

高中数学 专题辅导

第三册

北京西城区数学会
北京西城区教研中心

北京师范大学出版社

高中数学专题辅导

第三册

北京市西城区中学教研中心

北京师范大学出版社

高中数学专题辅导

第三册

北京市西城区中学教研中心

*

北京师范大学出版社出版发行

全国新华书店经销

北京朝阳展望印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 8 字数: 168千

1987年4月第1版

1989年3月第2次印刷

印数: 82 001—90 500

ISBN7-303-00384-3/G·193

定价: 2.55 元

前 言

为配合高三学生数学总复习和高中学生平时的学习，组织我区部分有经验的老师，按照教学大纲的要求，分科分单元编写这套专题练习题，主要目的是在掌握各科所学内容的基础上，灵活地运用所学知识，掌握数学方法以及学科之间的沟通和联系。更快地提高学生分析和解决问题的能力，特别是解综合题的能力。

为方便读者，每部分练习题后均附有答案或提示，为检查复习效果，书末分文理科分别附两套综合练习题。

参加本书编写的有：陈萃联（北京三中）、田佃（北京四中）、孙家钰（北京六中）、韩康年（北京七中）、尹俊森（北京十三中）、戴明源（北京三十九中）、俞裕安（北京四十二中）、高怀英（北京五十六中）、马淑玲（北京一五六中）、张春条（北师大实验中学）、张自文（北师大二附中）及北京西城区教育局中学教研室数学组的同志等。

由于时间较紧，不免有些错误，请批评指正。

北京市西城区中学教研中心

目 录

代数部分	(1)
一 集合与函数.....	(1)
二 不等式.....	(11)
三 复数.....	(15)
四 数列 极限及数学归纳法.....	(20)
五 排列组合与二项式定理.....	(28)
答案或提示.....	(33)
三角部分	(90)
一 三角函数的概念及其性质.....	(90)
二 三角函数的恒等变形.....	(92)
三 反三角函数.....	(95)
四 三角方程.....	(97)
五 解三角形.....	(99)
答案或提示.....	(102)
立体几何部分	(123)
一 直线与平面部分的选择題.....	(123)
二 用反证法证明的问题.....	(124)
三 有关共点 共线 共面的问题.....	(125)
四 有关异面直线的问题.....	(125)
五 有关平行的问题.....	(126)
六 有关垂直的问题.....	(127)

七 有关角的问题.....	(128)
八 有关距离的问题.....	(130)
九 判断题.....	(131)
十 有关柱体的问题.....	(131)
十一 有关锥体的问题.....	(134)
十二 有关台体的问题.....	(135)
十三 有关球的问题.....	(137)
答案或提示.....	(138)
解析几何部分	(163)
一 直角坐标系 曲线和方程.....	(163)
二 直线.....	(164)
三 圆锥曲线.....	(169)
四 极坐标.....	(174)
五 参数方程.....	(176)
答案或提示.....	(180)
综合练习	(221)
理科综合练习一.....	(221)
理科综合练习二.....	(123)
文科综合练习一.....	(226)
文科综合练习二.....	(229)
理科综合练习一答案.....	(231)
理科综合练习二答案.....	(236)
文科综合练习一答案.....	(241)
文科综合练习二答案.....	(244)

代数部分

一 集合与函数

(一) 集合与映射

1. 已知 $A = \{x | x^2 - 2x - 8 < 0\}$, $B = \{x | x - a < 0\}$,
(1) 若 $A \cap B = \phi$, 求 a 的取值范围;
(2) 若 $A \subset B$, 求 a 的取值范围.
2. 已知 A 、 B 是以某些实数为元素的两个集合,
 $A = \{2, 4, a^3 - 2a^2 - a + 7\}$,
 $B = \{-4, a + 3, c^2 - 2a + 2, a^3 + a^2 + 3a + 7\}$,
且 $A \cap B = \{2, 5\}$, 求实数 a , 并求 $A \cup B$.
3. 数集 $X = \{(2n + 1)\pi, n \text{ 是整数}\}$, 数集 $Y = \{(4k + 1)\pi, k \text{ 是整数}\}$
指出: 数集 X 与数集 Y 的关系, 并给出证明.
4. 设 $I = \{x | x \text{ 为小于 } 20 \text{ 的正偶数}\}$, I 为全集,
若 $A \cap \overline{B} = \{12, 14\}$, $\overline{A} \cap B = \{2, 4, 16, 18\}$,
 $\overline{A} \cap \overline{B} = \phi$, 求集合 A 、 B .
5. 设全集 $I = R$, $A = \{x | -5 < x < 5\}$, $B = \{x | 5 \leq x < 7\}$
求 $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A \cup B}$.
6. X 是所有三角形的集合, Y 是所有圆的集合; 映射: 把
每个三角形映射成它的内切圆.

(1) 确定映射的对应关系 $x \rightarrow$ _____ ($x \in X$);

(2) 定义域 _____;

(3) 值域 _____;

(4) 对于每个 $y \in Y$ 的原象有 _____ 个。

7. 在 R 上定义三个函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$, 已知
 $A = \{x | f(x) = 0\}$, $B = \{x | g(x) = 0\}$, $C = \{x | h(x) = 0\}$

(1) 试用集合 A 、 B 、 C 表示 $f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) = 0$ 成立的 x 的集合;

(2) 试用集合 A 、 B 、 C 表示使 $f(x) = 0$ 与 $g(x)h(x) = 0$ 同时成立的 x 的集合。

8. 判断下列集合间的对应关系 $f: A \rightarrow B$,

哪些是从 A 到 B 的映射? 哪些映射是 A 到 B 内的映射?

哪些映射是 A 到 B 上的映射? 哪些是从 A 到 B 上的——映射?

(1) $A = \{\text{矩形}\}$, $B = R^+$, $f: x \in A \xrightarrow{y=x \text{ 的面积}} y \in B$;

(2) $A = \{2, 3\}$, $B = \{3, 5\}$, $f: x \in A \xrightarrow{\frac{x}{y} < 1} y \in B$;

(3) $A = N$, $B = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \dots \right\}$

$f: x \in A \xrightarrow{y = \frac{x}{2x+1}} y \in B$;

(4) $A = [-1, 1]$, $B = [0, 1]$

$f: x \in A \xrightarrow{y = \sqrt{1-x^2}} y \in B$;

(5) $A = R^+ \cup R^-$, $B = R$

$$f: x \in A \xrightarrow{y=x^{\frac{1}{3}}} y \in B;$$

$$(6) A = Z, \quad B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$f: x \in A \xrightarrow{y \text{ 为 } x^2 \text{ 的个位数字}} y \in B.$$

9. 下列的对应是不是集合 A 到集合 B 的映射? 为什么?

$$(1) A = R, x \in R; B = R^+, y \in R^+$$

$$R \xrightarrow{y=|x|} R^+;$$

$$(2) A = \overline{R^-}, x \in \overline{R^-}; B = R^+, y \in R^+$$

$$\overline{R^-} \xrightarrow{x=|y|} R^+;$$

$$(3) A = \overline{R^-}, x \in \overline{R^-}; B = R, y \in R$$

$$\overline{R^-} \xrightarrow{|y|=x} R;$$

$$(4) A = \overline{Q^-}, x \in \overline{Q^-}; B = \overline{R^-}, y \in \overline{R^-}$$

$$\overline{Q^-} \xrightarrow{|y|=x} \overline{R^-}.$$

10. 设 f 表示集合 A 到 B 的映射, 按照下列给定的条件, 求集合 B , 考察哪一个是一一映射, 并求逆映射.

$$(1) A = \{3x | 0 < x < 5 \text{ 且 } x \in Z\}, \text{ 任意 } a \in A,$$

$$f: a \longrightarrow b = \pm \sqrt{a},$$

$$(2) A = \{2x^2 | -1 < x \leq 3 \text{ 且 } x \in Z\}, \text{ 任意 } a \in A,$$

$$f: a \longrightarrow b = 2a.$$

(二) 函数

1. 作出下列函数的图象:

$$(1) y = \frac{3x-4}{x-2}; \quad (2) y = \sqrt{x^2-2x+1} + \frac{|x|}{x};$$

$$(3) y = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}; \quad (4) y = x^{\frac{3}{2}};$$

$$(5) y = (x-1)^{\frac{2}{3}}; \quad (6) y = -(x+1)^{\frac{3}{2}};$$

$$(7) y = |\log_2 x|; \quad (8) y = -\sqrt{1-x^2};$$

$$(9) y = \sin |x|; \quad (10) y = |\sin x|.$$

2. 在 $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ 中, x 为实数, 求 y 的取值范围.

3. 比较大小:

$$(1) \log_{\cos \alpha} \sin \alpha \text{ 与 } \log_{\cos \alpha} \operatorname{tg} \alpha \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2});$$

$$(2) \cos[\lg(2ab)] \text{ 与 } \cos[\lg(a^2+b^2)]$$

$$(1 \leq a \leq 10, \quad 1 \leq b \leq 10).$$

4. 已知 $y = f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$, 证明:

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

5. 已知 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 对于任意实数 x, y 均成立

求证 (1) $f(0) = 0$; (2) $f(-x) = -f(x)$;

$$(3) f(2x) = 2f(x); \quad (4) f\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}f(x).$$

6. $f(x)$ 满足 $af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = cx$ (a, b, c 均为不等于零的常

数且 $a \neq b$), 求 $f(x)$.

7. 已知 $f(x) = \frac{bx+1}{2x+a}$ (a, b 是常数, $ab \neq 2$),

(1) 若 $f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = k$, 求 k ;

(2) 若 $f[f(1)] = \frac{k}{2}$, 求 a, b .

8. 写出由下列图形所表示的函数关系式:

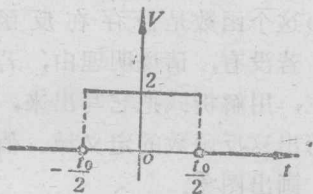


图 1-1

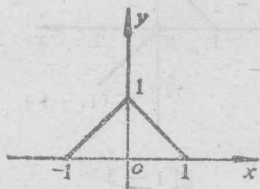


图 1-2

9. m 为怎样的值时, 方程 $2x^2 + (m-2)x + (m-5) = 0$ 的一个根大于 2, 另一根小于 2.

10. k 为何实数时, 方程 $7x^2 - (k+13)x + k^2 - k - 2 = 0$ 的两根, 分别在 $(0, 1)$ 和 $(1, 2)$ 区间内.

11. 已知方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 有一非零根 x_1 , 方程 $-ax^2 + bx + c = 0$ 有一非零根 x_2 .

求证: 方程 $\frac{a}{2}x^2 + bx + c = 0$ 必有一根介于 x_1, x_2 之间.

12. 已知: 方程 $2x^2 - (3m+n)x + mn = 0$ 中, $m > n > 0$, 不解方程, 证明:

(1) 方程有两个不等的实根;

(2) 一个根比 n 大, 另一个根比 n 小.

13. 已知方程 $2x^2 - px + q = 0$ 的解集为 A ,
方程 $6x^2 + (p+2)x + 5 + p = 0$ 的解集为 B ,
又 $A \cap B = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$, 求 $A \cup B$.

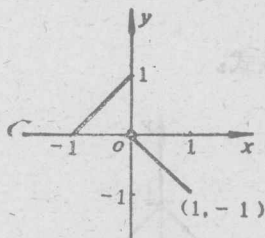


图 1-3

14. 已知函数在 $[-1, 1]$ 的图象如图 1-3 所示

- (1) 写出这个函数的解析式;
(2) 这个函数是否存在反函数? 若没有, 请说明理由, 若存在, 用解析式把它写出来, 并写出这反函数的定义域、值域、画出图象.

15. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $y = (ax^2 - 1) \frac{a^x + 1}{a^x - 1}$;

(2) $y = \log_{\frac{1}{2}} (x + \sqrt{x^2 + 1})$;

(3) $g(x) = F(x) \left[\frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} \right]$, 其中 $a > 0$, $a \neq 1$,

$F(x)$ 是奇函数.

16. 如果将二次函数 $y = -2x^2 + 8x - 5$ 的图象开口反向并向上平移得一新抛物线, 它与直线 $y = mx + 1$ 有一交点 $(3, 4)$. 求:
(1) 这条直线的斜率以及它与 y 轴正方向的夹角;
(2) 这条直线和新抛物线另一交点与原点的距离.

17. 有块尺寸形状如图 1-4 的矩形缺角的钢板, 如用这块钢板截取一个内接矩形, 使它的一个角是钢板的左下角, 问截得矩形长和宽多少时面积最大? 最大面积是多少?

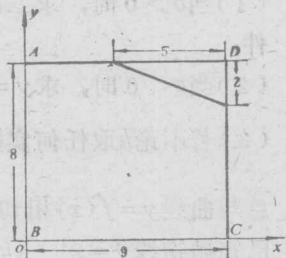


图 1-4

18. 已知 $x^2 + y^2 - 10x + 16 =$

0, 求 $\frac{y}{x}$ 的极值.

19. 已知 $3x^2 + 2y^2 = 6x$, 求 $x^2 + y^2$ 的极值.

20. 已知直角三角形的周长为 10, 求在什么条件下此三角形有最大面积?

21. 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 为单调增函数, 证明若 $g(x) \leq f(x)$, 则 $g[g(x)] \leq f[f(x)]$.

22. 有两个函数 $f(x) = -x^2 + x + p$

及 $g(x) = \frac{2x+3}{x-1}$, 设 $x = \sin t$.

(1) 求使不等式 $1 \leq f(x) \leq \frac{17}{4}$ 对一切 t 都成立的 p 的范围;

围;

(2) 若 $0 \leq t \leq 2\pi$, 求使 $4 \leq g(x) \leq 6 + 2\sqrt{3}$ 成立的 t 的范围.

23. 画出方程 $\sqrt{1-|x|} - \sqrt{1-y} = 0$ 所表示的图形.

24. 已知二次函数 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$).

(1) 当 $b > 0$ 时, 求二次方程 $f(x) = 0$ 没有负根的条件;

(2) 当 $c < 0$ 时, 求 $y = |f(x)|$ 的极值;

(3) 若不论 k 取任何实数, 直线 $y = k(x-1) - \frac{k^2}{4}$

总与曲线 $y = f(x)$ 相切, 求 a 、 b 、 c 的值.

25. 已知抛物线 $y = x^2 - (m^2 + 4)x - 2m^2 - 12$.

(1) 证明: 不论 m 取什么实数, 抛物线与 x 轴一定有两个交点, 且一个交点是 $(-2, 0)$;

(2) m 取什么实数时, 两交点间的距离等于 12?

(3) m 取什么实数时, 两交点间的距离最小? 最小距离是多少?

26. 当 x 取何值时, $y = 2x - 3 + \sqrt{13 - 4x}$ 有极大值, 极大值是多少?

27. 求下列函数的反函数, 并指出其定义域:

$$(1) y = \frac{ax-b}{cx-a}; \quad (2) y = \sqrt[3]{x^3-1};$$

$$(3) y = 3^x + 1; \quad (4) y = \lg(2x) - 1.$$

28. 若 $f(x)$ 的定义域为 $1 \leq x \leq 4$, 求 $f(x^2)$ 、 $f(2x)$ 的定义域.

29. $y = x^2$ 有没有反函数? 在什么情况下才有反函数? 若有反函数, 求其反函数及反函数的定义域和值域.

30. 求下列函数的反函数, 并画出下列函数的图象.

$$(1) y = \sqrt{-x-2}; \quad (2) y = -\sqrt{-2x+2}.$$

(三) 指数函数与对数函数

1. 已知: $\log_a(x^2+1) + \log_a(y^2+4) = \log_a x + \log_a 3$

$+ \log_a y$,

且 x, y 为实数.

求 $\frac{\sqrt{x+y - [(2xy)^{-\frac{3}{2}}]^{-\frac{1}{2}}}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ 的值.

2. 已知: $\frac{x(y+z-x)}{\log_a x} = \frac{y(z+x-y)}{\log_a y} = \frac{z(x+y-z)}{\log_a z}$,

求证: $x^y y^x = z^x x^z = y^z z^y$.

3. 解不等式 $x^{\log_a x + 1} > a^2 x (a > 1)$.

4. 解不等式 $x^{2 - (\log_2 x)^2 - \log_2 x^2} - \frac{1}{x} > 0$.

5. 若 a, b, c 均为不等于 1 的正数, 且 $b = \sqrt{ac}$,

求证: $\frac{\log_a N}{\log_c N} = \frac{\log_a N - \log_b N}{\log_b N - \log_c N}$.

6. 若 $(ac)^{\log_a b} = c^2$, 则 $\log_5 N = \frac{1}{2} [\log_a N + \log_c N]$.

7. 求满足条件 $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1, xyz = 10$,

$x^{\lg x} y^{\lg y} z^{\lg z} \geq 10$ 的 x, y, z 的值.

8. 已知 $\log_2(\sqrt{3}+1) + \log_2(\sqrt{6}-2) = a$, 用 a 表示 $\log_2(\sqrt{3}-1) + \log_2(\sqrt{6}+2)$ 的值.

9. 已知正数 a 的常用对数的首数为 p , 尾数为 $q (q \neq 0)$,

则 $\frac{1}{a}$ 的常用对数的首数、尾数是多少?

10. A, B 均为三位数且 $B \geq 900$, B 的常用对数的尾数是 A 的常用对数尾数的 2 倍, 求 A, B 两数.

11. 已知 $2\lg(x-2y) = \lg x + \lg y$, 求: $x:y$.

12. 若 $f(x) = \log_a x$ 且 $x_1 > 0, x_2 > 0$,

证明: (1) 当 $a > 1$ 时,

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)],$$

(2) 当 $0 < a < 1$ 时,

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)].$$

13. 作函数 $y = 3^{\log_3 x^2} - 2 \cdot 2^{\log_2 x} + 1$ 的图象.

14. (1) 已知 $\lg 2 \approx 0.3010$, 求满足 $2^n > 10000$ 时的最小整数 n ,

(2) 已知 $(0.9)^n < 0.01$ ($\lg 3 = 0.4771$),

求: 整数 n 的最小值.

15. 设 $67^x = 27, 603^y = 81$.

$$\text{证明: } \frac{3}{x} - \frac{4}{y} + 2 = 0.$$

16. 对于正整数 a, b, c ($a \leq b \leq c$) 和实数 x, y, z, w ,
若 $a^x = b^y = c^z = 30^w$,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{w} \text{ 成立. 求 } a, b, c \text{ 的值.}$$

17. 设 m 是实数, 对于方程

$$3^{2x+1} + (m-1)(3^{x+1} - 1) - (m-3) \cdot 3^x = 0,$$

(1) 当 $m = 4$ 时, 解这个方程;

(2) 这个方程有两个不同的根时, 求 m 的取值范围.

18. 在 $f(x) = \frac{a^{x+1} + b^{x+1}}{a^x + b^x}$ 中, a, b 是正数, 若 $x > y$,

比较 $f(x)$ 与 $f(y)$ 的大小.

19. 已知 $a\beta = 10^5$, $\alpha^{1/\beta} = 10^6$ ($0 < \beta \leq a$),

求 $\alpha:\beta$ 的值.

20. t 是实数, $x = 2^t + 2^{-t}$,

$y = 4^t + 4^{-t} - 2a$ ($2^t + 2^{-t} \geq a$) (a 为常数).

(1) 求 y 的最小值;

(2) 当 $y = 0$ 时, 求 x 的值.

二 不等式

1. 设 $a > 0$, $b > 0$, 且 $a + b = 1$,

则 $(a + \frac{1}{a})(b + \frac{1}{b}) \geq \frac{25}{4}$.

2. 求证: $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2$.

3. 若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则 $\operatorname{tg} x + \sin x > 4 \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

4. 已知 $-1 < a < 1$, $-1 < b < 1$,

则 $-1 < \frac{a+b}{1+ab} < 1$.

5. $x \in \mathbb{R}$, 则 $\frac{x^2 - 2x \cos \alpha + 1}{x^2 - 2x \cos \beta + 1}$