初中数学竞赛指导

初中数学竞赛指导

常庆哲　严镇军　主编

上海教育出版社

初中数学竞赛指导

常庚哲　严镇军 主编

上海教育出版社出版发行

(上海永福路 123 号)

各地新华书店经销　商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 13.75　字数 306,000

1990 年 2 月第 1 版　1990 年 2 月第 1 次印刷

印数 1—10,300 本

ISBN 7-5320-1592-0/G·1547　　定价：3.80 元

目　录

I. 代数与几何

一、整数(一)……………………………袁绍唐 (1)
二、整数(二)……………………严镇军　余红兵 (25)
三、代数式变形…………………………吴建平 (42)
四、代数方程……………………………魏有德 (60)
五、指数与对数…………………曹鸿德　胡培基 (97)
六、函数……………………………………曾　容 (127)
七、全等、相似及其应用……………………周春荔 (141)
八、几何不等式与极值……………………周春荔 (161)
九、用代数方法解平面几何问题……………严镇军 (184)

II. 解题思路谈

一、选择题的常用解法……………曹鸿德　王家林 (211)
二、从简单问题入手……………………夏兴国 (235)
三、观察和联想…………………………夏兴国 (254)
四、从反面考虑问题(一)
——逆推与反例……………严镇军　陈吉范 (275)
五、从反面考虑问题(二)
——间接证法……………严镇军　陈吉范 (294)
六、抽屉原则与容斥原理…………………张起林 (312)
七、逻辑推理题的一些解法………曹鸿德　叶万华 (331)

八、解题杂谈 ………………………………… 余红兵 (354)

III. 竞赛试题选

一、历届全国联合初中数学竞赛试题及解答
……………………………………… 严镇军整理 (372)
二、澳大利亚的维斯佩克数学竞赛 …… 常庚哲编译 (407)

I. 代数与几何

一、整　数　(一)

袁绍唐(广西大学数学系)

关于整数的研究,在数学里占有极为重要的地位.由于解决有关整数的问题,常需要灵巧的方法和独到的技巧,因而在各种数学竞赛中,涉及整数的问题是很多的. 特别是在初中数学竞赛中,命题者常出整数方面的题目,考察参赛者的能力和智力.

本文只就初中范围介绍一些解决整数问题的常用方法.了解这些方法,并运用得当,对解决初中数学竞赛中的有关整数方面的题目是有益的.

(一) 奇数和偶数

我们知道,全体整数可以分成两大类:一类是奇数,它们是±1, ±3, ±5, ±7, ……;另一类是偶数,它们是0, ±2, ±4, ±6, ±8, …….任何一个整数不是奇数就是偶数,二者必居其一. 整数的这种分类法,不仅对解决整数方面的问题,而且对解决其他一些数学问题都有很大的好处.

由于偶数是能被2整除的整数,所以任何偶数a总可以表

示成 $a=2m$(m 为整数)的形式；奇数是不能被 2 整除的整数，也就是被 2 除余 1 的整数，因而任何一个奇数 a 总可以表示成 $a=2m+1$(m 为整数)的形式. 偶数和奇数的这两种表示方法，对解决整数问题很有用.

关于奇数和偶数，下面的几个基本性质是很明显的：

(1) 任何奇数不可能与偶数相等.

(2) 奇偶性相同的两个整数之和或差必是偶数；奇偶性不同的两个整数之和或差必是奇数(所谓奇偶性相同，是指同为奇数，或同为偶数).

(3) 奇数与奇数的乘积是奇数；奇数与偶数的乘积以及偶数与偶数的乘积都是偶数.

(4) 整数 a 的幂 a^n 与 a 的奇偶性相同.

这些性质虽然简单，但对不少问题，如能灵活应用它们，问题就迎刃而解了. 这种方法通常叫奇偶性分析方法.

例 1 证明不存在整数 x、y 满足

$$y^2=x^2+1990.$$

解 如果有整数 x、y 使得 $y^2=x^2+1990$，即 $y^2-x^2=1990$，那么 y^2 与 x^2 有相同的奇偶性，因此 y 与 x 有相同的奇偶性. 所以 $y+x$ 与 $y-x$ 都是偶数，即 $y+x=2k$，$y-x=2l$(k、l 为整数). 所以

$$1990=(y+x)(y-x)=4kl,$$

$$\therefore \quad 995=2kl.$$

但左边为奇数，右边为偶数，不可能相等. 这说明了没有整数 x、y 满足 $y^2=x^2+1990$.

例 2 证明不存在这样的整数 a、b、c、d，使得

$$abcd-a,\ abcd-b,\ abcd-c,\ abcd-d$$

都为奇数.

解 如果 $abcd-a$, $abcd-b$, $abcd-c$, $abcd-d$ 都为奇数. 由 $a(bcd-1)$ 为奇数,知 a 必为奇数;同理 b 也必为奇数, c 也必为奇数, d 也必为奇数. 这样 $bcd-1$ 为偶数, 因而 $a(bcd-1)$ 为偶数, 与假设矛盾. 所以不可能有 a、b、c、d 使 $abcd-a$, $abcd-b$, $abcd-c$, $abcd-d$ 都为奇数.

例 3 证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数.

解 假设 $\sqrt{2}$ 是有理数, 由于任何有理数都能表示成既约分数的形式,于是可令

$$\sqrt{2}=\frac{m}{n},$$

其中 m、n 为两个互质的自然数(因而 m、n 不能同为偶数). 那么

$$2=\frac{m^2}{n^2},$$

$$\therefore\quad 2n^2=m^2.$$

m^2 为偶数, m 也必为偶数. 设 $m=2k$, k 为整数,于是

$$2n^2=4k^2,$$

$$n^2=2k^2.$$

n^2 为偶数,从而 n 也必为偶数. 这与 m、n 互质矛盾. 所以

$$\sqrt{2}\neq\frac{m}{n},$$

即 $\sqrt{2}$ 不是有理数.

奇偶性分析方法,不仅能用于关于整数的各种问题,而且也能用在有些看似与整数无关的问题上.

例 4 七个杯子口朝下摆在桌子上, 每次翻转四个杯子(口朝下的翻为口朝上,口朝上的翻为口朝下),经过若干次这

样的翻动，问可不可能全部杯子口都朝上？

解　每次都翻转四个杯子是不可能使杯子全都口朝上的．这是因为每翻动一个杯子后，口朝下的杯子或者增加一个，或者减少一个，即改变了个数的奇偶性．于是翻动四个杯子，口朝下的杯子个数的奇偶性不会改变．口朝下的杯子原先有 7 个，是奇数，因此经过若干次这样的翻转，其个数仍将是奇数，不可能变为 0（偶数），即不可能所有的杯子口都朝上．

例 5　一个展览馆有 26 间展览室（如图 1-1-1），图中每个方格代表一间展览室，每相邻的两间展览室都有门相通，出口入口在图中所示之处．问能否找出一条从入口到出口的参观路线，使得不遗漏又不重复地走过每一间展览室？

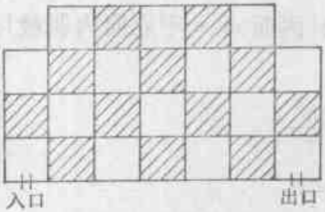

图　1-1-1

解　如图那样将展览室分成两类：12 间涂上黑色，另 14 间涂上白色．经过这样的涂色，我们就能注意到每一条路线都是经历由白（入口）→黑→白→黑→…→白→黑→白（出口）这样的途径，也就是说经过的展览室必定是黑白相间的，因此经过的

白展览室数＝黑展览室数＋1．

现在题中的白展览室数与黑展览室数同为偶数，若要不遗漏又不重复地经过所有展览室，就会与上面的基本关系——所经过的黑白展览室个数的奇偶性不同相矛盾．因此不可能存在满足要求的参观路线．

（二）平 方 数

所谓平方数是指能够表示成某整数平方的那些数，如 0, 1, 4, 9, ……它们分别是 0, ±1, ±2, ±3, ……的平方. 凡平方数都是非负的. 平方数是一类特殊的整数，它有一些特有的性质，注意了这些性质并能灵巧地应用，可以解决不少有关整数的问题.

性质 1 平方数的个位数只能取 0、1、4、5、6、9 这六种情形.（读者自证）

性质 2 偶数的平方数必是 4 的倍数.

证明 $\because (2k)^2=4k^2$，是 4 的倍数.

性质 3 奇数的平方数必是 8 的倍数加 1.

证明
$$\because\quad (2k+1)^2=4k(k+1)+1$$
$$=4(2K)+1=8K+1.$$

性质 4 平方数与平方数之乘积必为平方数；平方数与非平方数之乘积必为非平方数.

前者显然；后者我们不在此处证明，读者可直接应用它来解决问题.

例 6 证明 $\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}$, $\underbrace{22\cdots2}_{n\text{个}}$, ……, $\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}}$ 都不是平方数 $(n>1)$.

解 11, 111 显然不是平方数. 当 $n=3$ 时，

$$\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}=\underbrace{11\cdots1}_{(n-3)\text{个}}000+111=8k+7$$

（k 为某整数）由性质 3 可知奇数 $\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}$ 不是平方数.

由性质 4, 可知

$$\underbrace{44\cdots4}_{n个}=2^2\times\underbrace{11\cdots1}_{n个},$$

$$\underbrace{99\cdots9}_{n个}=3^2\times\underbrace{11\cdots1}_{n个}$$

也不是平方数. 又由性质 2, 偶数

$$\underbrace{22\cdots2}_{n个}=2\times\underbrace{11\cdots1}_{n个},$$

$$\underbrace{66\cdots6}_{n个}=6\times\underbrace{11\cdots1}_{n个}$$

不是 4 的倍数, 所以也不是平方数, 因而

$$\underbrace{88\cdots8}_{n个}=2^2\times\underbrace{22\cdots2}_{n个}$$

也不是平方数.

注意平方数个位数不能为 2、3、7、8(性质 1), 所以 $\underbrace{33\cdots3}_{n个}$, $\underbrace{77\cdots7}_{n个}$ 也不是平方数. 最后, 因为 $\underbrace{11\cdots1}_{n个}=8k+7(n\geqslant3)$, 所以

$$\underbrace{55\cdots5}_{n个}=5\times\underbrace{11\cdots1}_{n个}=5(8k+7)=8l+3$$

(k、l 为某整数). 由性质 3 可知 $\underbrace{55\cdots5}_{n个}$ 也不是平方数.

例 7 证明 $5m^2-6mn+7n^2=1987$ 无整数解. (仿 26 届国际数学奥林匹克竞赛题)

解 若有整数 m、n 使得

$$5m^2-6mn+7n^2=1987,$$

则
$$25m^2-30mn+35n^2=5\times1987,$$

即 $$(5m-3n)^2+26n^2=5\times1987.$$

因为右边为奇数，所以 $5m-3n$ 必为奇数.

当 n 为奇数，则由性质 3,

$$n^2=8k+1,\ (5m-3n)^2=8l+1$$

(k、l 为整数)，所以

$$(8l+1)+26(8k+1)=1987\times5,$$

即 $$8(l+26k+3)+3=1987\times5.$$

但 $1987\times5=8\times1241+7$，不是 $8K+3$ 的形式，导致矛盾.

当 n 为偶数，则有 $n^2=4k$ 及 $(5m-3n)^2=8l+1$(k、l 为整数)，代入有

$$(8l+1)+26\times4k=1987\times5,$$

即 $$8t+1=8\times1241+7\quad (t\ 为整数),$$

这又矛盾.

所以，没有整数 m、n 使题中的等式成立，证毕.

说明：这个例题所显示的方法，其实，归根到底就是以 8 为模来对全体整数进行分类：每一个整数必是形如 $8k$, $8k+1$, $8k+2$, ……, $8k+7$ 这八种类型的整数之一．不同类的整数不可能相等．因此，每一个整数都不重复地被分到这八个类中去了．为什么要按 8 来分类？就是因为奇数的平方全在 $8k+1$ 型这一类里．牵涉到平方数的式子，往往都是分为 8 类(也有分 4 类的情形：$4k$, $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$)来讨论.

前面的奇偶性分析法，实际上就是以模 2 来分两类：$2k$, $2k+1$ 进行讨论的.

例 8 证明方程 $a^2+b^2+c^2=2^nabc$ 只有 $a=b=c=0$ 这一组整数解(此处 n 为任一自然数).

解 如果成立 $a^2+b^2+c^2=2^nabc(n\geqslant1)$，那么 $a^2+b^2+c^2$ 为偶数，从而 a、b、c 有两种可能：两个奇数一个偶数，或者

三个都是偶数.

当 a、b、c 中两个为奇数一个为偶数时，左边属于 $4k+2$ 型的整数(现在以 4 为模来分类，因为牵涉到偶数的平方)，但右边是 4 的倍数，即有 $4l$ 形式，两者不相等，产生矛盾，故这种情形不可能出现.

当 a、b、c 中三个都为非零偶数时，设 $a=2x$, $b=2y$, $c=2z$，则

$$4x^2+4y^2+4z^2=2^n(2x)(2y)(2z),$$

$$\therefore\quad x^2+y^2+z^2=2^{n+1}xyz.$$

如果 x、y、z 仍全为偶数(非零)，又可再各约去因子 2，等等，最后必得一等式

$$u^2+v^2+w^2=2^m uvw,$$

这里 $m\geqslant1$. 此时 u、v、w 已是两奇一偶了. 但上一段已证明这是不可能的，所以也就没有非零的偶数 a、b、c 满足 $a^2+b^2+c^2=2^n abc(n\geqslant1)$. 所以只有 $a=b=c=0$ 才满足原方程.

上面几个例子是以平方数的特点证明某些整数不是平方数或某些二次方程无整数解. 对于证明某数是平方数等等问题，多数是巧妙地配成平方来处理.

例 9 证明

$$49,\ 4489,\ 444889,\ \cdots,\ \underbrace{44\cdots4}_{n\text{个}}\underbrace{88\cdots8}_{n\text{个}}9$$

都是平方数.

解

$$\underbrace{44\cdots4}_{n\text{个}}\underbrace{88\cdots8}_{n\text{个}}9=\underbrace{44\cdots4}_{2n\text{个}}+\underbrace{44\cdots4}_{n\text{个}}+1$$

$$=4\times\underbrace{11\cdots1}_{2n\text{个}}+4\times\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}+1$$

$$=4\left(\frac{10^{2n}-1}{9}+\frac{10^n-1}{9}\right)+1$$

$$=\frac{4\times10^{2n}+4\times10^{n}+1}{9}=\frac{(2\times10^{n}+1)^{2}}{3^{2}}$$

$$=\left(\frac{2\times10^{n}+1}{3}\right)^{2}.$$

由于
$$2\times10^{n}+1=2\times(\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}}+1)+1$$

$$=3\times(\underbrace{66\cdots6}_{n\text{个}}+1),$$

$$\therefore\quad \underbrace{44\cdots4}_{n\text{个}}\underbrace{88\cdots89}_{n\text{个}}=\underbrace{66\cdots67}_{n\text{个}}{}^{2}.$$

例 10 证明 $\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}\times\underbrace{10\cdots05}_{n+1\text{个}}+1$ 是平方数.

解 $$\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}\times\underbrace{10\cdots05}_{n+1\text{个}}+1=\frac{10^{n}-1}{9}\times(10^{n}+5)+1$$

$$=\frac{1}{9}(10^{2n}+4\cdot10^{n}+4)=\left(\frac{10^{n}+2}{3}\right)^{2}$$

$$=\left(\frac{10^{n}-1+3}{3}\right)^{2}=(\underbrace{33\cdots3}_{n\text{个}}+1)^{2}=\underbrace{33\cdots34}_{n\text{个}}{}^{2}.$$

（三）数的整除性

在整数问题中，数的整除性问题占有重要的地位. 即使在今天，仍有大量的整除性问题还未解决，由此可见整除性问题的深奥与吸引力. 本书不可能全面论述解决整除性问题的方法，我们只是根据数学竞赛（主要是初中数学竞赛）中较常用的几个方法作些介绍，同时也介绍一些最基本的概念和术语.

1. 几个基本概念

如果对整数 a、b、c（其中 $b\neq0$），成立 $a=bc$，我们就说 b

整除 a，或说 a 被 b 整除；有时也称 b 是 a 的因数，a 是 b 的倍数.

b 整除 a 用符号 $b|a$ 表示，b 不整除 a 用 $b\nmid a$ 表示.

由定义可直接看出下面几个最简单的性质：

(1) 若 $c|b$, $b|a$，则 $c|a$.

(2) 若 $c|a$, $c|b$，则 $c|a\pm b$.

(3) 对于正整数 a、b，若 $b|a$，则 $b\leqslant a$. 所以，如果对正整数 a、b. 若成立 $a|b$, $b|a$，则 $a=b$.

(4) 若 $b|a$, $m\neq 0$，则 $mb|ma$；如果 m 是 a、b 的公因数，则有 $\dfrac{b}{m}\Big|\dfrac{a}{m}$.

(5) 若 $c|a$, $c\nmid b$，则 $c\nmid a+b$.

这些简单性质很容易证明，所以在此不再赘述了.

a、b 的公因数中最大那个叫做 a、b 的最大公因数，并用符号 (a, b) 来表示. 此时必有 $(a, b)>0$. 当 $(a, b)=1$ 时，我们就说 a、b 是互质（或互素）的.

a、b 的正公倍数中最小的那个叫做 a、b 的最小公倍数，并用符号 $[a, b]$ 来表示.

设整数 $a>1$，如果它只有 1 和 a 两个正因数，就称它为质数（素数）. 从小到大排列的质数为

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ……

质数有无穷多个，因此这样的一串数是没有穷尽的.

质数有一个重要的性质：对任一整数 a，如果质数 $p\nmid a$，那么 p 必与 a 互质，事实上，若 $1<(p, a)<p$，则由于公因数 $(p, a)|p$，p 有了一个非 1 又非 p 的正因数，与 p 为质数的定义矛盾. $\therefore (p, a)=1$ 或 $(p, a)=p$，前者说明 p 与 a 互质，后者说明 $p|a$.

2. 整除性的两个基本性质和一个公式

我们不加证明地介绍两个非常基础而又重要的有关整除的性质，读者可能早已不自觉地用过它们了：

基本性质1 如果 $c|ab$, $(a, c)=1$, 那么 $c|b$.

特别地，若素数 $p|ab$, 则必有 $p|a$ 或 $p|b$, 二者必居其一. 因为若 $p\nmid a$, 就有 $(p, a)=1$, 因而 $p|b$.

例如当 $3|7a$ 时，由于 $(3, 7)=1$, $\therefore 3|a$.

基本性质2 设 $b|a$, $c|a$. 如果 $(b, c)=1$, 那么也有 $bc|a$.

例如当 $2|N$, $5|N$ 时，就有 $10|N$. 然而由 $4|12$, $6|12$ 却不成立 $24|12$，这是因为 $(4, 6)\neq 1$，不满足性质中 $(b, c)=1$ 这一条件.

基本公式 对任一正整数 n 以及整数 a、b, 总成立

$$a-b|a^n-b^n.$$

这是因为

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})=a^n-b^n,$$

由此看出 $a-b$ 是 a^n-b^n 的因数.

3. 利用最简单性质和两个基本性质解整除性问题

例11 已知有 n 使 $1987|\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}$, 求证对此 n 也有

$$1987|\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}\ \underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}}\ \underbrace{88\cdots8}_{n\text{个}}\ \underbrace{77\cdots7}_{n\text{个}}.$$

(1987 年全国初中数学竞赛题)

证明 $\because$ $\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}\ \underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}}\ \underbrace{88\cdots8}_{n\text{个}}\ \underbrace{77\cdots7}_{n\text{个}}$

$$=\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}\times10^{3n}+9\times\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}\times10^{2n}$$

$$+8\times\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}\times10^n+7\times\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}$$

$$=\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}\times(10^{3n}+9\times10^{2n}+8\times10^n+7),$$

$$\therefore\quad \underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}\,|\,\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}\ \underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}}\ \underbrace{88\cdots8}_{n\text{个}}\ \underbrace{77\cdots7}_{n\text{个}}.$$

但 $1987|\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}$，所以 $1987|\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}\ \underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}}\ \underbrace{88\cdots8}_{n\text{个}}\ \underbrace{77\cdots7}_{n\text{个}}$.

例 12 证明对任一整数 a，都有 $6|a^3-a$.

证明 $\because$ a 与 a^3 的奇偶性相同，$\therefore 2|a^3-a$. 另一方面，当 $a=3k$（k 为整数）时，显然有 $3|a^3-a$；当 $a\neq3k$ 时，必然有 $a=3k\pm1$，此时 $a^2=3l+1$（l 为整数），

$$\therefore\quad a^3-a=a(a^2-1)=a(3l+1-1)=3al,$$

也有

$$3|a^3-a.$$

既然总有 $2|a^3-a$，$3|a^3-a$，由基本性质 2 有 $6|a^3-a$.

例 13 已知 $n|10a-b$，$n|10c-d$，求证 $n|ad-bc$.

证明 $\because\ n|10a-b,\qquad \therefore\ n|(10a-b)c.$

同理 $n|(10c-d)a$，因此

$$n|(10a-b)c-(10c-d)a,$$

即

$$n|ad-bc.$$

4. 用分类法来证明整除问题

前面我们看到将全体整数分成八类：$8k$, $8k+1$, $8k+2$, ……, $8k+7$ 的分析问题方法；也有按模 4 分为四类、按模 3 分为三类等方法. 这种分类方法在整除性问题中是很有用的.

例 14 证明对任意整数 a 都有 $5|a^5-a$.

证明 当 $a=5k$（k 为整数）时，命题成立；当 $a\neq5k$ 时，则