数学习题集

分析部分（第一册）

〔法〕E·阿祖莱　M·梅斯里　M·塞尔法蒂　著　刘绍祖　译

高等教育出版社

数学习题集

分析部分

第一册

［法］E.阿祖莱　M.梅斯里　M.塞尔法蒂　著

刘绍祖　译

高等教育出版社

内 容 提 要

本书根据法国高等教育出版社1975年出版 E. Azoulay等著Exercices de Mathématiques, Analyse 第一册第三版译出，原书分析部分共计三册，第二、三册中译本也将陆续出版。第一册包括“实数序列”、“单实变量函数”、“定积分”、“积分学的应用”及“微分方程”共五章，每章首先给出简单精练的课程提要，接着是有完整解法的、富有启发性的例题，最后给出一些附有简单解答的习题。

本书可供高等院校理工科及有关专业师生作为参考书使用。

数学习题集

分析部分

第一册

[法] E.阿祖莱 M.梅斯里 M.塞尔法蒂 著

刘绍祖 译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京顺义县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 10.75 字数 256,000

1989年10月第1版 1989年10月第1次印刷

印数 00 001～02 380

ISBN 7-04-000092-X/O·42

定价：5.35元

序　言

为什么要编写一部新的习题集？为什么要在其中把不同的部类掺和起来，并且穿插着内容丰富而又出人意外的课程提要呢？我在翻阅这套习题集的第一册时，就不禁立即提出这些问题来.

经过思考，我觉得本书的尝试是符合教学本身的实践经验的．一堂数学习题课是怎样进行的呢？教师首先要向学生们重复课程的主要内容．无论是定义，还是概念，还是从它们引出的结论的叙述都要顾及.只有在这以后，教师才要学生做若干习题；然后应该由学生辨明是非，触类旁通，进行比较，也就是人们说的，把课程用于实践.

我认为这几册书可以促进这样一种学习方法．课程提要是全书的纲，它所占的比例是得当的，既不是公式的罗列，也不是详尽无遗的课程，习题是多样化而又循序渐进的.

本习题集也一定会引起学生们的兴趣；我希望他们在解题的时候，也享受作者们在选编本书时同样的乐趣.

阿祖莱、梅斯里和塞尔法蒂三位先生的这一著作一定能达到他们预期的目的，也就是说，帮助那些不畏独立工作、认真攻读的学生更好地消化在正式课程中学到的知识.

我预祝这部书在学生中广为流传，这才不辜负于作者们编纂时的苦心.

南特理学院教授　维维埃（M. VIVIER）

前　言

理学院不久前在教学结构方面经历了一场深刻的改革．特别是在预科，连名称和大纲都有所更改，因此，一部适应新大纲的工具书，可能会受到大学生们的欢迎．

我们确实努力使这部习题集成为常用的工具书，在其中搜集了课程中常见类型的应用题，学生通过解题可以很好地检验他的知识．我们还专门收进了一些比较特殊的问题，从我们的实际教学经验出发，对于那些为我们的学生不理解或理解不透的问题，都毫不犹豫地大大增加了习题的份量．

这部书有八册．头三册适用于数学物理系及物理化学系的一年级和二年级的分析课，也适用于高等数学班和某些工学院的预备班．

第四册与第五册都是代数方面的，包括集合代数（代数结构，常用的域和环）和线性代数，以及多项式的研究．

第六册和第七册是几何方面的内容，并附入一些适合上面已述水平学生的力学练习题．

最后一册包含了同全部课程有关的一般性问题，其中大部分都是大学学院和一些高等工程学院正式考试时拟定的题目．

每一章都有一个课程提要，接着是数量不等的有完整解法的例题，最后给出一些习题，并附有简要的解法或数字答案．

欢迎读者对本书提出意见、建议．

作　者

第一册引言

本册适用于1966年10月1日（学士和硕士学位的新规定）的数学物理系及物理化学系一年级学生的分析课程大纲．本卷也包括了高等数学班和类似班的一部分大纲内容．

本册包含重要程度不同的五章．第一章研究实数序列，说明这一水平上最重要的研究类型，并研究通过实数集拓扑来考察的函数的极限和连续性概念．第二章研究实变量的实函数（求导、图形、极限、局部研究），篇幅要大得多．我们认为复习一下初等函数的基本公式并加强有关极限的练习是有益的，后者从应用的观点和促进学生掌握数学思维的观点来看都是很重要的．

第三章探讨积分的计算和广义积分收敛问题．这里没有同黎曼积分结构有关的理论性练习，而收集了确定情况下的积分技术的习题．我们觉得，不论读者在将来从事哪一个科学部门的工作，这都是十分重要的．我们甚至舍弃了巧妙的解法和关于课程提要中结论的纯粹而简单的应用诀窍的追求．这一章以大量重要的习题（附有答案）结束．我们认为本章是这一卷中最重要的一章．

接下来是很短的一章．内容是研究单积分的几何应用，只涉及最直接的应用问题．实际上本章要由第二册中对重积分和曲线积分的研究加以补充．不过本章中已有曲线积分的一些应用．

在最后一章中，研究了全部理学院预科大纲中列入的各类一阶常微分方程，这里完全解出的练习很多．一般二阶常微分

方程和导致微分方程的几何问题将在第二册（分析部分）加以研究．但是，我们认为，在物理课中有直接重要应用价值的常系数线性二阶微分方程，应在这里先行探讨，这一划分也符合数学物理系和物理化学系一年级的正式大纲．

目　录

第 一 章

实数 序列 连续映射

1. 有理柯西序列

设 Q 是有理数集．我们称一族数

$$(x_n)_{n\in N},\ (\forall n\in N),\ x_n\in Q$$

为 Q 中的序列（或有理序列）．这一族数也可由如下映射来定义：

$$\varphi:\ N\to Q,$$

它使得：

$$(\forall n\in N),\ x_n=\varphi(n).$$

设 x_n 是一有理序列而且 $l\in Q$．我们说当 n 无限增大时 x_n 收敛于 l（或趋于 l，或以 l 为极限），若：

$$(\forall \varepsilon>0),\ (\exists n_0\in N),\ (\forall n\geqslant n_0),\ |x_n-l|\leqslant\varepsilon.$$

我们将 x_n 和 l 之间这种关系记作：

$$\lim x_n=l;\quad \lim_{n\to\infty} x_n=l;\quad \lim_{n} x_n=l.$$

（第二和第三种表示法，当 x_n 除 n 以外还依赖于其他整参数时，是有益的）．

在 x_n 具有极限的情况下，我们说 x_n 是收敛的．

定理：有理序列的极限，当它存在时，是唯一的．

柯西序列：有理序列 x_n 叫做柯西序列，若：

$$(\forall \varepsilon>0),\ (\exists n_0\in N),\ (\forall p\geqslant n_0),\ (\forall q\geqslant n_0),\ |x_p-x_q|\leqslant\varepsilon.$$

定理：任何收敛序列都是一个柯西序列．在下面，柯西序

列集将用 S 表示，

2．有理序列集的结构

设 Q^N 是有理序列的集．对于有理序列，我们定义下列的结合法：

a）加法，记作 $+$：

$$(x_n)_{n\in N}+(y_n)_{n\in N}=(x_n+y_n)_{n\in N};$$

b）同 Q 的元素的乘法（无符号）：

$$\lambda(x_n)_{n\in N}=(\lambda x_n)_{n\in N};$$

c）乘法，记作 $\cdot$

$$(x_n)_{n\in N}\cdot(y_n)_{n\in N}=(x_ny_n)_{n\in N}.$$

对于这三条结合法，Q^N 是在域 Q 上的一个代数．特别地，$(Q^N,+,\cdot)$是一个环．

定义：一个这样的序列$(x_n)_{n\in N}$：

$$(\forall n\in N),\ x_n=a\in Q,$$

叫做一个常序列．我们把它记作(a)．

定理：我们有

$$\lim(a)=a.$$

此外，$(Q,+,\cdot)$ 除了如下一个同构外：

$$(a)\longmapsto a,$$

是 $(Q^N,+,\cdot)$的一个子域．

3．实数集 R

等价于零的序列：序列 x_n 叫做等价于零的，若

$$\lim x_n=0,$$

并且我们记作：　　　$x_n \# 0.$

等价序列：两个序列 x_n 和 y_n 叫做等价的，若序列

$$z_n = x_n - y_n$$

是等价于零的。这种关系记作：

$$x_n \# y_n.$$

定理：关系 # 是在 Q^N 上的、同代数的结构相容的一种等价关系．$(x_n)_{n\in N}$ 的类写作 $\bar{x}_n$.

定义：实数集是 S 对于 # 的商集①，记为 $\boldsymbol{R}$：

$$\boldsymbol{R} = S/\#.$$

定理：对于由 Q^N 的结合法通过等价 # 所诱导出的结合法 $+$，$\cdot$ 来说，$\boldsymbol{R}$ 是一个域．$x = \bar{x}_n \neq \bar{0}$ 的逆元素是 $y = \bar{y}_n$，其中序列 y_n 被定义为

$$y_n = \frac{1}{x_n} \quad 若 \quad x_n \neq 0,$$

$$y_n = 0 \quad 若 \quad x_n = 0.$$

实数域 $\boldsymbol{R}$ 的性质.

性质 1：$\boldsymbol{R}$ 是一个有序域，它的正元素是被这样确定的：

$$\bar{x}_n > 0 \Leftrightarrow (\exists n_0 \in N),\ (\exists a \in Q^+),\ n \geqslant n_0 \Rightarrow x_n \geqslant a.$$

此外 Q 是 $\boldsymbol{R}$ 的一个子域，其本来顺序与由 $\boldsymbol{R}$ 的顺序诱导出的顺序是一致的。

性质 2：$\boldsymbol{R}$ 是一个阿基米德域

（即若 $0 < \alpha < \beta$，$(\exists p \in N): p\alpha > \beta$.）

4. $\boldsymbol{R}$ 中的序列. $\boldsymbol{R}$ 的其他性质

我们就像对有理序列定义收敛性那样来定义 $\boldsymbol{R}$ 中序列的收敛性，也像那样定义 $\boldsymbol{R}$ 中的柯西序列。

---

① 译者注：若 E 是一在集合 S 上的等价关系，则与它相关联的等价类集 $\pi = \{\bar{a} \mid a \in S\}$ 叫做 S 对于关系 E 的商集，记作 S/E．（参看 Nathan Jacobson, Basic Algebra 1, 10—12 页）.

关于收敛序列的运算．

在下面，$(x_n)_{n\in N}$ 和 $(y_n)_{n\in N}$ 表示两个收敛于极限 x 和 y 的序列。

a）$\lim(x_n+y_n)=x+y$；

b）$\lim(x_n-y_n)=x-y$；

c）$(\forall\lambda\in\boldsymbol{R})$，$\lim(\lambda x_n)=\lambda x$；

d）$\lim(x_ny_n)=xy$；

e）若 $x\neq 0$，而且序列 z_n 是被这样定义的：$z_n=0$ 若 $x_n=0$；$z_n=\dfrac{1}{x_n}$ 若 $x_n\neq 0$，于是

$$\lim z_n=\frac{1}{x};$$

f）$\lim|x_n|=|x|$．

趋于无穷大的序列．

序列 x_n 趋于 $+\infty$（或 $-\infty$）若：

$$(\forall A>0),\ (\exists n_0\in N):\ n\geqslant n_0\Rightarrow x_n>A$$

$$(\text{或}\forall A<0,\ \exists n_0\in N:\ n\geqslant n_0\Rightarrow x_n<A).$$

这样的序列是不收敛的（我们叫作**发散的**）序列的一种特殊情况。我们在例题中将会看到其他情况。

定理：$\boldsymbol{R}$ 是一个完全域（即任何实数柯西序列都是收敛序列）．由此可见：一个实数序列在而且仅在它是柯西序列时才收敛，而且它的极限是唯一的．

定义：$\boldsymbol{R}$ 中的两个序列 x_n 和 y_n 叫做邻接的序列，若：

a）$(\forall n\in N)$：$x_n\leqslant y_n$；

b）序列 x_n（相应地 y_n）是递增的（相应地是递减的）；

c）$\lim(y_n-x_n)=0$．

定理：两个邻接的序列都是柯西序列而且有相同的极限．

区间原理：设 $(I_n)_{n\in N}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 中的一族闭区间：

$$(\forall n\in N),\ a_n\in\boldsymbol{R},\ b_n\in\boldsymbol{R},\ I_n=[a_n,b_n]$$

且满足：

a）$(\forall n\in N)$：$I_{n+1}\subset I_n$.

b）$\lim(b_n-a_n)=0$（I_n 之长趋于0）. 则存在唯一一点 λ 属于所有 I_n，也就是

$$(\exists\lambda\in\boldsymbol{R}):\ \{\lambda\}=\bigcap_{n\in N}I_n.$$

上界和下界. 上确界和下确界.

定义：

a）设 $A\subset\boldsymbol{R}$ 和 $M\in\boldsymbol{R}$. 我们说 M 是 A 的一个上（或下）界，若：

$$(\forall x\in A),\ x\leqslant M\quad（或\ x\geqslant M）.$$

这时我们说 A 是上（或下）有界的.

b）设 b 是 $A\subset\boldsymbol{R}$ 的一个上(或下)界. 我们说 b 是 A 的上（或下）确界，若：

$$(\forall\varepsilon>0),\ A\cap]b-\varepsilon,\ b]\neq\varnothing\quad（或A\cap[b,\ b+\varepsilon[\neq\varnothing）.$$

集 $A\subset\boldsymbol{R}$ 的上（或下）确界，当它存在时，**是唯一的**. 我们将它记作

$$b=\sup A\quad（或\ b=\inf A）.$$

定理：$\boldsymbol{R}$ 的每一个非空上（或下）有界子集都有一个上（或下）确界.

推论：每一个递增(或递减)且上（或下）有界的序列是**收敛的**，而且它的极限是它的元素集的上（或下）确界.

定义：设 $A\subset\boldsymbol{R}$ 和 $B\subset\boldsymbol{R}$；我们说 A 和 B 是**邻接集**，若：

a）$(\forall x\in A)$，$(\forall y\in B)$，$x\leqslant y$.

b）$(\forall\varepsilon>0)$，$(\exists x\in A)$，$(\exists y\in B)$：$y-x<\varepsilon$.

定理：若 A 和 B 是邻接集，则有：

$$\sup A=\inf B.$$

此外，以后还将提到的在闭区间上的连续映射的性质，可以用来建立如下结果。

定理：设有连续映射

$$f:[a,b]\to \boldsymbol{R}.$$

于是，若 $[a,b]$ 中的序列 x_n 收敛于 l，则序列 $f(x_n)$ 收敛于 $f(l)$，也就是

$$\lim f(x_n)=f(\lim x_n).$$

推论：

a）若 $\lambda>0$，则对于任一整数 p，方程

$$x^p=\lambda$$

有一唯一正根，记作 $\lambda^{\frac{1}{p}}$.

b）若一收敛序列 x_n 满足

$$x_{n+1}=f(x_n)①$$

而且 f 是连续的，则 x_n 的极限 l 使等式

$$l=f(l)$$

成立。

复数序列.

在第 4 册第三章，我们将会看到复数域 C 的定义和性质。在这里我们提一下 C 中序列的性质.

定义：复数序列 $(z_n)_{n\in N}$ 是收敛的，具有极限 z，若：

$$(\forall\varepsilon>0),\ (\exists n_0\in N),n\geqslant n_0\Rightarrow|z_n-z|\leqslant\varepsilon.$$

定理：要使复数序列 $z_n=a_n+ib_n$ 是收敛的，必须且只须序列 a_n 和序列 b_n 都是收敛的，而且

$$\lim z_n=\lim a_n+i\lim b_n.$$

定理：C 是一个完全域.

---

① 一个这样的序列叫做《递归》序列；

5. $\boldsymbol{R}$ 中的开集和闭集. 拓扑性质

定义:

a) 设 $A\subset\boldsymbol{R}$. 我们称 A 是开集, 若:

$$(\forall x\in A),\ (\exists h>0):\ ]x-h,x+h[\subset A.$$

b) 我们称 A 是闭集, 若 $\boldsymbol{R}-A$ 是开集.

定理: $\boldsymbol{R}$ 中的开子集的集 $\mathscr{O}$($\mathscr{O}\subset P(\boldsymbol{R})$) 具有下列性质:

O1) $\boldsymbol{R}\in\mathscr{O}$ 而且 $\phi\in\mathscr{O}$.

O2) 任意个开子集的并集仍是一个开子集.

O3) 任意**有限个**开子集的交集仍是一个开子集.

定理: $\boldsymbol{R}$ 中的闭子集的集 $\mathscr{F}$ 具有下列性质:

F1) $\boldsymbol{R}\in\mathscr{F}$ 而且 $\phi\in\mathscr{F}$.

F2) 任意个闭集的交集仍是一个闭集.

F3) 任意有限个闭集的并集仍是一个闭集.

$\boldsymbol{R}$ 的拓扑: 当集 X 的一个子集族 $\mathscr{O}$ 具有性质 O1),O2),O3) 时, 这里已用 X 代替 $\boldsymbol{R}$, 我们说 $\mathscr{O}$ 是 X 上的一个拓扑, 而且 $(X,)\mathscr{O}$是一个拓扑空间。因此这里 $(\boldsymbol{R},\mathscr{O})$就是一个拓扑空间, 并且 $\mathscr{O}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的自然拓扑.

下列定义和性质是有关拓扑空间$(\boldsymbol{R},\mathscr{O})$的结构的.

定义:

a) 邻域: 设 A 和 V 是 $\boldsymbol{R}$ 的两个子集。我们说 V 是 A 的一个邻域, 若 V 有一个包含 A 的开子集, 即:

$$(\exists\Omega\in\mathscr{O}),\ A\subset\Omega\subset V.$$

若 $A=\{x\}$,我们说 V 是 x 的邻域. x 的邻域集记作 $\mathfrak{v}(x)$.

b) 内部: 设 $A\subset\boldsymbol{R}$ 而且 $x\in\boldsymbol{R}$.我们说 x 是 A的一个内点, 若 A 是 x 的邻域. 集 A 的内点集叫做 A 的内部并记作 $\mathring{A}$.

c) 附贴部: 设 $A\subset\boldsymbol{R}$ 而且 $x\in\boldsymbol{R}$. 我们说 x 是 A 的一个附贴点, 若 x 的每个邻域都同 A 相交. A 的附贴点的集叫做 $\dot{A}$

的附贴部并记作 $\overline{A}$.

d) 聚点. 孤立点: 设 $x\in\overline{A}$. 我们说 x 是 A 的一个聚点, 若 x 的任一邻域都同 $A-\{x\}$ 相交, 即同 A 相交于除 x 之外的其它点. A 的不是聚点的附贴点叫做 A 中的孤立点, 并且满足:

$$x \text{ 是 } A \text{ 中的孤立点} \Leftrightarrow (\exists V\in\mathscr{V}(x)),\ \mathscr{V}\cap A=\{x\}.$$

e) 边界: 即集

$$\overline{A}\cap\overline{C_A}.$$

拓扑性质.

在下面, 我们多半以简略的形式列举出同 R 的拓扑有关的一些常见性质.

a) $A=\mathring{A}\Leftrightarrow A$ 是它每一点的邻域 $\Leftrightarrow A$ 是开集;

$A=\overline{A}\Leftrightarrow A$ 的每一个附贴点在 A 中 $\Leftrightarrow A$ 是闭集.

b) $\mathring{A}$ (或 $\overline{A}$) 是含于 (或包含) A 的最大 (或最小) 开集 (或闭集).

c) $V\in\mathscr{V}(x)$ 而且 $V'\supset V\Rightarrow V'\in\mathscr{V}(x)$;

$V\in\mathscr{V}(x)$, $W\in\mathscr{V}(x)\Rightarrow V\cap W\in\mathscr{V}(x)$.

d) 要使一实数 λ 是一序列 x_n 的极限, 必须而且只须:

$$(\forall V\in\mathscr{V}(\lambda)),\ (\exists n_0\in N): n\geqslant n_0\Rightarrow x_n\in V.$$

e) $x\in\overline{A}\Leftrightarrow$ 在 A 中有一个收敛于 x 的元素序列.

f) $x\in\overline{A}\Leftrightarrow(\forall h>0)$, $]x-h,\ x+h[\ \cap A\neq\varnothing$.

g) x 是 A 的一个聚点 $\Leftrightarrow$ 存在一个 A 中的元素序列 $(x_n)_{n\in N}$ 收敛于 x, 而且还满足

$$(\forall n\in N),\ x_n\neq x.$$

h) 设 x 和 y 是二实数, $x\neq y$. 于是 x 和 y 具有不相交的邻域, 即:

$$x\neq y\Rightarrow(\exists V\in\mathscr{V}(x)),\ (\exists W\in\mathscr{V}(y)).\ V\cap W=\phi.$$

这个性质可被陈述为：

《空间$(R, \mathscr{O})$是分离的》

i) 要使$V \in \mathscr{V}(x)$，必须而且只须：

$$(\exists \varepsilon > 0):]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset V.$$

我们说 R 中的子集族

$$(]x-\varepsilon, x+\varepsilon[)_{\varepsilon>0}$$

是 x 的在$(R, \mathscr{O})$中的一个**邻域基**.

6. 波尔查诺-魏尔斯特拉斯定理与波莱尔-勒贝格定理．序列的附贴值

波尔查诺－魏尔斯特拉斯定理：每一个**无限**而且**有界**的实数集都有一个聚点.

定义：设 $A \subset R$. 我们说 A 是**紧致的**，若从 A 的每一个开集复盖，我们都能提出 A 的一个有限开集复盖，即：

$$A \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i;\ \forall i \in I,\ \Omega_i \in \mathscr{O} \Rightarrow \exists J \subset I,\ J \text{ 有限},\ A \subset \bigcup_{i \in J} \Omega_i.$$

注意：我们可以用"区间"来代替"集"得到一个等价的定义.

波莱尔－勒贝格定理（及其逆定理）.

要使 $A \subset \boldsymbol{R}$ 是紧致的，必须而且只须 A 是闭的和有界的. 特别是 R 中的每一个闭区间$[a,b]$都是紧致的.

附贴值.

设$(x_n)_{n \in N}$是一个实数序列. 我们说 $\lambda \in \boldsymbol{R}$ 是序列 x_n 的一个**附贴值**，若：

$$(\forall \varepsilon > 0), (\forall n_0 \in N), (\exists n \geqslant n_0): |x_n - \lambda| < \varepsilon$$

（即在序列中至少有一个指标任意大的元素，如我们所希望的那样接近于 λ）.

等价定义：λ 是序列 x_n 的一个附贴值，若：