

内 部

粒子动力学和电子离子光学第二次学术讨论会

会 議 文 集

第 三 分 册

中国核学会粒子加速器学会

一九八五年五月 温州

第三分册 目 录

- 1 · 强流带电粒子束的传输矩阵理论
- 2 · 带电粒子光学中的计算方法
- 3 · 跑道式电子迴旋加速器的单粒子跟踪计算
- 4 · 400 KeV 离子注入机的光路设计及调试结果
- 5 · 600 千电子伏重离子注入和离子束分析两用机
模拟试验台的光学、物理设计和实验结果

粒子动力学与电子离子
光学讨论会论文

* 微传输矩阵及其在强流带电粒 *
* 子束光学计算中的应用 *

邵庆长

中国科学院高能物理研究所

一九八五年三月

在设计加速器和其它带电粒子束装置时，经常使用传输矩阵理论^{〔1〕}。这是一种很方便的方法。近年来，传输矩阵理论已被推广到强流束。这时我们需要使用包含空间电荷效应的传输矩阵，即强流传输矩阵^{〔2, 3〕}。

但是，对于较复杂的束流光学元素，我们往往难于计算它的传输矩阵，特别是强流传输矩阵。在这种情况下需要寻求其它的方法。

本文提出了微传输矩阵的概念，并将它应用于强流束的束流光学计算。由于静电透镜的传输矩阵难于推导，本文将主要讨论静电透镜系统。

为简单起见我们只讨论非相对论情况，但它容易推广到相对论情况。

微传输矩阵

带电粒子束在束流光学系统中运动时，我们可以选择其中一个特定粒子为参考粒子，以其轨迹为束轴。采用右手直角坐标系，以束轴方向为Z方向。任意粒子的运动状态可用列矢量 x 表示：

$$x = \begin{pmatrix} x \\ \theta \\ y \\ \phi \\ L \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

以纵向坐标Z为自变量， x 和 y 为粒子的横向坐标， $\theta = x'$ ， $\phi = y'$ （'表示对Z的导数）， L 为粒子对参考粒子的轨迹长度差， σ 为粒子对于参考粒子的动量差与参考粒子动量之比。Z = Z₀处和Z = Z₁处 x 间的关系为

$$x(Z) = R(Z_0, Z)x(Z_0) + T(Z_0, Z)x(Z_0)x(Z_0) + \dots (2)$$

式中 R 与 T 为区间 (Z_0, Z) 的一阶与二阶传输矩阵。若用 $x_1, x_2, \dots, x_6$ 代替 x , $\rho \dots \sigma$, 则上式可写成

$$x_i(Z) = \sum_{j=1}^6 R_{ij}(Z_0, Z)x_j(Z_0) + \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 T_{ijk}(Z_0, Z)x_j(Z_0)x_k(Z_0) + \dots \quad i=1, 2 \dots 6. \quad (8)$$

现在讨论由 $Z = Z$ 到 $Z + \Delta Z$ 这一小区间的传输矩阵。当 $\Delta Z \rightarrow 0$ 时 R 趋近于单位矩阵 I , T 趋近于零矩阵。定义

$$D(Z) = \lim_{\Delta Z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta Z} [R(Z, Z+\Delta Z) - I] \quad (4)$$

与

$$E(Z) = \lim_{\Delta Z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta Z} T(Z, Z+\Delta Z) \quad (5)$$

为 $Z = Z$ 处的一阶与二阶微传输矩阵。类似地可定义二阶以上的微传输矩阵。

我们知道粒子运动状态的变化可用微分方程表示

$$x'_i = \sum_{j=1}^6 a_{ij}x_j + \sum_{i=1}^6 \sum_{k=1}^6 b_{ijk} x_i x_k + \dots \quad i = 2, 4, 5, 6 \quad (6)$$

$$x'_1 = x_2, \quad x'_3 = x_4 \quad (7)$$

式中 a_{ij} , b_{ijk} 是 Z 的函数, 它们决定于电磁场的分布和粒子能

量。比较式(3)~(7)，可以得到 a_{ij} , b_{ijk} 与微传输矩阵元的关系：

$$D_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i = 2, 4, 5, 6, \\ 1, & i = 1, 3, j = i+1, \\ 0, & i = 1, 3, j \neq i+1, \end{cases} \quad (8)$$

$$E_{ijk} = \begin{cases} b_{ijk}, & i = 2, 4, 5, 6, \\ 0, & i = 1, 3. \end{cases} \quad (9)$$

一个直流光学系统中由 $Z = Z_0$ 到 $Z_0 + L$ 的一阶传输矩阵可由比区间中各点的一阶微传输矩阵构成的无穷乘积表示：

$$R(Z_0, Z_0 + L) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^{N-1} \left[I + D \left(Z_0 + \frac{nL}{N} \right) \frac{L}{N} \right] \quad (10)$$

在实际计算时只要 N 足够大即可得到满意的结果。我们可利用下述公式逐段计算：

$$R_{ij} \left(Z_0, Z_0 + \frac{\eta+1}{N} L \right) = \sum_{K=1}^{\eta} R_{ik} \left(Z_0, Z_0 + \frac{\eta}{N} L \right) \left(\delta_{kj} + D_{kj} \left(Z_0 + \frac{\eta}{N} L \right) \frac{L}{N} \right),$$

$$i, j = 1, 2, \dots, 6. \quad (11)$$

此处

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases} \quad (12)$$

类似地

$$T_{ijk} \left(Z_0, Z_0 + \frac{\eta+1}{N} L \right) = \sum_{l=1}^{\eta} \left(\delta_{il} + D_{il} \left(Z_0 + \frac{\eta}{N} L \right) \frac{L}{N} \right) \times$$

$$T_{lj,k}(Z_0, Z_0 + \frac{\eta}{N} L) + \sum_{l=1}^6 \sum_{m=6}^6 E_{l,m}(Z_0 + \frac{\eta}{N} L) R_{lj,k}(Z_0, Z_0 + \frac{\eta}{N} L) R_{mk}(Z_0, Z_0 + \frac{\eta}{N} L) \frac{L}{N},$$

$$i, j, k = 1, 2, \dots, 6. \quad (13)$$

注意 $R(Z_0, Z_0) = I$, $T(Z_0, Z_0) = 0$ 。

按照式(11)、(13)编写程序进行计算是很容易的。

微传输矩阵的计算

下面我们研究几种束流光学元素的微传输矩阵。

1. 漂移空间 根据定义(4)、(5)，我们可由漂移空间的传输矩阵写出其一阶与二阶微传输矩阵 D_d 与 E_d 。

$$D_d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$E_{d_{111}} = E_{d_{222}} = -\frac{1}{2}, \quad E_{d_{333}} = -1, \quad (15)$$

其余的二阶微传输矩阵元为 0。

为了方便，我们常把微传输矩阵分解为两矩阵之和，

$$D = D_d + D_f, \quad E = E_d + E_f \quad (16)$$

D_d 与 E_d 为漂移空间的一阶与二阶微传输矩阵， D_f 与 E_f 是微传输矩阵中与外电磁场有关的部分。

2 轴对称静电透镜 在静电场中粒子的运动方程为

$$X'' = \frac{1+X'^2+Y'^2}{2U} (E_x - X' E_z), \quad (17)$$

$$Y'' = \frac{1+X'^2+Y'^2}{2U} (E_y - Y' E_z).$$

这里 U 为静电场的电位 (我们采用规范化电位, 它等于粒子在该处的动能除以粒子电荷), E 为电场强度。在轴对称静电透镜中

$$E_x = -\frac{1}{2} U_0'' X + \dots \quad (18)$$

$$E_y = -\frac{1}{2} U_0'' Y + \dots$$

$$E_z = U_0' - \frac{1}{2} U_0''' (X^2 + Y^2) + \dots$$

U_0 为轴上的电位。代式(18)入式(17)得

$$X'' = -\frac{1}{2U_0} (\frac{1}{2} U_0'' X + U_0' X') + \dots \quad (19)$$

$$Y'' = -\frac{1}{2U_0} (\frac{1}{2} U_0'' Y + U_0' Y') + \dots$$

此外, $\delta' = -\frac{U_0'}{U_0}$, 根据式(8)、(9)可得

$$D_f = -\frac{1}{U_0} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} U_0'' & \frac{1}{2} U_0' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} U_0'' & \frac{1}{2} U_0' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_0' \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$E_f = 0. \quad (21)$$

3. 平面场静电透镜 若静电透镜中 U 与 Y 无关且对于 YZ 平面对称, 则

$$\begin{aligned} E_X &= -U_0'' Y + \dots \\ E_Y &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$E_Z = U_0' - \frac{1}{2} U_0''' Y^2 + \dots$$

$$D_f = -\frac{1}{U_0} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} U_0'' & \frac{1}{2} U_0' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} U_0''' & \frac{1}{2} U_0'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_0' \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$E_f = 0. \quad (24)$$

4. 四极透镜 在四极透镜中粒子运动方程为

$$\begin{aligned} \phi' = x'' &= -K_x x + K_y \delta + \dots \\ \phi' = y'' &= K_x x - K_y \delta + \dots \end{aligned} \quad (25)$$

对于电透镜 $K = \frac{2qV_s}{a^2 v^2}$, 对于磁透镜 $K = \frac{\eta B_m}{a v}$, η 为粒子的速度与荷质比, a 为透镜孔半径, V_s 为电极偏压, B_m 为磁极端的磁感应强度。

$$D_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

$$E_{f_{x10}} = K, \quad E_{f_{x20}} = -K. \quad (27)$$

其余的二阶微传输矩阵元为0。

5 偏转磁铁 用类似方法可导出

$$D_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_x & 0 & 0 & 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_y & 0 & 0 & 0 \\ -h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} E_{f211} &= (2-n-1-\beta)h^2, E_{f212}=h^2, E_{f213}=(2-n)h^2, \\ E_{f222} &=\frac{1}{2}h, E_{f223}=\frac{1}{2}(h^2-nh^2+2\beta h^2), E_{f234}=h^2, \\ E_{f244} &=-\frac{1}{2}h, E_{f255}=-h, E_{f412}=2(\beta-n)h^2, \\ E_{f424} &=h^2, \end{aligned} \quad (29)$$

$$E_{f433}=-h^2, E_{f434}=h^2, E_{f435}=nh^2, E_{f512}=nh^2$$

其余的二阶微传输矩阵元为0。式中 n, β 为磁场指数, h 为束轴的曲率(偏转半径的倒数), $K_x=-(1-n)h^2, K_y=-nh^2$ 。

空间电荷效应

在强流的情况下必须考虑束的空间电荷效应。

对于截面为椭圆的均匀连续束, 选择椭圆两轴为 x, y 方向, 则其空间电荷场可表示为^[3]

$$E_x = K_x x, \quad E_y = K_y y, \quad E_z = K_z z. \quad (30)$$

这里

$$K_x = \frac{pb}{\varepsilon_0(a+b)}, \quad K_y = \frac{pa}{\varepsilon_0(a+b)}, \quad K_z = 0. \quad (31)$$

P 为束的空间电荷密度, ϵ_0 为真空介电常数, a, b 为椭圆在 x, y 方向的半径。

对于束团为椭球的均匀脉冲束, 若椭球一轴沿 z 方向, 选择其它两轴为 x, y 方向, 则其空间电荷场亦可用式 (30) 表示, 但

$$K_x = \frac{P_0 b c}{\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)^{\frac{3}{2}} (b^2 + s)^{\frac{1}{2}} (c^2 + s)^{\frac{1}{2}}} \quad (32)$$

K_y, K_z 的表达式与 K_x 类似, a, b, c 为椭球在 X, Y, Z 方向的半径。

在考虑空间电荷效应的情况下, 微传输矩阵还包含与空间电荷效应有关的部分。以一阶微传输矩阵为例,

$$D = D_d + D_f + D_{sc} \quad (33)$$

$$D_{sc} = \frac{1}{2U_0} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_z & 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

在弱流情况下 $D_{sc} \approx 0$ 。

对于非均匀束还应讨论高阶微传输矩阵中与空间电荷效应有关的部分。但是, 对于空间电荷密度分布对 $X=0$ 和 $Y=0$ 两平面对称的连续束, 以及束团空间电荷密度分布对 $X=0, Y=0, Z=0$ 三平面对称的脉冲束, 二阶微传输矩阵与空间电荷效应无关。

在强流束光学计算中的应用

在强流情况下，由于空间电荷效应与束参量有关，传输矩阵包含着束参量。因此，传输矩阵的计算必须和束矩阵（ σ 矩阵）的计算结合起来进行。由于一些束参量（如束半径）是随纵向坐标变化的，这种变化又是无法在计算前预知的，因此需要把计算区间分成许多小段逐段进行计算。

前面已经提到，对于较复杂的束流光学元素，例如静电透镜，强流传输矩阵是难以推导出来的。而微传输矩阵的推导则容易得多。因此用微传输矩阵代替传输矩阵进行计算是很合适的。

我们仅研究一阶计算。将计算区间（ Z_0, Z_0+L ）分为 N 个等长的小段。按以下步骤逐段进行计算。

$$1 \quad \text{由 } Z = Z_0 + \frac{\eta}{N} L \text{ 处的束参量计算一阶微传输矩阵 } D(Z_0 + \frac{\eta}{N} L),$$

$$2 \quad \text{利用式(14)计算一阶传输矩阵 } R(Z_0, Z_0 + \frac{\eta+1}{N} L),$$

$$3 \quad \text{利用下式计算 } Z = Z_0 + \frac{\eta+1}{N} L \text{ 处的束矩阵。}$$

$$\sigma(Z_0 + \frac{\eta+1}{N} L) = R(Z_0, Z_0 + \frac{\eta+1}{N} L) \sigma(Z_0) R^T(Z_0, Z_0 + \frac{\eta+1}{N} L). \quad (35)$$

此处 R^T 为 R 的转置矩阵。由束矩阵即可获知该处的束参量。

重复以上步骤即可完成强流束的光学计算。

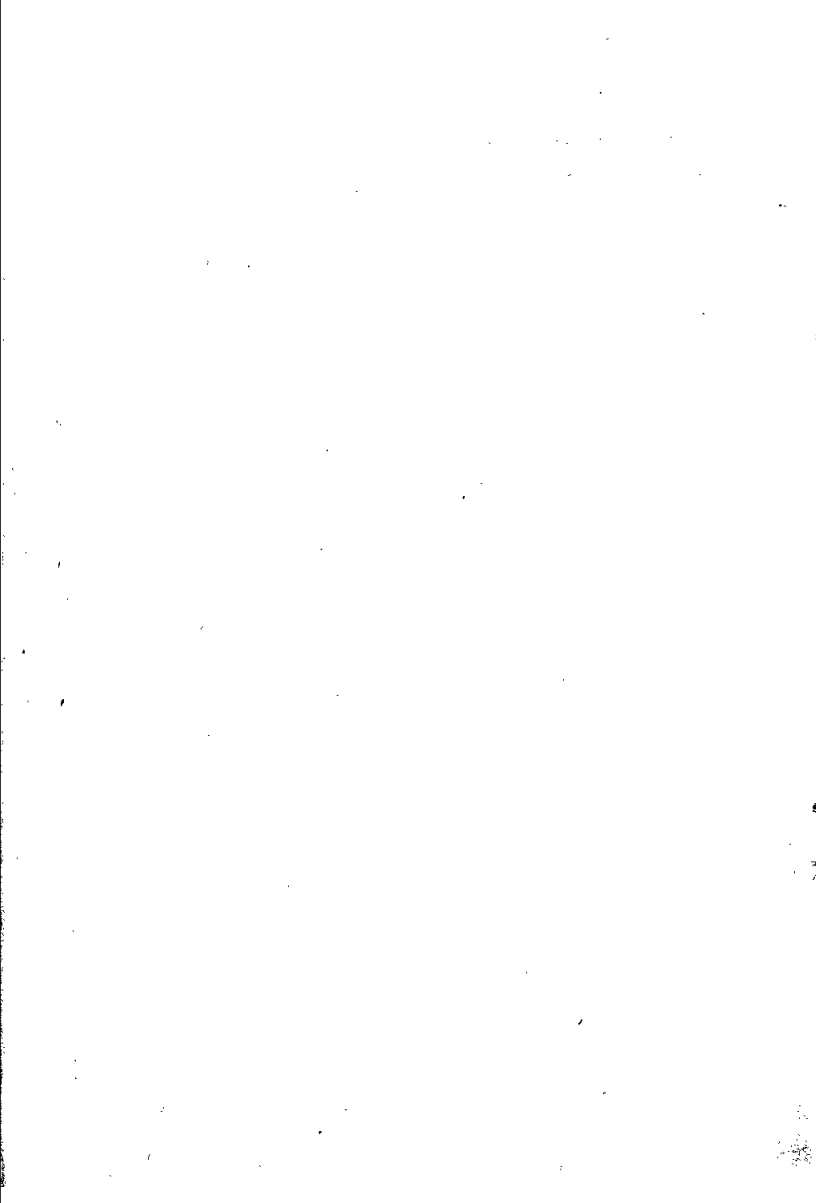
最后我们讨论一下微传输矩阵法的计算精度。看一个简单的例子，计算长 100cm ， $K=50\text{m}^{-2}$ 的四极透镜的一阶传输矩阵。这一矩阵也可用解析法求出（在电子光学书籍可找到其解析表达式，如〔4〕）。表 1 列出了计算结果。可以看出，随着分段数 N 的增加计算误差迅速减小。这表明这种方法是有效的。虽然随着计算区间长度的增加误差将会加大，但是对于一般的强流束光学计算仍然是适用的。

表 1 理想四极透镜的一阶传输矩阵元
透镜长度 100cm ， $K=50\text{m}^{-2}$

计算方法		R_{11}	R_{21}	R_{12}	R_{22}	误差
微 传 输 矩 阵 法	$N=10$	0.780	4.703	1.230	5.303	$\sim 25\%$
	$N=20$	0.770	4.650	1.245	5.362	$1 \sim 1.5\%$
	$N=50$	0.764	4.616	1.254	5.401	$\sim 0.5\%$
	$N=100$	0.762	4.605	1.257	5.414	$< 0.3\%$
解析方法		0.7602	4.5936	1.2606	5.4272	0

参 考 文 献

- (1) K.L.Brown , *Advances Particle Phys.*
1(1967) 71.
- (2) 郁庆长, 原子核物理, 4 (1982) 249.
- (3) 郁庆长, 强流离子光学原理, 原子能出版社, 1982.
- (4) E. Regenstein , *Focusing of Charged
Particles, Vol. 1. Academic Press,*
1967, 353.



带电粒子光学中的计算方法

茅 乃 丰

中国原子能科学研究院

一九八五年四月