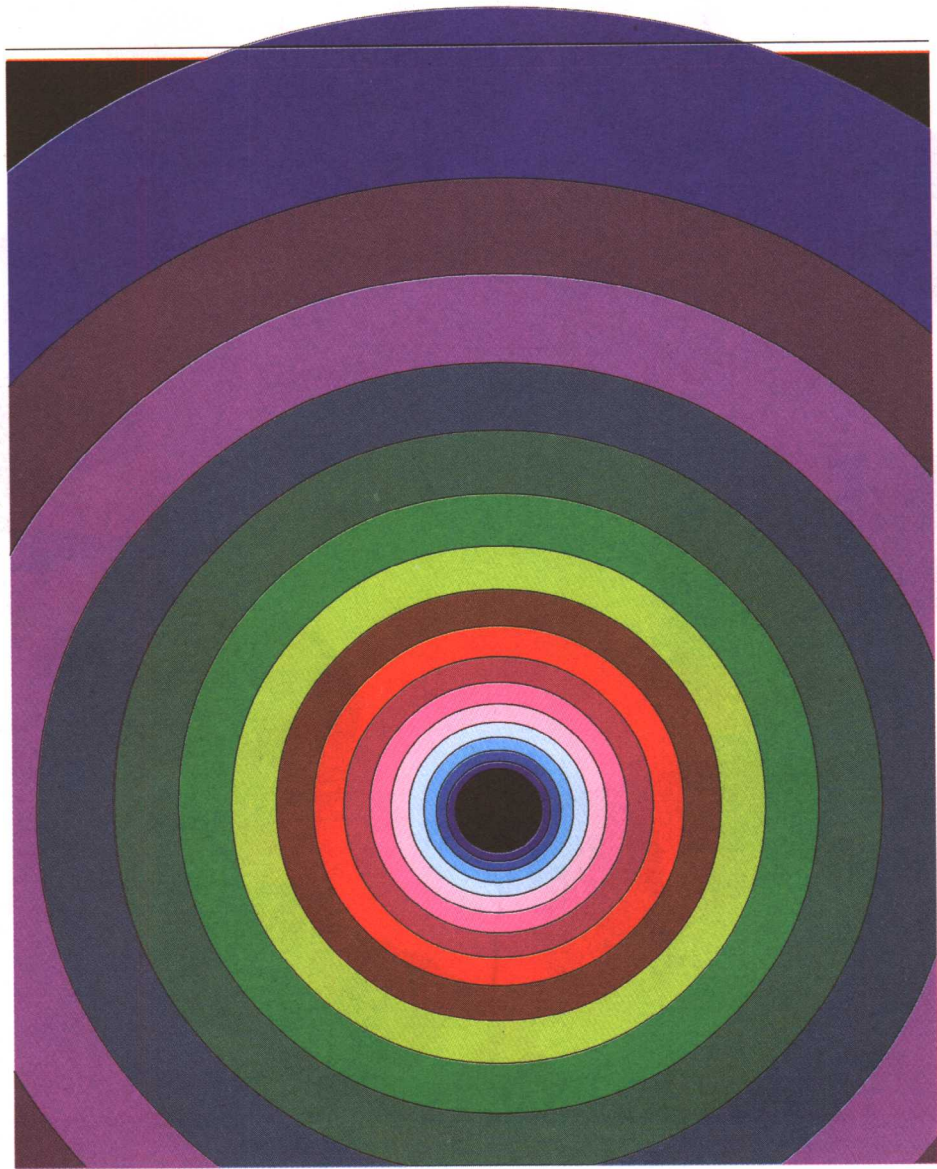
这条 DNA 链由 16 块独立但是相互间可以连接的片段组成，现在它已经断开了。这 16 块片段可以重新组合成为 2 个完全相同的闭合环。

你可以通过拷贝、裁剪，最后重新构造出 2 条完全相同的克隆 DNA 吗？

答案：第100页



同心圆有着同一个圆心。也许起初看来，它们并没有让我们觉得有太多的审美快感，但是著名的俄罗斯艺术家瓦西里·康定斯基（1866-1944）所创造的“方格子中的同心圆”等现代艺术作品，却获得了极高的声誉。



◀ 无限延伸， 然后停止

一个圆周的曲率会随着它半径的增加而不断减小。

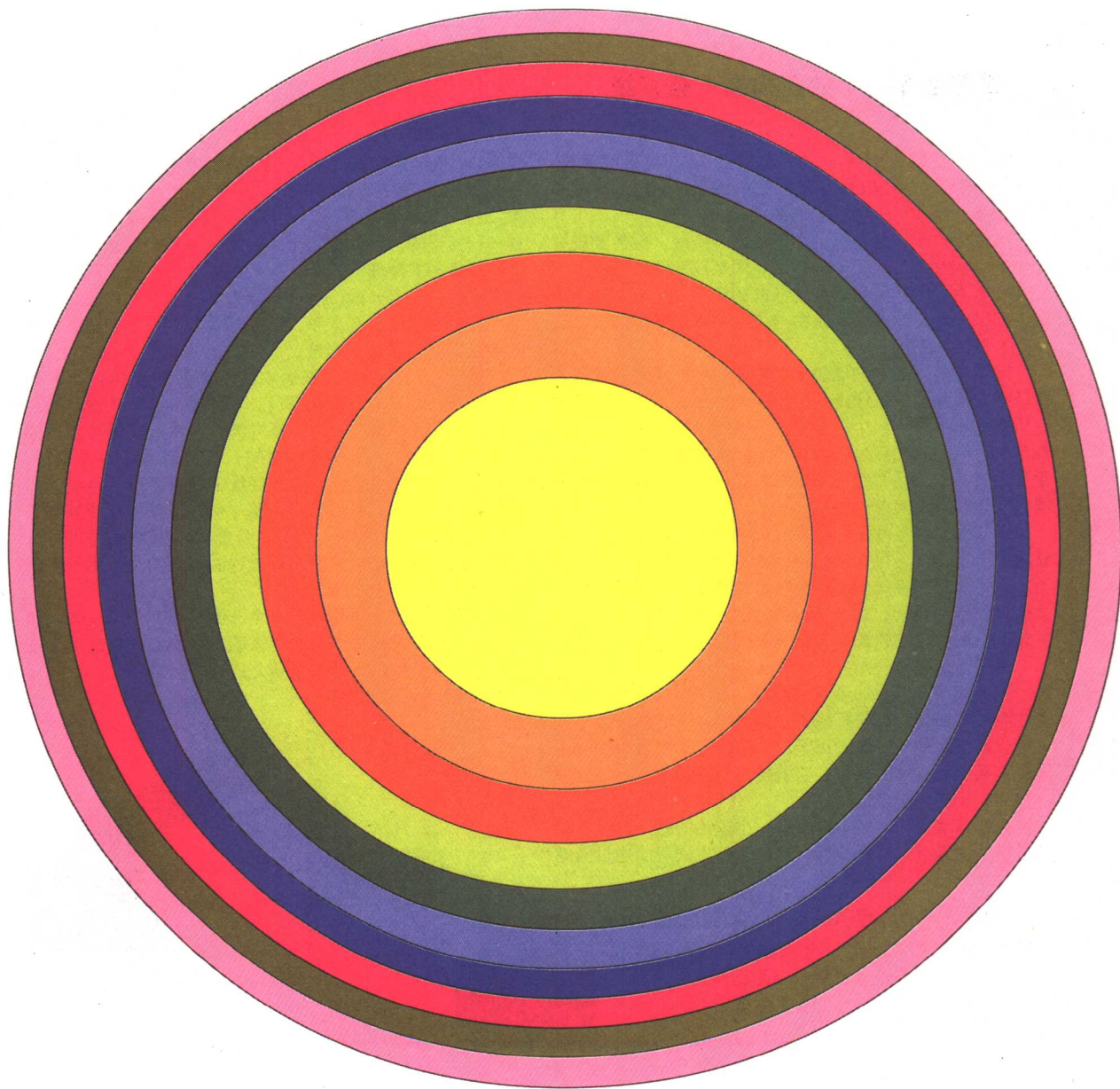
那么，一个无穷大的圆会是个什么样子呢？

答案：第101页

▼ 催人入眠的凝视

你能以最中间那个圆的面积作为基准，估计一下这 10 个同心圆的面积吗？

答案：第 101 页



如果你用一把剪刀作为工具去解答前几页中的趣题，你有没有意识到其实你正在应用一种连接（linkage）？也许没有。但是继续读下去，你就会发现连接对于数学家来说是一种多么有用的物理模型。

❁ 线与连接——如何构造一条直线

空间中的维数是从一个点开始的。欧几里得解释说：“一个点就是没有任何大小的位置。”点是一种维数为零的数学抽象，是我们所能想像的最小空间。

一维来自于一条直线。为了构造一条线，你需要观察一个动点的轨迹。只用一个数字，便足以定位这条线上的任何一个点——确定它与其他任意选择的某个点之间的距离。如果一个空间的点可以由一个数字来定义，那么，这个空间就是一维的。

线是刚性杆的一种理想化，相连的杆的问题在几何学中就是线的问题。力学是几何学的一种形式，一条运动的直线描绘出平面：一个二维空间需要2个数字来定义一个特定的点——偏北多少，偏东多少。连接的移动有一些非常有趣的特点。用图钉把纸板条钉在一起，你自己就可以很容易地构造出简单的连接。

平面上的连接就是一组杆（或者说直线）通过可以活动的接合点彼此连接在一起，或者是通过转轴固定于平面上，这些线可以绕转轴随意旋转。伸缩绘图器就是这样一个连接的极佳范例。它是一种独特的玩具，可以把图画用另外一个尺度描绘轮廓并进行复制（见第83页）。

给定一定数目的刚性杆，那么是否可以找到它们之间的一种连接，使得我们可以通过移动其中一点来构造一条直线呢？试试将一根硬杆绕着一端转动，另外那个活动的一端会如何运动呢？做圆周运动。圆周运动在各种连接中是最容易和最自然的一种，它的特点是在没有一条固定直线存在时构造出直线运动。

在几何学中，这并不仅仅是一个理论问题。蒸汽发动机最自然的运行方式是旋转，这种运行方式可以通过活塞

变为直线运动。但是活塞又需要轴承来带动，而轴承相当容易磨损。连接则可以提供更为令人满意的解决方案。第一个实用性的解决方案是由詹姆斯·瓦特（1736—1819）发现的，它只是一个比较近似的直线运动。瓦特设计的连接的实际曲线是一个拉长的8字形，对于瓦特的目的来说，其中有一段已经相当接近直线了。利用彼此之间通过图钉连接的打孔卡带，你也可以很容易地制造出瓦特的连接以及许多其他连接。

第一台产生精确直线运动的装置诞生于1864年，被称为波赛利连杆（见第83页）。它的基础是一条普遍的几何原理，称为倒置。6根连杆（其中4根长度相等）构成一个“转换器”，如果连接中的一个特定点沿曲线运动，那么，另外一个点将会沿着该曲线的倒置运行。直线的倒置曲线是一个圆。最后一根（第7根）连杆将迫使某一点做圆周运动，而另外一个点则沿着与之相倒置的轨迹运动，就是直线运动。只需一点敏锐的洞察力，原本不可能之事就会变得司空见惯。

一个移动的平面构成了一个三维空间，一个立体，其中任何一点都需要由3个数字来确定。随着连接由平面进入空间，许多新的图形也就随之产生了。

瓦特连接的示意图 当两根旋转杆（蓝色的和绿色的）长度相等时，在机械的整个运动过程中，红色连接的中点（黑点）将画出一条8字形轨迹。如图所示，中间部分的轨迹就是直线的一个很好的模拟。

