高等学校教学参考书

初等数学复习及研究

（平面几何）

梁绍鸿 编
赵慈庚 校

人民教育出版社

本书原为师范院校开设的《平面几何》课程的试用教材，以平面几何的复习及研究为主要内容。此次是满足需要而重印的。

本书可作为师范院校数学系的教学参考书，也可作为中学数学教师的教学参考书。

初等数学复习及研究

平面几何

梁绍鸿编

赵兹庚校

人民教育出版社出版（沙滩后街55号）

兰州新华印刷厂印装

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

统一书号 13012·0125　开本 787×1092　1/32　印张 15 4/16

字数 394,000　印数 684,001—1,084,000　定价(6)￥1.20

1958年11月第1版　1979年1月甘肃第7次印刷

写 在 前 面

本书初版于二十年前。这次重版，本拟将第二章改写，增补一些有关逻辑的初步知识，以帮助读者掌握几何的基本理法。但这样一来，便要牵动到全书的版面，势必增加重版许多困难。现在为了满足急需，暂将一些个别错误修订一下。将来需要的话，待有机会再来改写。希望读者发现还有什么错误，提出来批评指正。

梁绍鸿

1978 年 3 月 20 日于北京师范大学

目录

引　言

§1. 几何論証的本源

在几何学里經常有两件要做的主要工作：一是为了明確概念而确立定义，一是为了揭示真理而推証定理。

通常每遇一新概念，往往要訂立明确的定义，使人明白所指的是什么。但是若要求一切概念都有所本，即新概念都要用以前已经明确的旧概念来解釋，而旧概念又都須有它自己的定义，这是不可能的。因为从复杂的概念回溯到較簡单的概念，这种过程当然不能无止境地継續下去，必須最初先有一些我們从具体事物抽象出来的認为最簡单而无需解釋的概念，然后所有其余的概念才能由这些原始概念引导出来。所以用旧概念解釋新概念，虽然是經常的方法，但追溯上去終久有时而穷，我們不可不事先选定一組基本概念，不加定义，作为解釋其余一切概念的本源。这組不定义的基本概念，总称为**元詞**。这些元詞中，有的是指单純的事物的，叫做**元名**或**基本元素**；有的是表示事物間的关系的，叫做**元誼**或**基本关系**。

証明定理，誠然在在都要根据。可是每見一定理，既追求它所本的前提，又問此前提所以成立的原因，如此往上追寻，那么何时才可終止呢？事实上，希望每題都証，每証都根据已証的命題，犹之乎要想名名定义，一样是办不到的。因此就有必要采用一套基本命題，不加証明即作为一切定理的基础，而不再根究它的理由。这套不証明的基本命題，称为**公理**。

选定元詞和公理之后，几何的論証便有了明确的本源，此外再无需訴諸直覺或默契。这套选定的元詞和公理，彼此相輔而行，組成了所謂

公理体系。公理体系乃是奠定本門科学的基石，基石既立，根本才称穩固，那么一部論証严格而且系統严明的几何学便得由此建立起来了。

§2. 古代几何学簡史

如上所述，似乎应該先立公理体系，而后产生几何学。然而事实并不这样。实际上，几何公理体系的建立不过是在近几十年才得到完成，而几何学早在数千年前已因人类生活的需要而发生了。任何科学的发展过程，大都如此。

相傳古代埃及的尼罗河每年泛濫，两岸田亩地界，尽被淹沒，事后必須設法测量，重新勘定田地的界綫。在这个实际的需要中，测量土地的方法自然要应运而生。据說西方的几何学就是起源于这种测地术。按“几何学”这个名詞，原是我国明朝徐光启(1562—1633年)譯的，这詞的原义无論在拉丁文或希腊文都含着“测地术”的意思，这說明上面的傳說相当可靠。

大家都知道，古代埃及建有很多金字塔，这些金字塔的工程非常浩大，而它的精美造型，直到現在还是令人十分叹服。由此可見，埃及人很早就已知道許多关于几何的知識了。大約公元前 1700 年，埃及人阿默斯(Ahmes)手抄了一本书，即后人所称的“阿默斯手册”，里面載有很多关于面积的测量法以及关于金字塔的几何問題。这本世界上最古的数学书出于埃及并不是偶然的，应該說是埃及人智慧积累的結果。

在我国方面，最早的数学书“周髀算經”和“九章算术”① 里也載有許多关于几何的問題，由这两部书可以知道“圓周率”②及“勾股定理”③

---

① 两书著者，已难稽考，大約非出于一人之手。书中所纂各种問題，源流极古，有可以上溯到周秦以前的，也有两汉时代的算法。

② 見 §21 定理 135。

③ 見 §18 定理 124。

在我国很早就发見了。再推前一些，无論在石器时代的陶器上，或在殷商的鐘鼎上，都已經有了精美的几何图案。所以我国古代的几何知識在很早也已达到了很高的程度。

我国战国时代的墨子(名翟，約公元前 480—390 年)，著有"墨經"十五卷，其中所載科学文字，标义立說，都极其精微深刻，就其所論几何学的各条来說，較之西方百余年后的欧几里得(Euclid，約公元前330—275 年)，略无逊色。例如"墨經"上說："圜，一中同长也。"这里的"圜"即是圓，那是說圓有唯一的中心，而这个中心距圓上任何点都一般远。又說："方，柱隅四讙也。"其中的"方"指正方形，"柱"就是边，"隅"就是角，"讙"讀如权，有相等的意思，这一条說的是正方形四边及四角各各相等。象这样对"圜"和"方"下的定义，字句很簡单而意义詳尽，在欧几里得所下的"圓"和"正方形"的定义亦不过如此。其后又有荀卿(約公元前 310—230 年)，在他所著"荀子"中曾說："五寸之矩，尽天下之方也。"这和欧几里得的第四公設"凡直角都相等"① 意义完全相同。从这些記录可以窺見我国古代几何的一斑。

古代埃及虽然积累了許多几何知識，但是还沒有組織成为一門系統的科学。后来希腊和埃及通商，而当时希腊的許多学者也先后来到埃及留学，于是几何的知識才漸漸傳入希腊。此后，这些知識无論在实际材料方面，或是在某些理論基础的奠定方面，在希腊都得到了光輝的发展。这样，几何学便形成了一門独立的科学。这門科学后来再傳布于欧洲諸国，以至一直流傳到現在。

古代希腊的許多数学家，如他勒(Thales，約公元前 640—546 年)、閉达臥剌(Pythagoras，約公元前 582—493 年)、依卜加(Hippocrates，約当公元前 430 年)、柏拉图(Plato，約公元前 427—347 年)、欧几里得諸人，对几何学都有莫大的功績。他勒曾发見若干几何定理和証明的

① 見 §3。

方法，这是理論几何的开端；他还能运用几何定理来解决实际問題，凭一根竹竿就可以測得金字塔的高。閉达臥剌認为数学是一切学問的基础，他对几何学有很多研究，著名的勾股定理在西方就叫做"閉达臥剌定理"。依卜加編著第一部初等几何教科书，他首先会用"反証法"①，与柏拉图同为研究"几何三大問題"②的有名的人，因而附带发見許多几何定理。柏拉图首創現在目为証題利器的"分析法"③，而确立縝密的定义和明晰的公理作为几何学的基础，这种思想也由柏拉图开其先河。欧几里得搜集当时所有已知的初等几何材料（包括他自己的发見），按着严密的邏輯系統，編成"几何原本"十三卷④，这书在历史上极負盛名，后世奮为几何学的杰作。

§3. 欧几里得的"几何原本"

欧几里得的"几何原本"一书，最突出的一点是它从一些特别提出的公理、公設⑤和定义有計划地来論証其他命題，其次是它第一次把丰富而散漫的几何材料整理成了系統严明的讀本，这些优点，使它成为人

① 見§30。

② 見§96。

③ 見§33。

④ 这书原有十三卷，后来别人在书末續了两卷。原来的前四卷及第六卷論平面几何，第五及第七至第十卷論比例和算术理論，后三卷論立体几何。明万历三十五年（1607年）徐光启与西人利瑪竇（Metteo Ricci）合譯前六卷，在北京出版，这是西洋数学输入我国的开始。至清季咸丰五年（1855年），李善兰（1810—1882年）与偉烈亚力（Alexander Wylie）才續譯后九卷。

⑤ 欧几里得本人并沒有說明"公理"与"公設"的区别。按字面与内容来看，似乎欧几里得所謂公理，指的是人們認为明白无疑的公共观念，而公設是一种假設的事項，几何学里用它們作为最簡單的論理根据。或者欧几里得以为假設的事項，容許还有商榷的余地，試看他把第五公設（平行公設）排在很后的地位，仿若他覺得这一条最可怀疑，到不得已时，才将它提出来。欧几里得煞費苦心，于此可見一斑。近代的著作，已不再区分公理与公設，而一律叫做公理。

类历史上的科学杰著。因为欧几里得完成了这一件学术上的艰巨工作，所以他的“几何原本”一直被后世推崇，而二千多年来所有初等几何教科书以及十九世紀以前一切有关初等几何的論著无不以他的“几何原本”为根据。于是这部系统严明的著作乃被人們看做几何学的经典著作，甚至有将“欧几里得”用作几何学的代名詞的。由于这个历史性的称誉，人們一直就把这种体系的几何学，称为欧几里得几何学。現在中学所学的几何，大致还是欧几里得的几何体系。

欧几里得的“几何原本”是一部擅几何学权威达二千余年之久的古代杰作已如上述，但是它并不是毫无缺点的，它的缺点在于它的基础部分。“几何原本”的基础是用一些定义、公設和公理来构造的，主要的有下列几条：

定义 1° 点是不可分的。

2° 綫有长无寬。

3° 綫的界是点。

4° 直綫是这样的线，它对于它的任何点来說都是同样地放置着的。

5° 面只有长和寬。

6° 面的界是綫。

7° 平面是这样的面，它对于它的任何直綫来說都是同样地放置着的。

公設 1° 从每一点到另一点可引直綫(图 1)。

2° 每条直綫都可以无限延长(图 2)。

3° 以任意点为中心可作半徑等于任意长的圓(图 3)。

图 1.

图 2.

图 3.

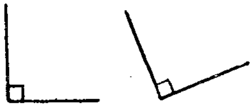

图 4.

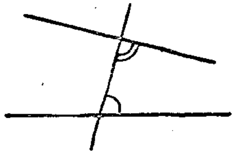

图 5.

4° 凡直角都相等(图 4)。

5° 同平面两直綫与第三直綫相交，若其中一侧的两个内角之和小于二直角，則該两直綫必在这一侧相交(图 5)。

这条就是有名的“欧几里得第五公設”，也叫做平行公設[1]。

公理 1° 等于同量的量相等。

2° 等量加等量，其和相等。

3° 等量减等量，其差相等。

4° 不等量加等量，其和不等。

5° 等量的两倍仍相等。

6° 等量的一半仍相等。

7° 能迭合的量相等。

8° 全体大于部分。

欧几里得給“点”、“綫”、“直綫”、“面”、“平面”都下了定义，这种工作，論意图自很正确，但是因为他用了“分”、“长”、“寬”、“界”等概念，而这些概念却沒有定义，其中定义 4° 和定义 7° 虽然沒有用到这些字眼，可是語意模糊，解釋起来难免夹杂猜测的成分，所以那些定义都有邏輯上的缺陷。欧几里得的这种定义方法，系用普通語言，从各个角落，将所定义的概念的某些特性描写出来，使人心領神会；象这样的定义方法，叫做描写法。因其易为初学者接受，所以一直到現在，絕大多数的中学几何教科书，开头部分还是沿用这种方法。

---

① 后人因覺得这条公設的內容不簡单，似乎不該列为公設，于是想法去証明而沒有成功，結果产生了“非欧几里得几何学”。

欧几里得的全盘公設和公理，作为几何学严格的邏輯推理的基本命題，实在过于貧乏了，它的缺点就在于此。因此欧几里得在推証命題时，往往不得不求助于图形的直观性，而若明若暗地默認一些“显然的事实”。例如“某点介于另两点之間”、“在一直綫的同側或异側”、“多边形的内部或外部”、“圓与直綫或圓与圓（在一定条件下）的相交”等类的話，在“几何原本”中不时要出現，可是这些話的含义或根据，欧几里得并沒有預先明确地給指出来。

从严格的邏輯观点来看，欧几里得的“几何原本”确有以上指出的一些缺点，但是我們不該因此便去苛責古人，因为在他的时代說来，他所建立的几何的邏輯結构不能不算是非常严密的了。无疑地，欧几里得在几何发展史上不可磨灭的功績，是他示范地完成了用形式邏輯建立严明的几何体系这个出色的工作，所以我們对于“几何原本”的評价，并不因它的缺点而有所降低，历史地看，我們認为这书是一部具有一定历史价值的承前启后的杰作。

§4. 希尔伯特公理体系

在几何学的构成中，关于公理体系的产生以及公理体系所起的作用，是到了近代才建成完全明确的观念。近代公理法要求在建立几何学时，必須把一些无定义的基本概念（元詞）挑选出来，而这些概念相互間的关联則在一些不加証明的基本命題（公理）中予以确定；一切新的概念一定要用基本概念或已有定义的概念来下定义；一切提出的几何命題，无論它本身如何明显，若不是要根据公理或已証的命題来証明它[①]，就是要明白宣布它为公理[②]。这就是說，在构成几何学时，只許純粹按邏輯推理进行，絕不容許訴諸直覚或默契。象这样严格的要求，是

① 虽然有时略去这种証明，但这不等于說不需要証明。

② 宣布某組命題为公理，必須注意它們之間的三种性质：1°和諧性；2°独立性；3°完备性。討論这些性质，属于“几何基础”的任务，是很艰深的問題。

近几十年才提出来的。

在人們尝試証明欧几里得第五公設的長时期过程中，給几何基础积累了极其丰富的公理資料，这些資料經过近年的研究整理乃成为近代公理法学說的基础。最近逝世的德国数学家希尔伯特（Hilbert, 1862—1943年）是完成几何奠基工作的一位大家。他写了一本“几何基础”，这书从1899年到現在已出版至第八版〔第八版是倍耐斯(Bernays)的增訂本，在1956年出版〕，每版都作了必要的修正。希尔伯特的工作，已經使得欧几里得几何的基础不再殘缺，而建立了完善的公理体系。他这个公理体系是比較流行的一种，普通称它做希尔伯特公理体系。

希尔伯特公理体系的全部公理分为五組：

I. 結合公理

首先，希尔伯特采用“点”、“直綫”、“平面”这三个元名和“点在直綫上”、“点在平面上”这两个元誼。这几个基本概念虽然沒有明白的定义，却隐約地受着下列各公理的制約。

若一直綫上的所有点都在某平面上，我們便說該直綫在这平面上。

习惯上，有时把“点在直綫上”也說做“直綫通过点”，同样地把“点在平面上”和“直綫在平面上”各說做“平面通过点”和“平面通过直綫”。这些話給我們的印象，是它們表示着点、直綫、平面間的一种“結合关系”。

这組公理共有八条：

I_1. 通过不同两点的直綫必定存在（图 6）。

I_2. 通过不同两点的直綫至多有一条（图 7）。

从这两个公理，可以引得

推論. 1° 任意两个不同的点确定唯一的通过它們的直綫（图 8）。

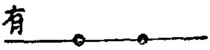

图 6

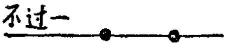

图 7.

图 8.

因此，通过 A、B 两点的直綫可以記做“直綫 AB”或“AB 直綫”，或竟記做“AB”。

2° 不同两直綫至多有一公共点(图 9)。

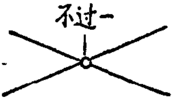

图 9.

图 10.

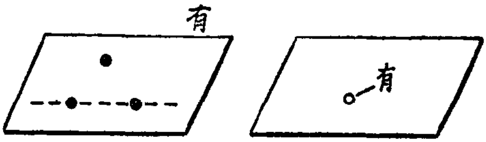

图 11.

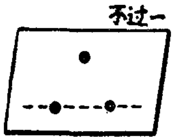

图 12.

I_3. 在每一直綫上至少有两点。至少有三点不同在一直綫上(图 10)。

I_4. 通过不同在一直綫上的三点的平面必定存在。在每一平面上至少有一点(图 11)。

I_5. 通过不同在一直綫上的三点的平面至多有一个(图 12)。

用 I_4 的前半部和 I_5 可以导出：

推論. 任意三个不同在一直綫上的点确定唯一的通过它們的平面(图 13)。

因此，通过不同在一直綫上的 A、B、C 三点的平面可以記做“平面 ABC”或“ABC 平面”。

I_6. 若一直綫有不同两点在某平面上，則該直綫全在这平面上(图

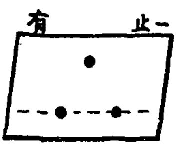

图 13.

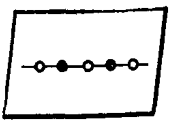

图 14.

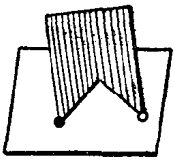

图 15.

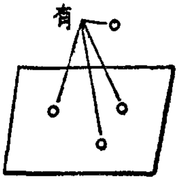

图 16.

14)。

I_7. 若两平面有一公共点，則它們至少还有另一公共点(图 15)。

I_8. 至少有四点不同在一平面上(图 16)。

如果只是建立平面几何学，可以去掉后五个公理。

II 順序公理

設有同在一直綫上的三点，則我們从經驗上知道有一点介于其余两点之間。“介于……之間”这个概念乃表示三点的“順序关系”，希尔伯特采用它作为元謌。

本組公理有四条：

II_1. 若 B 点介于 A 和 C 两点之間，則 A、B、C 是一直綫上的三个不同的点，并且 B 也介于 C 和 A 之間(图 17)。

II_2. 对于任何不同的 A 和 B 两点，在直綫 AB 上至少有一点 C，使得 B 介于 A 和 C 之間(图 18)。

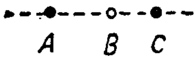

图 17.

图 18.

图 19.

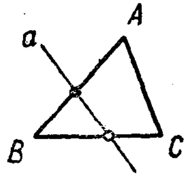

图 20.

II_3. 在一直綫上任何不同的三点中，至多有一点介于其余两点之間(图 19)。

II_4. 巴士公理. 設 A、B、C 是不同在一直綫上的三点(图 20)，a 是平面 ABC 上的一直綫，它不通过 A、B、C 中任何一点。若 a 有一点介于 A 和 B 之間，則 a 必还有一点介于 A 和 C 或 B 和 C 之間。

末一个公理是德国数学家巴士(Pasch, 1843—1930 年)首先提出来的，也叫做截割公理。

III 合同公理

有了“介于……之間”这个概念和順序公理，就可以叙出下列各定