加权残值法的理论与应用

邱吉宝 著

宇航出版社

加权残值法的理论与应用

邱 吉 宝 著

(国家自然科学基金资助)

宇 航 出 版 社

（京）新登字181号

内 容 简 介

本书从偏微分方程数值解的角度，阐述方差泛函变分原理与对偶空间原理。构造方差泛函极小化序列，导出最小二乘变分方程；构造近似方差泛函极小化序列，导出广义伽辽金变分方程；建立弱对偶空间原理，说明里兹变分方程是弱对偶空间原理的特殊情况。由此建立加权残值法的理论基础，构造加权残值法的统一框架，包含了各种加权残值法与变分解法，并证明了加权残值法的适定性与在一定条件下的一致收敛性。书中除了介绍一些应用例题外，还以薄板弯曲问题与平面问题为例，详细地、系统地介绍了一种加权残值法——边界离散型最小二乘法有限元——的应用及其在计算机上的实现。

本书可作为高等院校有关专业本科生和研究生的教材；也可供从事工程设计中数值分析方法的研究人员与技术人员、高等院校教师、其他领域数值分析工作者参考。

加权残值法的理论与应用

邱吉宝　著

责任编辑：李明观

●

宇航出版社出版

地址：北京和平里滨河路1号　邮政编码：100013

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 销

人民交通出版社印刷厂印刷

●

开本：850×1168 1/32　印张：8.75　字数：205千字

1991年5月第1版第1次印刷　印数：1—2000 册

ISBN 7-80034-382-0/O·011　　定价：7.20 元

序

我国的加权残值法从1978年开始研究已有10年历史，计有三届全国加权残值法学术会议召开，仅会议选用的论文已有311篇，加上期刊发表的论文，总数已超过500篇。我国加权残值法论文参加国际计算力学会议的至少有12人次，得到国际计算力学界的重视和好评。在固体力学加权残值法研究方面我国的研究工作在国际上处于领先地位。以上事实说明，我国的加权残值法确已发展成为计算力学的一个重要分支，而且在继续发展壮大，走向世界。

加权残值法能在计算力学领域中如此迅速发展，是因为这种计算方法有：方法简便、计算准确、工作量少、程序短易、微机实现、费用低廉、原理统一、不依赖变分、应用广泛、残值可求等种种优点，为其他计算力学方法所不及。

自从我国加权残值法研究工作开始以来，邱吉宝同志即为从事这方面的研究工作最活跃的人物之一，研究论文水平很高，特别在探索加权残值法基础理论方面，例如方差泛函的研究以及对偶空间原理的研究方面有特殊的贡献，为加权残值法奠定了重要基础；证明了在一定条件下线性问题的加权残值法是一致收敛的结论是十分重要的。由于邱吉宝同志学识渊博、触类旁通，他也将上述泛函分析对偶空间原理应用于一些传统的计算力学方法中，如有限元法等，并探索创造新的计算力学方法的途径，这方面的研究工作，国际上尚未见到。

邱吉宝同志这本书“加权残值法的理论与应用”无疑地在基础

理论及应用两方面大为发展并丰富了加权残值法，使得加权残值法以前所未有的稳扎的理论基础及独特的优点立足于国际计算力学的学坛上。

上海同济大学教授 徐次达 85.2.17

前 言

几年来，作者在加权残值法理论基础和工程应用方面做了一些研究工作，1987年应陕西省力学学会邀请，开办加权残值法讲座，现将这些内容系统地加以整理及补充，写成本书。

本书主要从偏微分方程数值解法的角度，阐述方差泛函变分原理与对偶空间原理，构造方差泛函极小化序列，导出最小二乘变分方程，构造近似方差泛函极小化序列，导出广义伽辽金（Galerkin）变分方程，建立弱对偶空间原理，说明里兹变分方程是弱对偶空间原理的特殊情况，从而建立了加权残值法的理论基础，构造加权残值法的统一框架，包括了各种加权残值法与变分解法，指出现代加权残值法的两个重要发展——有限点法与有限元法，并证明加权残值法的适定性与在一定条件下的一致收敛性。为了便于说明问题，书中不得不涉及一些泛函分析的基本概念。对于数学基础有困难的读者，可以绕过泛函分析的基本概念，仅了解加权残值法的基本思想和结论，同样可以加深对这类方法的认识与理解，以便更灵活自如地应用这类方法去解决工程问题。为了便于读者掌握这类方法的应用，书中除了介绍一些应用例题外，还以薄板弯曲问题与平面问题为例，详细地、系统地介绍一种加权残值法——边界离散型最小二乘法有限元——的应用及其在计算机上的实现，以供参考。

由于篇幅所限，没有能够全面介绍近几年来我国学者在加权残值法研究方面所取得的成果。因此，本书有很大的局限性与片面性。幸好，已经出版的徐次达教授编著的“固体力学加权残值法”一书，系统地总结了这些研究成果，感兴趣的读者可以参考这本书。同时，作者不想把本书写成一本纯数学理论的著作，立

意面向广大工程技术人员。因此在阐述加权残值法理论基础时，尽可能地通俗介绍，不强调理论的描述的严密性。总之，由于作者水平有限，错误与缺点在所难免，恳请读者指正。

作者所做的研究工作得到航天工业部五院胡海昌教授、上海同济大学徐次达教授的热情关怀与指导，徐次达教授还专门为本书写了序言。在本书写作过程中得到林镛镛、张洪、刘广厚、刘思智等诸位同志的热情帮助，在此一并表示衷心的感谢。

邱吉宝

1989年10月1日于北京

目　　录

第一章　绪论 …………………………………………………………… 1
1.1　加权残值法的基本概念 …………………………………………… 1
1.2　权函数与方法的分类 ……………………………………………… 12
1.3　试函数选择及方法分类 …………………………………………… 24
参考文献 ……………………………………………………………… 27
第二章　泛函分析和索波列夫空间的初步知识 ………………………… 29
2.1　线性空间 ………………………………………………………… 29
2.2　模线性空间 ……………………………………………………… 32
2.3　内积空间 ………………………………………………………… 34
2.4　收敛性与完备性 ………………………………………………… 36
2.5　线性算子 ………………………………………………………… 40
2.6　线性泛函 ………………………………………………………… 45
2.7　广义函数与广义导数 …………………………………………… 49
2.8　索波列夫空间 …………………………………………………… 57
参考文献 ……………………………………………………………… 60
第三章　最佳逼近与方差泛函变分原理 ………………………………… 61
3.1　最佳逼近 ………………………………………………………… 61
3.2　一致逼近 ………………………………………………………… 63
3.3　最小平方逼近 …………………………………………………… 65
3.4　方差泛函极小值原理 …………………………………………… 70
3.5　线性问题方差泛函变分原理 …………………………………… 72
3.6　非线性问题方差泛函变分原理 ………………………………… 74
参考文献 ……………………………………………………………… 76
第四章　方差泛函极小化序列与最小二乘法 …………………………… 77
4.1　内部问题方差泛函极小化序列 ………………………………… 77
4.2　一般情况的方差泛函极小化序列 ……………………………… 79

4.3 离散型最小二乘法……82
4.4 高斯配点离散型最小二乘法……91
4.5 离散型最小二乘法有限元……96
4.6 配点法……98
4.7 配线最小二乘法……100
参考文献……101
第五章 近似方差泛函极小化序列与广义伽辽金法……102
5.1 内部问题近似方差泛函极小化序列……102
5.2 一般情况的近似方差泛函极小化序列……107
5.3 伽辽金法……111
5.4 矩法……122
5.5 子域法……125
参考文献……128
第六章 对偶空间原理……129
6.1 强对偶空间原理……129
6.2 弱对偶空间原理……137
6.3 二乘对偶空间原理……149
6.4 弹性力学中的对偶空间原理……150
参考文献……163
第七章 数值分析方法与构造……164
7.1 数值分析方法的一般过程……164
7.2 有限元法的发展……167
7.3 有限点法的发展……170
7.4 有限差分法的发展……172
7.5 半解析解法……175
7.6 方法的分类……177
参考文献……178
第八章 加权残值法的适定性与收敛性……179
8.1 拉克斯-梅尔格莱姆（Lax-Milgram）定理……179
8.2 最小二乘变分方程的适定性……181
8.3 广义伽辽金变分方程的适定性……186
8.4 加权残值法的一致收敛性……190
8.5 弱型伽辽金变分方程的适定性与收敛性……195

参考文献 …………………………………………………………………… 196
第九章　薄板弯曲问题边界离散型最小二乘法有限元 ……………… 198
9.1　薄板弯曲问题的基本理论 ……………………………………… 198
9.2　边界离散型最小二乘法有限元分析 …………………………… 204
9.3　例题计算 …………………………………………………………… 219
参考文献 …………………………………………………………………… 224
第十章　平面问题边界离散型最小二乘法有限元 …………………… 226
10.1　平面问题的基本理论 …………………………………………… 226
10.2　边界离散型最小二乘法有限元分析 …………………………… 234
10.3　求解过程 ………………………………………………………… 245
10.4　例题计算 ………………………………………………………… 246
参考文献 …………………………………………………………………… 252
第十一章　薄板弯曲问题、平面问题边界离散型最小二乘法有限元通用程序设计 ………………………………………… 253
11.1　薄板弯曲问题与平面问题的相似性 …………………………… 253
11.2　试函数选取 ……………………………………………………… 255
11.3　基本解变形内力向量 …………………………………………… 258
11.4　曲线方程 ………………………………………………………… 258
11.5　边界条件残值分析过程 ………………………………………… 260
11.6　相邻边界衔接条件残值分析过程 ……………………………… 261
11.7　计算结果误差的度量 …………………………………………… 264
11.8　计算结果分析过程 ……………………………………………… 267
11.9　初始数据的准备及计算结果的输出 …………………………… 269
参考文献 …………………………………………………………………… 269

第一章 绪 论

1.1 加权残值法的基本概念

理论研究与工程应用的问题往往归结为一定边界条件与初始条件的微分方程求解的问题。微分方程可以是常微分方程或偏微分方程，可以是线性的或非线性的，可以是单个微分方程或微分方程组。绝大多数情况下，这些问题无法求得精确解，只能采用近似的方法求解。

加权残值法(Method of Weighted Residuals，简称MWR)是一种数学方法，可以直接从微分方程中求得近似解。

首先介绍一个简单的算例来说明这种方法的基本概念。

例 1.1 对于图 1-1 所示的等截面简支梁，在均布荷载 q 作用下，求梁中点的挠度 w_{max}。

列出梁弯曲问题的控制微分方程为

$$EJ\frac{d^4w}{dx^4}-q=0 \qquad (1.1\text{-}1)$$

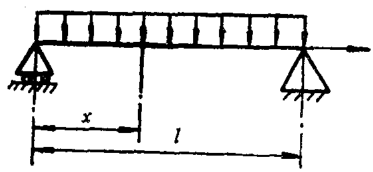

图 1-1 简支梁弯曲

其边界条件为：

$x=0$ 处 $w=0$ $\quad M=0$；

$x=l$ 处 $w=0$ $\quad M=0$。 (1.1-2)

这样，把问题化为微分方程(1.1-1)和边界条件(1.1-2)的边值问题进行求解。

采用加权残值法求解，首先凭经验选取一条挠度曲线 w 作为边值问题的近似解，通常称之为试函数(Trial Function)。为了

便于说明加权残值法解题的实质，以下用低阶近似求解。所谓低阶近似是指试函数中只含一个或几个待定参变量。如果一阶近似选取的试函数$\tilde{w}_1$为

$$\tilde{w}_1 = c\sin\frac{\pi x}{l} \tag{1.1-3}$$

二阶近似选取的试函数为

$$\tilde{w}_2 = c_1\sin\frac{\pi x}{l} + c_2\sin\frac{3\pi x}{l} \tag{1.1-4}$$

这里$\tilde{w}_1$与$\tilde{w}_2$中选取给定函数 $\sin\frac{\pi x}{l}$与 $\sin\frac{3\pi x}{l}$为试函数中的基。试函数中包含若干个待求的参变量，$\tilde{w}_1$中含一个参变量c，$\tilde{w}_2$ 中含两个参变量 c_1 与 c_2。加权残值法通过近似计算，把边值问题(1.1-1)、(1.1-2)方程化为仅含参变量{C}的代数方程组进行求解。在$\tilde{w}_1$、$\tilde{w}_2$中包含的参变量少且计算方便，又便于说明问题。如果需要求得更高精度的近似值，必须选取更多的给定函数作为试函数的基，试函数中包含更多的待定参变量。应当指出，应选取问题的可能解为给定函数基的元，同时这些元要满足线性无关条件。例如，$\tilde{w}_2$中选取$\sin\frac{3\pi x}{l}$作为基的元，而不选 $\sin\frac{2\pi x}{l}$，虽然它们都是线性无关的。这是因为挠度曲线关于 $x=\frac{l}{2}$的点是对称的，$\sin\frac{2\pi x}{l}$关于 $x=\frac{l}{2}$的点是反对称的，显然不是问题的解。

在$\tilde{w}_1$、$\tilde{w}_2$中的函数基的元$\sin\frac{\pi x}{l}$与 $\sin\frac{3\pi x}{l}$已经满足边界条件(1.1-2)，不满足控制微分方程(1.1-1)，将试函数(1.1-3)、(1.1-4)代入微分方程(1.1-1)，因其不满足微分方程(1.1-1)而产生内部残差R_I(residuals of eguation)为

$$R_{I_1} = EJ\frac{d^4w}{dx^4} - q = EJc\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\sin\frac{\pi x}{l} - q \tag{1.1-5}$$

$$R_{I_2} = EJ\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\left[c_1\sin\frac{\pi x}{l} + 81c_2\sin\frac{3\pi x}{l}\right] - q \tag{1.1-6}$$

其中，R_{I_1}为一阶近似的内部残差。R_{I_2}为二阶近似的内部残差。

如何放松微分方程的要求，采用什么方法来消除内部残差，导出仅含待定参变量{C}的方程，这是加权残值法的关键。下面分别介绍五种比较经典的方法——配点法、子域法、最小二乘法、伽辽金法和矩法，每种方法都对应于加权残值法中的一种准则，都可以用来消除残差，并在消除残差的过程中建立起求解待定参变量{C}的代数方程组。

配点法(Collocation Method)

在求解区域中，选取若干点为配点，在这些点上让内部残差R_I等于零。组成求解参变量{C}的代数方程组。配点数应等于待求参变量总数。

(1) 一阶近似

试函数(1.1-3)中仅含一个参变量 c，只要选一个配点即可。选取 $x=\frac{l}{2}$点为配点，令内部残差R_{I_1}在配点 $x=\frac{l}{2}$处为零，即

$$R_{I_1}\big|_{x=l/2}=EJc\left(\frac{\pi}{l}\right)^4-q=0 \qquad (1.1\text{-}7a)$$

这就是求解参变量 c 的方程，求得 c 为

$$c=\frac{1}{\pi^4}\frac{ql^4}{EJ} \qquad (1.1\text{-}7b)$$

将 c 值代入式(1.1-3)，得问题的近似解为

$$\widetilde{w}_1=\frac{1}{\pi^4}\frac{ql^4}{EJ}\sin\frac{\pi x}{l} \qquad (1.1\text{-}7c)$$

梁中点挠度近似值为

$$\widetilde{w}_{1\max}=\frac{1}{\pi^4}\frac{ql^4}{EJ}$$

$$=0.010266\frac{ql^4}{EJ} \qquad (1.1\text{-}7d)$$

精确解为$\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EJ}=0.0130208\frac{ql^4}{EJ}$，式(1.1-7d)近似值的误差为21.16%。

(2) 二阶近似

试函数(1.1-4)中含c_1、c_2两个参变量，应选取两个点为配点。两个配点选为$x=\frac{l}{2}$与$x=\frac{l}{4}$的点，令内部残差R_{I_2}分别在这两个配点处为零，即得

$$\begin{cases} R_{I_2}\big|_{x=\frac{l}{2}}=EJ\left(\frac{\pi}{l}\right)^4[c_1-81c_2]-q=0 \\ R_{I_2}\big|_{x=\frac{l}{4}}=EJ\left(\frac{\pi}{4}\right)^4\frac{\sqrt{2}}{2}[c_1+81c_2]-q=0 \end{cases} \tag{1.1-8a}$$

求得参变量c_1、c_2为

$$\begin{cases} c_1=\frac{3+2\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}\left(\frac{l}{\pi}\right)^4\frac{q}{EJ} \\ c_2=\frac{1}{81(2+2\sqrt{2})}\left(\frac{l}{4}\right)^4\frac{q}{EJ} \end{cases} \tag{1.1-8b}$$

求得二阶近似的近似解为

$$\tilde{w}_2=\frac{3+2\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}\left(\frac{l}{\pi}\right)^4\frac{q}{EJ}\left(\sin\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{81(3+2\sqrt{2})}\cdot\sin\frac{3\pi x}{l}\right) \tag{1.1-8c}$$

梁中点挠度的近似值为

$$\tilde{w}_{2\max}=\frac{3+2\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}\ \frac{1}{\pi^4}\left(1-\frac{1}{81(3+2\sqrt{2})}\right)\frac{ql^4}{EJ}$$

$$=0.012366\frac{ql^4}{EJ} \tag{1.1-8d}$$

其误差为5%，由此可见，二阶近似大大提高了近似解的精度，继续增加参变量，进行高阶近似求解，可以求得更精确的近似解。

子域法(Subdomain Method)

将求解区域分成若干子域，让内部残差在各个子域内积分等于零，导出求解参变量的代数方程组，分域子域总数应等于待求参变量总数。

(1) 一阶近似

试函数(1.1-3)中仅含一个参变量，因而要令整个求解区域$[0, l]$内积分为零，即得

$$\int_0^l R_{I_1} dx = 2EJc\left(\frac{\pi}{l}\right)^3 - ql = 0 \qquad (1.1\text{-}9a)$$

求得待定参变量 c 为

$$c = \frac{1}{2\pi^3}\frac{ql^4}{EJ} \qquad (1.1\text{-}9b)$$

将 c 代入式(1.1-3)得近似解为

$$\tilde{w}_1 = \frac{1}{2\pi^3}\frac{ql^4}{EJ}\sin\frac{\pi x}{l} \qquad (1.1\text{-}9c)$$

求得梁中点的挠度近似值为

$$\tilde{w}_{1\max} = \frac{1}{2\pi^3}\frac{ql^4}{EJ} = 0.016126\frac{ql^4}{EJ} \qquad (1.1\text{-}9d)$$

它的误差为23.85%

(2) 二阶近似

由于问题的对称性，可令内部残差 R_{I_2} 在$[0, \frac{l}{4}]$与$[\frac{l}{4}, \frac{l}{2}]$两个子域内积分等于零，即得

$$\int_0^{\frac{l}{4}} R_{I_2} dx = 4EJ\left(\frac{\pi}{l}\right)^3\left[c_1\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 27c_2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] - ql = 0$$

$$\int_{\frac{l}{4}}^{\frac{l}{2}} R_{I_2} dx = \int_0^{\frac{l}{2}} R_{I_2} dx - \int_0^{\frac{l}{4}} R_{I_2} dx$$

$$= \int_0^{\frac{l}{2}} R_{I_2} dx$$

$$=2EJ\left(\frac{\pi}{l}\right)^3[c_1+27c_2]-ql=0 \tag{1.1-10a}$$

求得参变量c_1、c_2为

$$c_1=\frac{3+2\sqrt{2}}{4\pi^3(2+2\sqrt{2})}\frac{ql^4}{EJ}$$

$$c_2=\frac{1}{27\times4\pi^3(2+2\sqrt{2})}\frac{ql^4}{EJ} \tag{1.1-10b}$$

得二阶近似的近似解为

$$\tilde{w}_2=\frac{1}{4\pi^3(2+2\sqrt{2})}\cdot\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)\sin\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{27}\sin\frac{3\pi x}{l}\right]\frac{ql^4}{EJ} \tag{1.1-10c}$$

梁中点挠度的近似值为

$$\tilde{w}_{2\max}=\frac{3+2\sqrt{2}-\frac{1}{27}}{4\pi^3(2+2\sqrt{2})}\frac{ql^4}{EJ}$$

$$=0.013677\frac{ql^4}{EJ} \tag{1.1-10d}$$

其误差为5％，二阶近似也大大提高了近似解的精确度。

最小二乘法(Least Square Method)

令内部残差的平方在求解区域[0， l]内积分取极值，也就是让内部残差平方在区域[0，l]内积分对每个参变量的导数为零，导出求解参变量的代数方程组。

(1) 一阶近似

令内部残差R_{I_1}的平方在[0，l]域内的积分对参变量c求导的导数等于零，即

$$\frac{d}{dc}\int_0^l R_{I_1}^2dx$$

$$=2\int_0^l R_{I_1}\frac{dR_{I_1}}{dc}dx$$

$$=2EJ\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\left[EJc\left(\frac{l}{2}\right)-2q\left(\frac{l}{\pi}\right)\right]=0 \tag{1.1-11a}$$

求得待定参变量 c 为

$$c=\frac{4}{\pi^5}\frac{ql^4}{EJ} \tag{1.1-11b}$$

求得近似解为

$$\widetilde{w}_1=\frac{4}{\pi^5}\frac{ql^4}{EJ}\sin\frac{\pi x}{l} \tag{1.1-11c}$$

梁中点挠度的近似值为

$$\widetilde{w}_{1\max}=\frac{4}{\pi^5}\frac{ql^4}{EJ}$$

$$=0.013071\frac{ql^4}{EJ} \tag{1.1-11d}$$

它的误差仅为0.386%，最小二乘法的一阶近似就已求得相当精确的近似解。

(2) 二阶近似

让 R_{I_2} 的平方在[0, l]域内积分，然后对积分结果分别对 c_1、c_2 求导数，并令其为零，即得

$$\begin{cases}\int_0^l R_{I_2}\frac{dR_{I_2}}{dc_1}dx=0\\ \int_0^l R_{I_2}\frac{dR_{I_2}}{dc_2}dx=0\end{cases} \tag{1.1-12 a}$$

将 R_{I_2} 代入积分后得

$$\begin{cases}EJ\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\frac{c_1 l}{2}-2q\frac{l}{\pi}=0\\ EJ\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\frac{81c_2 l}{2}-2q\frac{l}{\pi}=0\end{cases} \tag{1.1-12 b}$$

求得参变量 c_1、c_2 为